Dynamic Programming による点検周期の一考察

三 觜 武*

§1. はじめに

この論文は，次のような過去の業績が足場になって研究されたものである．

(1) D. G. Davis 等により開拓されてきた『故障理論』(Failure Theory or Theory of Failure)

(2) R. Bellman の "Dynamic Programming"

次節において，筆者の研究した結果を述べるが，この節では記号の説明を兼ねてその概要を紹介する．

[1] 故障理論.[1),2)]

$F(x)$；時点 0 から x までに故障の起きる確率．故障分布函数という．

$F(x)$は，可微分を仮定する．

次の函数を定義する

$$R(x)\equiv 1-F(x)\ ;\ \text{信頼度}$$

$$f(x)\equiv F'(x)\ ;\ \text{故障密度函数}$$

$$z(x)\equiv\frac{f(x)}{R(x)}\ ;\ \text{死力}$$

この論文では，$z(x)$は可微分とし，$R(x)>0$, $f(x)>0$, $z(x)<\infty$ を仮定する．

次の定理が成り立つことは明かであろう．

[定理. 1. 1] $z(x)>0$

[定理. 1. 2] $f(x)$は可微分である．

[定理. 1. 3] $x>0$ のとき $z(x)>f(x)$

[定理. 1. 4] $z(0)=f(0)$

[定理. 1. 5] $z'(x)\leqq 0 \Rightarrow f'(x)<0$

[定理. 1. 6]

(1) $z'(x)>z^2(x) \Leftrightarrow f'(x)>0$

(2) $z'(x)=z^2(x) \Leftrightarrow f'(x)=0$

(3) $z'(x)<z^2(x) \Leftrightarrow f'(x)<0$

($z^2(x)$は $z(x)\cdot z(x)$のことである．)

(証) $f(x)=z(x)R(x)$

* 日本国有鉄道 昭和 35 年 11 月 5 日，日本 OR 学会第 8 回研究発表会にて講演 昭和 35 年 11 月 30 日受理

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

$f'(x)=R(x)\{z'(x)-z^2(x)\}$ より［定理 1.5］及び［定理［1.6］］が出る．

［2］ Dynamic Programming [3),4),5)]

System の状態(state)を表わす Vector p は

$$p=p(\boldsymbol{c},\ x,\ \xi,\ Z(t))$$

x 及び ξ は実数，$\boldsymbol{c}$ は有限次元の実 Vector, $Z(t)\ (x\leqq t\leqq\xi+x)$ は無限次元の実 Vector,

ここに

x ; System の年齢(age)

ξ ; 連続稼動時間

$\boldsymbol{c}$; 資金(または資材)

$z(t)$; 稼動中の system の死力

p の norm $\|p\|$ は，

$$\|p\|^2=\|\boldsymbol{c}\|^2+|x|^2+|\xi|^2+\|Z(t)\|^2 \quad \text{とする．}$$

ここに，$\|\boldsymbol{c}\|^2=|c_1|^2+|c_2|^2+\cdots$ c_1, c_2 …… は $\boldsymbol{c}$ の component, $\|Z(t)\|^2=\int_0^t|Z(\tau)|^2d\tau$ また，policy を T_q, $(q\in S)$ とするとき，$p\in D$, $T_q\cdot p\in D$ (D は p の集合) であるとする．

$V_N(p)$; 初めの state p のとき，N 段 Optimal policy をとったときの Return

Φ; 問題によって決る函数

とするとき，Recurrence relations は，

$$V_N(p)=\operatorname*{Sup}_q \Phi(p,\ T_q(p),\ \ V_{N-1}(T_q(p)))$$

である．

［例］ 同種の system が N 個ある．これが故障する前に取替えて，x 時間に対する信頼度を max. にしたい．ただし，この system の死力は $z(t)\ (0\leqq t\leqq x)$ とする．

