文　献　抄　録

BENES, V. E.: GENERAL STOCHASTIC PROCESSES IN TRAFFIC SYSTEMS WITH ONE SERVER,

Bell Syst. Tech. Jour., January, 1960., 127—160.

待合せ理論で一般な input というのは，相続く arrival 間の時間間隔の確率分布の形を特別に仮定しないういう意味で一般なのであって，その分布が到着時刻や到着番号に depend したり，あるいは，その到着時間間隔を表わす確率変数が互いに独立でなかったりするようなごく一般な場合はいままで全く考えられていなかったようである．Kendall に従えば，*GI* という型しか考えられていなかったということがいえよう．この論文は．いま注意したような広い意味での一般な input を取扱うことに一番大きな特徴がある．著者にしたがえば，この論文には３つの目的がある．すなわち (a) いま述べたような一般な立場で queue を考えるための新しい方法を述べること，(b) この方法は，一般的だけれども，多くの人に理解されやすい初等的な方法で述べ得ることを示すこと，(c) これを用いて，特別な場合に，いくつかの結果を導くこと．この結果の中には既知のものと新しいものとが含まれる．

論文を読んで感ずる特徴の１つは，physical meaning を重んじ，多くの図とともに直観的な理解の出来るよう記述している点で，上記目的の (b) に沿ったものと思われる．ところで，このような一般な立場で論ずるのであるから，当然予想されるようにすぐ実際に応用されるような具体的な結果は得られていない．ここでやられていることは待ち時間が Volterra 型の積分方程式を満すということであって，上に述べたごく一般的な場合に，この積分方程式が解けることはまずないのではなかろうか．論文の後半で (c) の目的に沿って，Poisson input を仮定した際の計算が若干されているが，幾分なりとも具体的な結果が求め易いのは，やはりこのような場合であろう．しかしとにかく，ごく一般な場合でもその積分方程式が得られたというのは，理論的には意味のある結果であるし，数値的にそれを処理する方向で具体的に有用な結果が得られる足がかりともなるであろう．（森村英典）

DOEH, G; A GRAPHICAL TOOL FOR THE NO-QUEUE MODEL,

Oper. Res., Vol. 8, 143—145, 1960

Erlang の取扱った最も古典的な即時式線群，つまりポアソン到着，指数分布サービス，複数チャンネル(その数を M とする)の queue で，現実に行列を作らない場合，そのサービスの measure として有効な呼損率(ある人が到着したとき窓口が全部塞っているため立去らなければならない確率)は有名な Erlang の loss formula

$$P_0=\frac{(\lambda T)^M/M!}{\sum_{y=0}^{y=M}(\lambda T)^y/y\,!}$$

で与えられることはよく知られており，その数表も Palm, Brockmyer 等によってかなり詳しく計算されている．しかしそれらは電話が対象なので呼損率 10^{-3} 以下などはほとんど無意味であり，それらに対応する表は作られていない．

この論文の著者はロッキードの OR グループの人であるが，飛行機のオーバーホールの問題等ではそれ以下の P_0 が必要になるのか，とにかく 10^{-7} までの P_0 に対して，M を見つける図表を作って用いていたようである．この論文はその図表を公開するのが目的で，僅か１枚の図表と，若干のノート，例題による使用法などを述べたものである．１枚の図表にまとめられているので，現場で用い易いということは十分考えられるが，精密さの点ではもちろん前記の数表にはかなわないであろう．（森村英典）

COX, D.R.: SOME PROBLEMS CONNECTED WITH STATISTICAL INFERENCE

Ann. Math. Stat. 29 (1958) 357—372

推測統計学の理論的基礎に関する著者の見解を述べたものである．惜しいことに少し古い(1956 年春の統計学会招待講演の内容に手を入れたもの)ので，1955 年 Fisher 卿の論文で燃え上った有名な論争に対する批判はみられない．以下内容を簡単に紹介する．

