ある線型計画法の一解法と適用

—タクシー運転手の非乗車日割当法に関連して—

米 田 桂 三*

§1. 要　旨

東京都内にあるタクシー会社において，一定車種の各車一日収益は長期的観察によれば，運転手個人の技倆(収益上の技倆)と曜日とを最大の要因とし，しかも，個人比 a_i と曜日係数 b_j との積 a_ib_j に大体比例することが社員石鍋友康によって明らかにされている．ただし，$i=1,\ 2\cdots\cdots,\ k$ は技倆階級を，$j=1,\ 2\cdots\cdots,\ 7$ は曜日を表わす．運転手は休暇および下車勤務日を同日数与えられることになっているが，これらを総称して非乗車日とする．

問題は以上の条件下で一日当り収益を最大にするために，各曜日に，それぞれの技倆階級の運転手何人ずつ非乗車日を割当てるべきかである．

後述するように，輸送問題型線型計画法のようなことになるが，シンプレックス法を使用しない直接法の簡単な解法を考案したので紹介したい．

§2. 理　論

条件を整理すると次の３つである．

{1} 一つの車の１日収益は運転手の技倆係数 $a_i(i=1,\ 2\cdots\cdots,\ k)$ と曜日係数 $b_j(j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 7)$ との積 a_ib_j に比例する．

{2} 各車収益は互いに独立とする．(各車は互いに邪魔になったり助け合ったりする影響は無視できるくらい小さい)

{3} どの技倆階級の運転手も一様に週平均 d 日の非乗車日をもつ．(d は整数または分数)

なお，上記の他に次の記号をもちいる．

f_i: 技倆階級 i の運転手人数

c_j: 第 j 曜日の非乗車運転手人数

x_{ij}: 第 i 技倆階級に属し第 j 曜日に非乗車番となる運転手人数

次の表のようになる．

技倆階級	$1,\ 2,\ \cdots\cdots k$
技倆係数	$a_1>a_2>\cdots\cdots>a_k$
上記に該当する運転手人数	$f_1,\ f_2,\ \cdots\cdots f_k$

曜日	$1,\ 2,\cdots\cdots,7$
曜日係数	$b_1\geqq b_2\geqq\cdots\cdots\geqq b_7$
非乗車運転手人数	$c_1,\ c_2,\cdots\cdots,c_7$
技倆 i の運転手の各曜日非乗車人数	$x_{i1},\ x_{i2},\ \cdots\cdots,x_{i7}$

* 横浜市立大学 昭和 35 年 9 月 16 日受理

既知正整数 a_i, b_j, f_i, c_j, および未知整数 $x_{ij} \geqq 0$ の間には次の関係がある.

(1) $$\sum_{i=1}^{k} f_i = N \qquad (\text{運転手総人数})$$

(2) $$c_j = \sum_{i=1}^{k} x_{ij}$$

(3) $$\sum_{j=1}^{7} x_{ij} = d \cdot f_i$$

以上3式から次の式を得る.

(4) $$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{7} x_{ij} = \sum_{i=1}^{7} c_j = d \cdot N$$

一週間総収益を S とすれば, 比例定数 M として

(5) $$S = M \cdot \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{7} a_i b_j (f_i - x_{ij})$$

ここで $\sum\sum a_i b_j f_i$ は定数であるから, S を最大にするには

(6) $$L = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{7} a_i b_j x_{ij}$$

を最小にするように $x_{ij} \geqq 0$ ($i=1, 2 \cdots\cdots, k$; $j=1, 2, \cdots\cdots, 7$) を(1), (2), (3), (4)の制約の下に求めなければならない.