Recurrence relations は

$$\begin{cases} V_N(x)=\max\limits_y[R(y)\,V_{N-1}(x-y)] & (N\geqq 2) \\ V_1(x)=R(x) \end{cases}$$

この解は，文献に(5)やや詳しく述べてある．

§2. 点検周期の一考察

点検周期の或る種の問題は，Dynamic Programming で既に取り扱われているが，[6)] ここでは次のような種類の問題を調べて見た．

前節の考えを基礎にして，次のような点検周期の問題を考察する．

(問題) system を，x 時間稼動する．この x 時間の中で，どのような時点において点検するのが最適であるか．

この問題を

(a) 点検に伴う cost C_0

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

(b)　故障発生に伴う cost　C_1

(c)　故障分布函数　$F(x)$

を前提として，全期待 cost が最小になるような計画を立てようというのである．

問題の解析に入る前に，点検の意義を次のように規定する．

点検とは，system を稼動するに先立って行う予定計画した検査，修繕を含む稼動準備行為であって，点検により，system の稼動中の死力は次のように変換される．

$$\tau_y \cdot z(t) = z(t-y) \qquad (t \geqq y)$$

ここに τ_y は変換，y は直ぐ前に行った点検時点よりの経過時間である．

点検に要する時間は 0 と仮定する．

$C_0(y)$；点検に伴う cost$(C_0 \geqq 0)$，$C_0(0)=0$ を仮定する

$C_1(y, t)$；故障発生に伴う cost$(C_1 \geqq 0)$

N；許容された点検回数

x；system の総稼動時間$(0 \leqq x < \infty)$

y；点検周期$(0 \leqq y \leqq x)$

$V_N(x)$；初めの state x より出発し，N 段の Optimal policy により得られる最小の cost（期待値）

$t \in [0, x]$ とする．

勿論，§.1 の［1］で述べた仮定はこの §.2 でも仮定されている．

1° Case(1)，故障した system は，次回予定点検時点まで，故障は放置される．

Recurrence relations は，

$$\begin{cases} V_N(x) = \min\limits_{y} \left[C_0(y) + \int_0^y C_1(y, t) f(t)\, dt + V_{N-1}(x-y) \right] & (N \geqq 2) \\ V_1(x) = C_0(x) + \int_0^x C_1(x, t) f(t)\, dt \end{cases}$$

と書ける．

［定理，2. 1. 1］ Case(1)において，

$C_0(y) = k_0 y,$

$C_1(y, t) = k_1(y-t)$

k_0, k_1 は const.　$k_0 \geqq 0,\ k_1 > 0$

$y \geqq t \geqq 0$ である．

この場合の Optimal policy y^* は

$$y^* = \frac{x}{N}$$

$$V_N(x) = k_0 x + N \int_0^{y^*} k_1 (y^* - t) f(t)\, dt$$

$V_N(x)$ は，x につき covex な函数である．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

Optimal policy は $F(t)$ に関係しない.

(証)
$$C_0(y)+\int_0^y C_1(y,\ t)f(t)dt=k_0y+\int_0^y k_1(y-t)f(t)dt$$
が y につき strictly convex な単調増加函数であることより，定理が出る.

[定理 2. 1. 2] Case(1)において

$$C_0(y)=\begin{cases} k_0 & (y>0\ \text{に対して}) \\ 0 & (y=0\ \text{に対して}) \end{cases}$$

$$C_1(y,\ t)=k_1(y-t)$$

k_0, k_1 は const. $\quad k_0>0,\ k_1>0$

Optimal policy y^* は

$$V_N(x)=\min_{N\geqq n\geqq 1}\left[nk_0+n\int_0^{\frac{x}{n}}\left(\frac{x}{n}-t\right)f(t)dt\right]$$

なる自然数 n について，$N-n$ 段について $y^*=0$，残り

n 段について $y^*=\dfrac{x}{n}$.