§1 序．§2 Inferences and decision は decision problems と inference problems との違いについて．§3 Sample space. 実験の不確定の繰返しでは sample space の設定に注意すべきこと．こういう例があげられている：２つの正規母集団 $N(\theta,\sigma_1^2)$，$N(\theta,\sigma_2^2)$ $(\sigma_1^2 \gg \sigma_2^2$ 共に既知）から確率 1/2 ずつでどちらかをえらび，観測値 x にもとづき検定 $H:\ \theta=0$，$A:\ \theta=\theta'(\cong\sigma_1)$ を有意水準 0.05 でやりたい．常識的な検定（どちらの母集団をえらんだかによって棄却域が $x>1.64\,\sigma_1$ または $x>1.64\,\sigma_2$）は conditional test だが，これは whole sample space では最強力でない．最強力検定は棄却域が大よそ，母集団 $N(\theta,\sigma_1^2)$ がえらばれたら $x>1.28\,\sigma_1$，母集団 $N(\theta,\sigma_2^2)$ がえらばれたら $x>5\sigma_2$ となるのである！ これに関連して nuisance parameter と ancillary statistic との説明がある．後者の Fisher 式の定義とその拡張がある．このねらいは‘観測値が未知母数について直接の (direct) 情報を与えない’という概念の明確化にある．

§4 Interval estimation. confidence approach と fiducial approach との比較がくわしく論じられている．例えば (i) 後者は未知母数の分布に導びくのに前者はそうでない．$N(\theta,1)$ の θ の信頼区間 $(\bar{x}-1.96/\sqrt{n},\ \bar{x}+1.96/\sqrt{n})$ をかくと，θ は $\bar{x}$ の中心に近く端にはありそうにない，またこの外に落ちてもそんなに遠くではなさそうだ，という気が何となくするが，信頼区間の理論はこの感じを説明できない．(v) 信頼区間の Neyman 理論に対する Fisher 卿の強い反撥もさることながら，その妥当性は動かし難い．ところで fiducial 分布の正当化が Bayes 定理の援用で新しい光を浴びる．もし θ がこれこれの事前頻度分布をもてば θ の事後頻度分布はこれこれになるだろう……この接近法は sampling rule に無関係という利点をもつが，しかし事前分布の選定が難しくて簡単な１母数の問題しか扱えないのは clumsy である．結局綜合すれば，区間推定は信頼区間の理論を若干改訂した所に基礎をおくのが合理的のようだと著者はいっている．

§5 Significance test. 有意性検定とくに tail area を使うことの意義．§6 The role of the assumptions. われわれが母集団の形についてなす仮定（例えば正規形というような）はいつもうそである．実際，観測値を沢山とればそれとのずれが必らず出てくるだろう．この難点を和らげる２つのくふう：nuisance parameter の導入と robustness（あるいは stability）の概念とについて説明がある．

（坂口　実）

KLEIN, M. AND ROSENBERG, L.: DETERIORATION OF INVENTORY AND EQUIPMENT *Naval Res. Logist. Quart.* *7(1960) 49—62*

これは劣化する (deteriorate) 財の管理についてのいろいろな問題の review である．一般に劣化する財は定効率のものと漸減効率のものとに大別される．前者は生涯その出力価値が安定していて劣化は寿命の長さ（確率変数）で表わされる．例えば電球・ヒューズ．後者は時とともに出力価値が漸減してゆくもので設備管理の対象の多くはここれに属する．

1)　設備 (equipment) 劣化

劣化する設備を取替または修繕する optimal timing をきめる問題で，次の５つの型があげられている：①古典的な設備取替の問題，例えば Bellman 1955. ② x だけ経ってから修繕する費用を $f(x)$ とすると $\sum_1^n x_i=1$，$0\leqq x_i\leqq b$ の条件のもとに $\sum_1^n f(x_i)$ を最小にするよう $x_1,\cdots,x_n$ および n をきめること (Savage 1956)．③④は予防保守 (preventive maintenance) の問題で，random failure time をもつ機械の取替えに関するもの．例えば (weiss 1956)，寿命函数 $F(t)$（時刻 t までにだめになる確率）の部品がある．時間 t_0 ごとに取替える（この費用 a)．この部品がだめになれば system は死ぬ．system が時刻 τ でだめになるときの損失を $d-b\tau$ $(b>0)$ として $E\{aN+d-b\tau\}$ を最小にせよ．N は部品取替回数を表わす確率変数である．⑤劣化する n 個のものを貯蔵している．それらの寿命分布は独立で同じ分布函数をもつ．時間 t_0 ごとに全部を取替える（この費用 a)．時間 t_0 以内の個々の寿命ぎれが全部で $N(t_0)$ 回，個々の取替費用が b として $(a+bE\{N(t_0)\})/t_0$ を最小にせよ．④⑤には renewal theory が使われる．