(7) $$\sum_{i=1}^{k} a_i x_{ij} \equiv A_j$$

とおくと, (6)は

(8) $$L = \sum_{j=1}^{7} b_j A_j$$

となるが, $A_j \geqq 0$ で, しかも(3)により

(9) $$\sum_{j=1}^{7} A_j = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{7} a_i x_{ij} = \sum_{i=1}^{k} a_i f_i \cdot d \qquad (\text{一定})$$

〔i〕 これと $A_j \geqq 0$ と $b_1 \geqq b_2 \cdots\cdots \geqq b_7 > 0$ との条件下に(8)を最小にするには(9)の制約下に $A_1 \geqq 0$ をできるだけ小さく, A_7 をできるだけ大きく, つぎに $A_2 \geqq 0$ をできるだけ小さく $A_6 \geqq 0$ をできるだけ大きく, つぎに A_3 をできるだけ小さく A_5 をできるだけ大きくとれば目的を達する.

〔ii〕 $A_1 \geqq 0$ をできるだけ小さくとる方法ならびに理由は下の通りである.

(2)と(7)から

(10) $$\sum_{i=1}^{k} x_{i1} = c_1 \qquad (\text{一定})$$

(11) $$\sum_{i=1}^{k} a_i x_{i1} = A_1$$

$a_1 > a_2 > \cdots\cdots > a_k > 0$ を利用して(10), ならびに $x_{i1} \geqq 0$ が $d \cdot f_i$ および f_i を超過できない制約下に(11)を最小にするには, $x_{11} \geqq 0$ をできるだけ小さく, $x_{k1} \geqq 0$ をできるだけ大きくとり,

つぎに，$x_{21} \geqq 0$ をできるだけ小さく，$x_{k-1,1} \geqq 0$ をできるだけ大きくとって，順次このようにつづけ，$x_{i1} \geqq 0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k)$ をきめる．

〔iii〕 A_7 をできるだけ大きくとる方法と理由． 上と同様に

(12) $$\sum_{i=1}^{k} x_{i7} = c_7$$

(13) $$\sum_{i=1}^{k} a_i x_{i7} = A_7$$

(12)，および $x_{i7} \geqq 0$ が $d \cdot f_i$ ならびに f_i を超過できないという制約下に(13)を最大にするには，x_{17}を できるだけ大きく，$x_{k7} \geqq 0$ をできるだけ小さくとり，次に，x_{27} をできるだけ大きく，$x_{k-1,7} \geqq 0$ をできるだけ小さくとって，順次このようにつづけて $x_{i7} \geqq 0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k)$ をきめる．

〔iv〕 上記につづいて，できるだけ小さな A_2，できるだけ大きな A_6，……を求めるも同じ方法である．

さらに行列$\{x_{ij}\}$において行と列を交換しても上と同様の原理が成立つはずである．

(14) $$\sum_{j=1}^{7} b_j x_{ij} \equiv B_i$$

とおいて，(6)をかきなおすと

(15) $$L = \sum_{i=1}^{k} a_i B_i$$

ここで(2)を利用して

(16) $$\sum_{i=1}^{k} B_i = \sum_{j=1}^{7} \sum_{i=1}^{k} b_j x_{ij} = \sum_{j=1}^{7} b_j c_j \qquad (\text{一定})$$

〔i'〕 (15)において $a_1 > a_2 > \cdots\cdots > a_k > 0$ であるから(16)の制約下で L を最小にするには，まず $B_1 \geqq 0$ をできるだけ小さく B_k をできるだけ大きくとり，次に $B_2 \geqq 0$ をできるだけ小さく，B_{k-1} をできるだけ大きくとり，……と順次このようにする．

〔ii'〕 B_1 をできるだけ小さくする方法と理由．

(3)と(14)から

(17) $$\sum_{j=1}^{7} x_{1j} = d \cdot f_1 \qquad (\text{一定})$$

(18) $$B_1 = \sum_{j=1}^{7} b_j x_{1j}$$

$b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots\cdots \geqq b_7 > 0$ であるから，(17)と $x_{1j} \leqq c_1$，$x_{1j} \leqq d \cdot f_{1j}$，$x_{1j} \leqq f_{1j}$ の制約下で，最初に $x_{11} \geqq 0$ をできるだけ小さく，$x_{17} \geqq 0$ をできるだけ大きく，次に $x_{12} \geqq 0$ をできるだけ小さく $x_{15} \geqq 0$ をできるだけ大きく，順次これをつづけて x_{1j} $(j=1,\ 2\ \cdots\cdots,\ 7)$ を定める．