(証) C_0 を考えないで任意に $m(N\geqq m\geqq 1)$ を選んだとき $\int_0^y k_1(y-t)f(t)dt$ が，y の単調増加函数で，strictly convex であることより，Optimal policy は $\dfrac{x}{m}$ となる. $V_N(x)$ を求めるためには，すべての $m(N\geqq m\geqq 1)$ について考察すればよいから，定理のようになる.

2°. Case(2)，故障が発生すれば，直ちに修理される．そして予定点検時点は修理に伴い新しく考慮しなおす．修理による死力 $z(t)$ への影響は，点検と同一の効果があるものとする．即ち，$\tau_y\cdot z(t)=z(t-y)$，y は直ぐ前に施行された点検または修理よりの経過時間とする.

また，故障すれば，許容された点検回数 N は $N-1$ となるものとする.（この case では $C_0=0$ としている.）

Recurrence relations は，

$$\begin{cases} V_N(x)=\min\limits_{y}\left[\int_0^y C_1(t)f(t)dt+\int_0^y V_{N-1}(x-t)f(t)dt\right] \\ \qquad\qquad +R(y)\,V_{N-1}(x-y) \qquad (N\geqq 2) \\ V_1(x)=\int_0^x C_1(t)f(t)dt+\int_0^x V_0(x-t)f(t)dt \end{cases}$$

ここに，$V_0(x)$ は，

$$V_0(x)=\int_0^x C_1(t)f(t)dt+\int_0^x V_0(x-t)f(t)dt$$

の積分方程式の解である.

$V_0(x)$；点検をしない場合，x 時間内の故障発生に伴う cost（期待値）

$V_0(x)$ は $V_0'(x)$，$V_0''(x)$ をもつものと仮定する．この分節においては次の Lemma 及び定理

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

は，すべて case (2) においては $C_1(t)=k_1>0$, $k_1=\text{const.}$ 場合とし，このことはいちいちことわらない.

[Lemma 2. 2. 1]

$$(1)\qquad z'(t)-z^2(t)+z(0)z(t)<0 \qquad (x\geqq t\geqq 0)$$

ならば，

$$V_0''(t)<0$$

$$(2)\qquad z'(t)-z^2(t)+z(0)z(t)>0 \qquad (x\geqq t\geqq 0)$$

ならば，

$$V_0''(t)>0$$

(証)

$$V_0(x)=k_1F(x)+\int_0^x V_0(x-t)f(t)dt \quad \text{より}$$

$$V_0''(x)=k_1R(x)\,(z'(x)-z^2(x)+z(0)z(x))+\int_0^x V_0''(x-t)f(t)dt$$

Bellman の Renewal Equation に関する定理(文献(3)p.178 の Theorem 9.)によって，

$$z'(x)-z^2(x)+z(0)z(x)\leqslant 0 \quad \text{により}$$

$$V_0''(x)\leqslant 0 \quad \text{となる.}$$

[Lemma 2. 2. 2]

$$(1)\qquad V_0(x)\geqq 0,\qquad V_0(0)=0$$

$$(2)\qquad V_0'(x)>0,\qquad V_0'(0)=k_1z(0)$$

(証)

$$V_0(x)=k_1F(x)+\int_0^x V_0(x-t)f(t)dt$$

$k_1F(x)\geqq 0$ であるから Bellman の Renewal Equation に関する定理(前出)により，

$$V_0(x)\geqq 0$$

また，上の積分方程式で $x=0$ のときは，右辺は0であるから $V_0(0)=0$ となる.

$$V_0'(x)k_1f(x)+\int_0^x V_0'(x-t)f(t)dt \quad \text{より}$$

$$V_0'(0)=k_1f(0)=k_1z(0)$$

$k_1f(x)>0$ であるから Bellman の Renewal Equation に関する定理(前出)により，

$$V_0'(x)>0$$

[Lemma 2. 2. 3]

M を任意の自然数とする.