2)　在庫劣化

最適在庫政策を求めるもの (Derman-Klein 1958) と品質水準を保つための検査方式をきめるもの (Leiberman 1958) との２つの型の問題がある．

3)　Surveillance sampling

劣化するものの品質を定水準に保持するために定期的に在庫から抜取検査をする．時刻 t における平均不良率が個々の方式の作動特性になる (Derman-Solomon 1958)　　（坂口　実）

BETTY J. FLEHINGER : SYSTEM RELIABILITY AS A FUNCTION OF SYSTEM AGE ; EFFECTS OF INTERMITTENT COMPONENT USAGE AND PERIODIC MAINTENANCE *Jour. Oper. Res. Soc. Amer., Vol. 8(1960), No. 1, pp. 30—44*

電子計算機や自働制御系，あるいは大規模な通信系などのような複雑な系の信頼度(信頼性)を求める問題，即ち“その系が少くともx時間故障しないで動作する確率はいくらか”；“1回故障して次に故障するまでの有効動作時間はどれ位と見積ればよいか”という重要な問題に対する従来の数学的並びに統計的手法は不十分であるとして，次のような5つの仮定の下に2種類のモデルI，IIについて，系の信頼度の問題を追究する．

仮定　1. 系は独立に故障を起す構成要素からなり，要素の寿命分布函数は既知(任意の形でよい)． 2. 系が正しく動作するために，ある要素が正しく動作する必要がある時,その要素は‘使用状態に’あるといい，各要素は使用中の時隔とそうでない時隔を交互にもち，特定の要素が‘使用状態にある’確率は時間の函数として与えられる． 3. 非使用状態の継続時間の分布は指数分布． 4. 要素の故障確率はその使用度数や使用継続とは無関係で，要素の年齢だけに依存する． 5. 故障した要素の取替時間は無視できる．

モデルI： 1. 系は故障が起らない限り連続的に動作する． 2. 系が故障すると故障の原因となった要素は統計的に同等な新要素と取り替えられる．

モデルII： 1. 特定の時隔Tの終毎に全系を点検し，故障している要素はすべて統計的に同等な新要素と取り替える． 2. その他の時間は系は故障による停止が起らない限り，連続的に動作する．

3. モデルIの2. と同じ．

以上のモデルI，IIについて，次には別々に考察を進めているが，これらのモデルの最大の特徴はある要素が故障しても，その要素が使用されるまでは系の故障とはならないことを考慮の中心においている点であろう．

モデルIについて．

第i要素について各記号を次のように定義する．$F_i(t)$：寿命分布函数，$P_i(t)$：時刻tに使用状態にある確率，$G_i(t)$：非使用時隔の分布函数：$G_i(t)=1-\exp(-t/\theta_i)$，$F_i{}^*(t)$：時刻0で新品であったものが時刻$t$までに系の故障をひき起す確率，$F_i{}^*(t;x)$：系の年齢が$x$である時，それから時間$t$以内に第$i$要素による系の故障が起る確率，$U_i(t)$：時刻0で新品であった第$i$要素が時刻$t$までに系の故障をひき起して取り替えられる回数の期待値．これらの各函数の間には，3つの積分方程式で表わされる関係が成立するから，これらにLaplace変換をほどこすか，または数値積分を行えば，$F_i{}^*(t)$と$F_i{}^*(t;x)$をF_i，P_iおよびG_iから求めることができる．かくして年齢xの系が時間t以内に故障を起さない確率$R(t;x)$が求まる．即ち

$$R(t;x)=\prod_{i=1}^{i=n}[1-F_i(t;x)]$$

である．但しnは系を構成する要素の数．また年齢xからスタートして系の故障の期待時間$\bar{t}(x)$は

$$\int_0^\infty R(t;x)\,dt,$$

さらに第i要素の据付けから取り替えまでの平均時間$t_i{}^*$は$P_i(t)$を定数P_iと仮定すれば，この要素の平均寿命t_iと

$$t_i{}^*=\int_0^\infty t\,dF_i{}^*(t)=t_i+(1-P_i)\theta_i$$

なる関係にあることが示されている．

次には，上の仮定の他に

$$F_i(t)=1-\exp(-t/t_i)$$

を仮定して，$F_i{}^*(t)$，$U_i(x)$，$F_i{}^*(t;x)$を具体的に求め，また数値例によって$R(t;x)$と系の年齢xにおける平均余命$\bar{t}(x)$のグラフを与えている．