〔iii'〕 B_k をできるだけ大きくする方法と理由．

同様の理由により上と同様の制約下で $x_{k1} \geqq 0$ をできるだけ大きく，$x_{k7} \geqq 0$ をできるだけ小さくとり，以下同様に順次これをつづけて $x_{kj} \geqq 0$ $(j=1,\ 2,\ \cdots\cdots 7)$を定める．

〔iv′〕 B_1, B_7 をきめたと同じ要領で B_2, B_6, つぎに B_3, B_5 を定めれば B_4 すなわち x_{i4} はすべて結果として定まる.

§3. 計算手順

前述の原理によって具体的に x_{ij} を求めるには行, 列における制約を同時に満足するように, つぎの手続にしたがう.

〔1〕 下図のように行和 $d\cdot f_i$ と f_i ならびに列和 c_j をまず記入する.

		c_1	$c_2 \cdots\cdots c_7$	
f_1	$f_1 d$	x_{11}	$x_{12} \cdots\cdots$	x_{17}
f_2	$f_2 d$	x_{21}		x_{27}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
f_{k-1}	$f_{k-1} d$	$x_{k-1,1}$		$x_{k-1,7}$
f_k	$f_k d$	x_{k1}	$x_{k2} \cdots\cdots$	x_{k7}

〔2〕 第1行で x_{17} を f_1, f_1d, c_7 のいずれをも超過しない最大整数とし, つぎに x_{16} を f_1, f_1d-x_{17}, c_6 のいずれをも超過しない最大整数とする. つぎに x_{15} を f_1, $f_1d-x_{17}-x_{16}$ のいずれをも超過しない最大整数とし, このように順次 x_{11} まで定める.

〔3〕 第 k 行で上記と同様の手順を x_{k1} から出発して x_{k7} までおよぼす.

〔4〕 第1列において, $x_{k-1,1}$ を f_{k-1}, $f_{k-1}d$, c_1-x_{k1} のいずれをも超過しない最大整数とし, つぎに, $x_{k-2,1}$ を f_{k-2}, $d\cdot f_{k-2}$, $c_1-x_{k1}-x_{k-1,1}$ のいずれをも超過しない最大整数とする. 以下同様にして x_{11} におよぶ. ここで得た x_{11} の値と〔2〕において得た値とが一致しないときは, 両者のうち大きい方を残して小さい方をすてる. x_{11} はできるだけ小さくしたいが一方で不都合を生ずれば仕方がないからである. この補正の影響はすてられた値を計算した経路の方に順次隣へおよぼす. §4の例2参照. ただし, 制約を与える数 f_i, c_j などが小さいときは x_{ij} は0が多く, このような補正を必要とする場合は僅少である.

〔5〕 第7列においても〔4〕同様のことを x_{17} から出発して x_{k7} までやる. 縦横両方から来た x_{k7} が一致しないときの処置も〔4〕と同じ.

〔6〕 以上で行列の最外輪を完成したから, これら決定した x_{ij} を f_id および c_j から減じた数を小字または括弧つきで記し, これを f_id および c_j と同じ役割をさせて〔1〕～〔5〕と同様の方法で行列の外から2番目の輪にほどこし, 同様のことを順次くりかえしていく.

§4. 数値例

例 1.

技 倆 階 級 i	1	2	3	4	5	計
同上技倆係数 a	90	85	80	75	70	
同上所属運転手数 f	30人	60人	130人	140人	40人	400人

曜 日 j	1(土)	2(月)	3(水)	4(火)	5(木)	6(金)	7(日)
曜日係数 b	84	82	82	80	80	78	78
非乗車人数 c	60	70	80	80	80	90	100

$$d=\sum_{j=1}^{7} c_j/N=\frac{560}{400}=1.4$$

f_i	$f_i d$ \ c_j	60	70	80	80	80	90	100
30	42	—	—	—	—	—	12	30
			(54)	(80)	(80)	(80)	(78)	
60	84	—	(24) —	—	—	—	24	60
130	182	—	(172) —	—	38	80	54	10
140	196	20	(176) 54	80	42	—	—	—
40	56	40	16	—	—	—	—	—