$$(1)\qquad V_M'(x)>0$$

$$(2)\qquad V_0''(x)<0\Rightarrow V_M''(x)<0$$

$$(3)\qquad V_0''(x)\geqq 0\Rightarrow V_M''(x)\geqq 0$$

(証)

$$V_N(x)=\min_y\left[k_1F(y)+\int_0^y V_{N-1}(x-t)f(t)dt+R(y)\,V_{N-1}(x-y)\right]$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

$$=\min_{y}[v_N(x,y)]$$ とおく.

$$\frac{\partial v_N(x,y)}{\partial y}=0 \quad より \quad k_1 z(y)=V'_{N-1}(x-y)$$

この方程式の根を $\bar{y}$ とする.

$$V'_N(x)=\left|\frac{\partial v_N}{\partial x}\right|_{\bar{y}}=\int_0^{\bar{y}} V'_{N-1}(x-t)f(t)dt+R(\bar{y})\,V'_{N-1}(x-\bar{y})$$

であるから，任意の $t(t\in[0,x])$ につき，$V'_{N-1}(t)>0$ なら $V'_N(x)>0$

また，$V_1(x)=V_0(x)$，$V'_1(x)=V'_0(x)>0$ であるから数学的帰納法により $V'_M(x)>0$ である.

$$V''_N(x)=\int_0^{\bar{y}} V''_{N-1}(x-t)f(t)dt+R(\bar{y})\,V''_N(x-\bar{y})$$

より，任意の $t(t\in[0,x])$ につき，$V''_{N-1}(t)<0$ なら，$V''_N(x)<0$

また，　$V''_1(x)=V''_0(x)<0$ より

$V''_M(x)<0$ となる.

同様にして，　$V''_0(x)\geqq 0 \Rightarrow V''_M(x)\geqq 0$

［定理. 2. 2. 1］ $z(t)$ が単調な函数で $V''(t)<0$ なら，Optimal policy y^* は

$$y^*=x$$

（証）

$$k_1F(y)+\int_0^{y} V_{N-1}(x-t)f(t)dt+R(y)\,V_{N-1}(x-y)=v_N(x,y)$$

とおく.

$N=2$ の場合を考える.

$$\frac{\partial v_2(x,y)}{\partial y}=0 \quad より \quad k_1 z(y)=V'_0(x-y)$$

この方程式の根を $\bar{y}$ とする.

Optimal policy は $(0,x)$ の $\bar{y}$ で極小値をとる点か或いは，$0, x$ の点のいずれかである.

（1）　$V''_0(t)<0,\ z'(t)\leqq 0$ なら

$$\left|\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}\right|_{\bar{y}}=k_1 z'(\bar{y})R(\bar{y})+R(\bar{y})\,V''_0(x-\bar{y})<0$$

であるから，$\bar{y}$ は Optimal policy とはならない.

（2）　$V''_0(t)<0,\ z'(t)\geqq 0$ なら

$k_1z(y)$ は $y=0$ で $k_1z(0)$ 単調非減少で $y=x$ で $k_1z(x)$，

また，$V'_0(x-y)$ は $y=0$ で $V'_0(x)$，単調増加して $y=x$ において $V'_0(0)$，

$V'_0(0)=k_1z(0)$ であるから，$\bar{y}$ は $(0,x)$ において存在しない.

従って $V''_0(t)<0$，$z(t)$ が単調な函数なら，Optimal policy は $y^*=x$，

$$V_2(x)=V_0(x) \quad となる.$$

もし任意の自然数 M において，$V_{M-1}(x)=V_0(x)$ なるとき

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

$$V_M(x)=\min\left[k_1F(y)+\int_0^y V_{M-1}(x-t)f(t)dt+R(y)V_{M-1}(x-y)\right]$$

$$=\min_y\left[k_1F(y)+\int_0^y V_0(x-t)f(t)dt+R(y)V_0(x-y)\right]$$

の Optimal policy y^* は

$y^*=x$ で $V_M(x)=V_0(x)$ となる.