モデルIIについて．

モデルIと平行した考察を進めているが，周期Tの点検をして故障している要素を取り替えるので時刻Tまでの平均取替個数$U_i(T)$と$t<T$で$t\to T$とした時の$U_i(t)$の極限$U_i(T-)$とが一致せず$U_i(T)-U_i(T-)$は時刻Tにおける点検による第i要素の平均取替個数を示すことが述べられ，$F_i(t)=1-\exp(-t/t_i)$と仮定した時のそれらの評価式の他，この仮定の下では，$t=jT+\tau$に対して

$$U_i(t)=U_i(jT+\tau)=jU_i(T)+U_i(\tau)$$

が成立し，また時刻jTにおける点検から，それに続く$t=kT+\tau$なる時間内の系の信頼度は

$$R(t;jT)=[R(T-)]^k R(\tau)$$

とあらわされ，さらに系の故障と故障の間の平均時間は，結局

$$\bar{t}(jT)=\frac{1}{1-R(T-)}\int_0^T R(\tau)\,d\tau$$

となることが示されている．

モデルIの時と同様に数値例について点検周期T

と取替え期待数の時間平均との関係，および t と $R(t;jT)$ との関係がグラフに示されている．ここで特に $T=\infty$ としたときの $R(t;jT)$ はモデル I の $R(t;0)$ に相当する． (阿部俊一)

J. E. KELLEY, JR: "A THRESHOLD METHOD FOR LINEAR PROGRAMMING" *Naval Res. Logist. Ouart.*, 4 (1957) pp. 35～45

著者は，M. Gerstenhaber が大きな体系の輸送問題の解法に対して提出した[1] 新しい方法を更に一般の L. P. へ拡張する事を試みている．

L. P. の行列の要素 a_{ij} を変換して，

(1) $a_{ij}\geqslant 0,\ \sum_i a_{ij}=1,\ 0\leq j\leq n$

になる様にする．

Primal な問題は，

(2) $\sum_j c_jx_j+\sum_i y_i=f$: min

(3) $\sum_j x_jP_j+\sum_i y_ie_i=P_0$

(4) $x_j,\ y_i\geqslant 0$

である．又 (1) から

(5) $\sum_j x_j+\sum_i x_i=1$

之は，(3) と独立でないが条件式として考える．これに対する dual な問題は，

(6) $w_0+w'P_0=\mathrm{Max}$, w'(row vector)

(7) $w_0+w'P_j\leq c_j$

(8) $w_0+w'e_i\leq M$

である．(2) の f から const. を引いても問題は変らない．今，この const. を $(w'P_0+w_0)$ とすれば，

(9) $f=\sum_j (c_j-w'P_j-w_0)x_j$
$\quad +\sum_i (M-w'e_i-w_0)y_i$

となる．ここで，w', w_0 が dual の f. s. (feasible solution) なら，

$$(10)\quad \begin{aligned} &C_j-w'P_j-w_0\geqslant 0 \quad (1\leq j\leq n)\\ &M-w'e_i-w_0\geqslant 0 \quad (1\leq i\leq m)\end{aligned}$$

である．dual の f. s. は，w' を任意にとり，

$$w_0=\mathrm{Min}_h(c_k-w'P_k,\ M-w'e_h)$$

で，w_0 を決める事によって求める事が出来る．

我々が求めたいのは，primal な問題に対する最適な basic f. s. である．これに対しては．(10) で等号が成り立ち，不等号の成り立つ j, i に対しては，$x_j=0$, $y_i=0$ である．しかし，ここでは，その様に厳密に区別をつけず，Gerstenhaber 流に，$r>0$ なる "threshold" をもうけて，次の条件を満す x_j, y_i を考える．

a) $x_j(w,r),\ y_i(w,r)\geqslant 0$

b) $\sum_j x_j(w,r)+\sum_i y_i(w,r)=1$

c) $x_j(w,r)=0$ if $c_j-w'P_j-w_0\geqslant 0$
$\quad y_i(w,r)=0$ if $M-w'e_i-w_0\geqslant 0$

a), b), c) を満す x_i, y_i の1例は

$$U_j=r+w_0-(c_j-w'P_j)$$
$$V_i=r+w_0-(M-w'e_i)$$
$$u_j=\mathrm{Max}(0,\ U_j)$$
$$v_i=\mathrm{Max}(0,\ V_i)$$
$$A=\sum_j u_j+\sum_i v_i$$