例 2. 式(6)において最小となるように x_{ij} を求める方法を述べたが，これは(5)において S を最大とするように $y_{ij}=f_i-x_{ij}$ を求めても同じである．最大を求めるには，上述最小を求める方法で“大”と“小”とを交換しただけのものである．例1をこの最大を求める形で解いてみる．

$y_{ij}=f_i-x_{ij}$ を x_{ij} の代りに

$c'_j=N-c_j$ を c_j の代りに

$d'=7-d$ を d の代りに使用して次の表のように計算をすすめる．右下隅および左上隅からできるだけ大きくとっていく．

一つの枠内にあって2個以上の数字のあるものは，◎印付きの方を採用して，△印の方をすてる．

f_i	$f_i d'$ \ c'_j	340	330	320	320	320	310	300
30	168	30	30	30	30	30	18	—
			(276)	(250)	(250)	(250)	(252)	
60	336	60	(276) 60	60	60	60	◎36 △ 0	—
130	728	130	(478) 130	130	92	50	◎ 76 △112	120
140	784	120	(524) ◎86 △ 0	◎ 60 △104	◎ 98 △140	140	140	140
40	224	—	24	40	40	40	40	40

これは前節〔4〕の終りごろに説明した補正値である.

§5. 拡　張

§3の実施手続で気付くことであるが, 本方法は $a_1>a_2>\cdots\cdots>a_k>0$ と $b_1\geqq b_2\geqq\cdots\cdots\geqq b_7$, の順序を利用するだけで, a_i および, b_j の値を使用せずに x_{ij} が求まるので, §2の条件{1}がさほど厳密に成立しなくても役立つことが多い.

(6)の代りに

$$L=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{7}p_{ij}x_{ij} \qquad (p_{ij}\geqq 0) \tag{19}$$

を最小とする $x_{ij}\geqq 0$ を求めるには

$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k;\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 7$ に対しつねに

$$\begin{cases} p_{ij}>p_{i+1,j}>0 \\ p_{ij}>p_{i,j+1}>0 \end{cases} \tag{20}$$

で, かつ

$$p_{ij}-p_{i,j+1}\geqq p_{i+1,j}-p_{i+1,j+1}\geqq 0 \tag{21}$$

が成立つならば§3の方法で(19)を最小にする $x_{ij}\geqq 0$ を得る.

何となれば, 行列$\{x_{ij}\}$の行和列和ともに一定であるから, x_{ij} を e だけ増すとき, $x_{i,j+1}$ と $x_{i+1,j}$ とは e だけ減少し, $x_{i+1,j+1}$ は e だけ増加したとすれば(19)の増加は

$$e\{(p_{ij}-p_{i,j+1})-(p_{i+1,j}-p_{i+1,j+1})\}$$

である. {〃}は(21)によって正または0である. 0でないときは L の増減は e の正負と一致する. 増加 e の影響がこのように直接隣に表れないときは, さらに大きく{〃}に表れることは(20)から明らかである.

したがって L を最小にするには§2の通りに左上隅と右下隅をできるだけ小さく, 左下隅と右上隅をできるだけ大きくとればよい. 証明終り.

(21)の不等号が反対向き

$$0\leqq p_{ij}-p_{i,j+1}\leqq p_{i+1,j}-p_{i+1,j+1} \tag{22}$$

のときは§2の方法は L を最大とするものである. したがって, このとき L を最小にするには§2と§3とで"大"と"小"とをすべて反対にすべきである.

(21)が成立つことは, 運転手の問題では, 技倆上位の運転手ほど曜日による収益差がはげしいことで, (22)が成立つことは, この反対である.

参 考 文 献

Churchman C. W., Ackoff, R. A., and Arnoff, E. L.; Introduction to Operations Research, John Wiley & Sons

伊理正夫: 輸送問題および割当問題の新しい解き方, 経営科学第3巻第4号