帰納的に, N 段のとき $V_0''(\mathrm{t})<0$, $z(t)$ が単調な函数なら,

$$V_N(x)=\min_y\left[k_1F(y)+\int_0^y V_{N-1}(x-t)f(t)dt+R(y)V_{N-1}(x-y)\right]$$

の Optimal policy y^* は, $y^*=x$

同様にして, 次の定理を得る.

[定理. 2. 2. 2] $V'_0(t)$ が単調な函数で

$z'(t)<0$ ならば Optimal policy y^* は

$$y^*=x$$

(例) 死力 $z(t)=e^{-t}$ の場合これは, Thiele type の初期故障[2]の項 e^{-at} において $a=1$ の場合に相当する.

Case(2), $C_1(t)=k_1>0$ (k_1=const.)について考える.

$$z'(t)-z^2(t)+z(0)z(t)=-e^{-2t}<0$$

$$z'(t)=-e^{-t}<0$$

$V''_0(t)<0$ 及び $z'(t)<0$ であるから, Optimal policy は $y^*=x$

$y^*=x$ というのは, x 時間の中間では点検を行わないことを表わしている.

(例) $z(t)=a$(const.)の場合を, 上記の例題のように Case(2)の $C_1(t)=k_1>0$ (k_1=const.) について考える.

$$z'(t)-z^2(\mathrm{t})+z(0)z(t)=0$$

$$z'(t)=0, \qquad V''_0(t)=0$$

$$k_1z(t)=ak_1=V'_0(t) \quad \text{が常に成り立つ.}$$

この場合 $V_N(x)=V_0(x)=ak_1x$ であり, $V_N(x)$ の式を直接計算することにより, Optimal policy y^* は $[0, x]$ のどこの点を採用してもよいことがわかる.

3°. Case(3) 故障が発生すれば, 直ちに修理される. 予定点検時点は故障に伴う修理に関係なく, 予定計画された時点で必ず行う場合, とくにここでは, 故障に伴う cost $C_1(y, t)=k_1>0$ k_1=const. の場合を取り扱うことにする,

$$\begin{cases} V_N(x)=\min\limits_y[C_0(y)+V_0(y)+V_{N-1}(x-y)] & (N\geqq 2) \\ V_1(x)=C_0(x)+V_0(x) \end{cases}$$

ここに $V_0(x)$ は

$$V_0(x)=k_1F(x)+\int_0^x V_0(x-t)f(t)dt$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

の解である.

[定理. 2. 3. 1] Case(3)で $C_0(y)=0$ のとき Optimal policy y^* は,

(1) $V''_0(t)>0 \Rightarrow y^*=\dfrac{x}{N}$

(2) $V''_0(t)<0 \Rightarrow y^*=x$

(3) $V''_0(t)=0$ ならば, y^* は $[0, x]$ のどこの点であってもよい.

(証) $V_0(t)$ が単調増加函数であるから, $V_0(t)$ の convex, concave の性質から(1), (2)の結果はすぐ出る.

(3)は
$$V_0''(t)=0 \Leftrightarrow Z(t)=a=\text{const.}$$
より
$$V_0(x)=V_1(x)=ak_1x.$$

$V_{N-1}(x)=ak_1x$ で $Z(t)=a=\text{const.}$ なら, y は $[0, x]$ のいずれの点を選んでも $V_N(x)=V_{N-1}(x)=ak_1x$ である. 数学的帰納法により, $V_N(x)=V_0(x)=ak_1x$ であるから, y^* は $[0, x]$ のいずれの点でよいことがわかる.

[定理. 2. 3. 2] case(3)において

$$C_0(y)=\begin{cases} k_0(=\text{const})>0 & (y>0 \text{ に対して}) \\ 0 & (y=0 \text{ に対して}) \end{cases}$$

なるとき

(1) $V''_0(x)>0$ なら

$$V_N(x)=\min_{N\geqq n\geqq 1}\left[nk_0+nV_0\left(\frac{x}{n}\right)\right]$$

なる自然数 n について, Optimal policy は, $N-n$ 段については $y^*=0$,

残り n 段については $$y^*=\frac{x}{n}$$

又, $V_N(x)$ は convex である.