として，

$$x_j(w,\ r)=u_j/A,$$
$$y_i(w,\ r)=v_j/A.$$

である．

ところで，a), b), c) を満す x_j, y_i は，(5), (4) は満すが，一般には，(2), (3) の条件は満していない．しかし，

$$F_i(w,r)=\sum_j a_{ij}x_j(w,r)+y_i(w,r),\ 1\leq i\leq m$$

で定義される $F_i(w,r)$ (primal dual functions) が w について連続ならば，

$$\begin{cases}\sum_i w_i=(m-1)(r+s)/\Delta\\ F_i(w,r)=a_{i0},\ \leq i\leq m\end{cases}$$
$$(\Delta=\mathrm{Min}\ a_{ij},\ S\geqslant \mathrm{Max}_j(\mathrm{M}-C_j))$$

を満す $w_i\geqslant 0$ がすべての正の r について存在する事が証明される．すなわち，w を適当に選ぶ事によって，f. s. を得る事が出来る．更に，$r\rightarrow 0$ となれば，その f. s. は最適になる事が証明される．もっと厳密には，r が0にならなくとも，ある r_0 以下の r に対しては，f. s. が最適になる事が示される．

実際に解を求める時の計算の中心は，

$$F_i(w,\ r)-a_{i0}=0\quad 1\leq i\leq m$$

なる方程式の根 w を求める事である．それには，まず $w^{(0)}$ から出発し，

$$F_i(w^{(0)},\ r)-a_{i0}=\delta_i^{(0)},\ 1\leq i\leq m$$

この $\delta^{(0)}$ をもとにして，$w^{(1)}$ を求め，更に $\delta^{(1)}\rightarrow w^{(2)}\rightarrow\cdots\cdots$ とくりかえしを行い δ が小さくなれば，r を小さくして行き，最適な解に近づいて行くのである．ここで一番問題になるのは，どんな方法で，w を変えて行くかであるが，それは，$F_i(w,\ r)$ の性質に依存する．Gerstenhaber はいくつかの $F_i(w,\ r)$ を提案しているが，それらは，未だ実際に試みられてはいない．これら計算技術に関する問題は，なお今後に残された問題である．

1) Murray Gerstenhaber: "A Solution Method for The Transportation Problem" (J.

Soc. Indust. Appl. Math. Vol. 6, No. 4 December, (1958) pp. 321～334)

（鈴木誠道）

MAURICE SASIENI : DYNAMIC PROGRAMMING AND INVENTORY PROBLEMS *Oper. Res. Quar., Vol. 11 (1960), No. 1/2, pp. 41—49*

はじめに D. P. の基礎概念を述べ，考えを定めるために問題を在庫管理に限定して考察を進める．この際，recurrent decision process のモデルの数式化に伴っておこる1つの困難として，最適化しようとする stage の数 n をいくらと決めればよいか，という問題がある．在庫管理の場合でいえば，在庫量 s を初期条件として出発した時の n stages 間の最小費用 $f_n(s)$ が $n\to\infty$ でもある極限に収束するように discount factor v を導入している．そうするとこの v を使って

$$|f_n(s)-f_{n-1}(s)|\leq v|f_{n-1}(s)-f_{n-2}(s)|$$

が成立することから，$\{f_n\}$ の収束が保証されるという，よく知られた事実を述べている．さて，これで数学的には収束の問題は解決されるが，実際にはまだ問題が残っている．それは例えば月毎に decision を下すような場合には，discount factor v が殆んど1に近くなって，$1-v$ が式に入っている他のパラメターの推定の誤差よりも小さくなるかもしれない．この時でも v の導入に固執することは不合理である．この困難を解決するには

$$f_n(s)=\min_{S\geq s}F_n(s,S)$$

なる $F_n(s,S)$ の現在価を毎月一定額 $G_n(s,S)$ だけ支払って同額にするものとすると

$$G_n(s,S)=\frac{1-v}{1-v^n}F_n(s,S)$$

なる関係があることを使う．即ち $F_n(s,S)$ を min にする policy は $G_n(s,S)$ をも min にするから，$G_n(s,S)$ を min にする optimal policy を同様に定義することができて，任意の固定した n に対して $v\to1$ とすれば $G_n(s,S)\to F_n(s,S)/n$ となるから，$v\to1$ のときの limiting policy は任意の n に対して，1期間当り平均コストを最小にする．要するに金利を無視すれば，n が大きくなるとき $f_n(s)$ は限りなく大きくなるかもしれないが，一般に1期間当り平均（n 期間を通しての）コストの方は収束するから，これを最小にするような policy を求めればよい．