(2) $V''_0(x)\leqq 0$ なら Optimal policy は $y^*=x$.

(証) (1)の場合, $V_0(x)$ が単調増加で convex なることより, k_0 を考えないで任意の $N\geqq m\geqq 1$ に対し Optimal policy は $\dfrac{x}{m}$ となる. $V_N(x)$ は m のすべての値について選べば n が求められるから定理をうる. $V_0(t)$ が convex であるから,

$$V_N(x)=\min_{n}\left[nk_0+nV_0\left(\frac{x}{n}\right)\right]$$

$V_N(x)$ は convex である.

(2)の場合 $V_0''(x)<0$ より $y^*=x$

$V_0''(x)=0$ においては,

$$V_0(x)=ak_1x \qquad (a(=\text{const.})>0)$$

であり $[C_0(y)+V_0(y)+V_{N-1}(x-y)]$ は $y=x$ のとき最小ととなるから $y^*=x$.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

4°. N に上限がない場合.

[定理. 2. 4. 1] Case(1)及び Case(3)において Recurrence relations を

$$V_N(x)=\min_y T(y,\ V_{N-1})$$

と書くことにする.

C_0, C_1 が有限確定の値をとり, $[0, x]$ で連続であり $C_0(0)=0$ なるとき

$$V(x)=\min_y T(y,\ V)$$

の解が存在し, 解は unique で x につき連続であり,

$$V(x)=\lim_{N\to\infty} V_N(x)$$

により求められる.

(証) $N_N(x)$は N につき単調非増加函数, $V_N(x)\geqq 0$, $V_1(x)$が非負有限確定であるから, $\lim_{N\to\infty} V_N(x)$は収斂する. これを $V(x)$とする. $V_1(x)$ が x につき連続であり, V_{M-1} が連続なら $V_M(x)$は連続であるから, 数学的帰納法により$V_N(x)$が連続であり $V(x)$が連続である.

解の unique 性は次のように証明される. もし, $V(x)$の他に $W(x)$なる解があれば $V(x)\equiv W(x)$なることを示そう. ($\equiv$は恒等を示す)

$$v(c)=\max_x |V(x)-W(x)| \quad (\|x\|\leqq c)$$

Bellman の Lemma (文献(3) p. 118 Lemma. 1)により

$$|V(x)-W(x)|\leqq \max|V(\tau(x,y))-W(\tau(x,y))|$$

ここに $\tau(x,y)$ は, x の y による変換である. $1\geqq a\geqq 0$ なる a につき,

$$v(c)\leqq v(ac)\leqq \cdots\cdots\cdots\cdots \leqq v(a^n c)$$

と書ける. $V(x)$, $W(x)$は $x=0$ で連続であるから, $n\to\infty$ のとき

$$v(a^n c)\to 0$$

従って $v(c)\equiv 0$

$$\therefore\quad V(x)\equiv W(x)$$

$V(x)$ は unique な解である.

参 考 文 献

参考にしたもののみを掲げる.

(1) D. G. Davis; An Analysis of some Failure Data. [Jour. of the Amer. St. Ass. vol. 47. No. 258. 1952]

(2) 三觜武; 故障の確率モデルについて [日本国有鉄道; 能率管理研究所紀要 No. 6 1960]

(3) R. Bellman; Dynamic Programming (Princeton U. P.) 1957

(4) R. Bellman & S. Drefus; Dynamic Programming and Reliability of Multi Component Device, [J. O. R. S. A. vol 6. No. 2]

(5) 三觜武; Reliability Control への D. P. の一応用例[日本科学技術連盟 D. P. 部会資料 1960]

(6) 小田中敏男・片岡信二; 動的計画 (I) [日本科学技術連盟・第7回 OR 教育コーステキスト, 1958]

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.