在庫管理で有名な S–s policy は常に optimal でないことは明らかで，簡単な例でそれを示すことができるが，この policy は実際にはかなり広く適用できる．

実例として，Churchman, Arnoff, Ackoff の本の Part IV にある在庫管理の問題を，2，3の数値を具体的に与えて解き，S_n と s_n が $n=8$ 位でほぼ一定値となり，この場合にはこれ以上 n を大きくしても結果はほとんど変らず，S–s policy が D. P. で求まることを述べている．

（阿部俊一）

W. S. JEWELL, THE PROPERTIES OF RECURRENT-EVENT PROCESSES *J. O. R. S. A. 8 (1960) No. 4 pp 446—442*

再帰事象の理論はある事象の stochastic repetition を表現するためのモデルとして，しばしば使われる．ここでは先ず事象間の間隔の分布と与えられた時間間隔内におこる事象の cumulative number の分布の間の関係を詳細に述べている．

$a(t)dt$；ある事象が時間 $t=0$ でおこるとき，その事象が t と $t+dt$ の間にはじめて recur する確率．

$a(t|\tau)dt$；$t=0$ より以前には $t=-\tau$ で事象がおこったことを知って（時間 $(-\tau,\ 0)$ の間の情報はない）$t=0$ 以後に t と $t+dt$ の間にはじめてその事象がおこる確率．

$P_n(t|\tau)$；$t=0$ 以前には $t=-\tau$ で事象がおこったことを知って $(0,\ t)$ の間に丁度 n 個 $(n=0,1,2\cdots)$ 事象がおこる確率．　$(\tau,\ t\geqq0)$

$$P_0(t|\tau)=\int_t^\infty a(x|\tau)\,dx,$$

$$P_n(t|\tau)=\int_0^t a(x|\tau)P_{n-1}(t-x|0)\,dx$$

となる．平均値 $M(t|\tau)$，分散 $b(t|\tau)$ 等も与えられている．

次にある事象がおこった後に start するのと at randon に start するという2つの場合について，state probability，平均値等に対して異った結果が得られることが示してある．

即ち，第一の $\tau\to0$ の場合には

$\lim_{\tau\to0} a(t|\tau)=a(t)$ で state probability は

$$A_0(t)=\lim_{\tau\to0}P_0(t|\tau)=\int_t^\infty a(x)\,dx$$

$$A_n(t)=\lim_{\tau\to0}P_n(t|\tau)=\int_0^t a(x)A_{n-1}(t-x)\,dx$$

でこれを Laplace 変換を用いて書き直すと，

$$\tilde{A}_0(s)=L[A_n(t)]=[1-\tilde{a}(s)]/s$$
$$\tilde{A}_n(s)=\tilde{A}_0(s)[\tilde{a}(s)]^n$$

又平均値 $M_A(s)=\tilde{a}(s)/\{s[1-\tilde{a}(s)]\}$ で与えられる．

第二の $\tau\to\infty$ の場合には，

$u(t)=\lim_{\tau\to\infty} a(t|\tau)$ とおくと $u(t)=\mu A_0(t)$ となる．

state probabilities は

$$U_0(t)=\int_t^\infty u(x)\,dx=\mu\int_t^\infty A_0(x)\,dx$$
$$U_n(t)=\mu\int_0^t A_0(x)A_{n-1}(t-x)\,dx$$

となる．これの Laplace 変換をとると

$$\tilde{U}_0(s)=[1-\mu\tilde{A}_0(s)]/s,$$
$$\tilde{U}_n(s)=\mu[\tilde{A}_0(s)]^2[\tilde{a}(s)]^{n-1}$$

又平均値は $\tilde{M}_U(s)=\mu/s^2$ 又は $M_U(t)=\mu t\ (t\geqq 0)$ となる．その次に，任意の事象間隔分布に対する平均値の近似式が計算されている．

Poisson, Erlang, Stuttering-Poison 過程に対する結果が示されている．

state probability の正規分布近似に対する条件も述べられている．（中田廸子）

BLACK, G. AND PROSCHAN, F: ON OPTIMAL REDUNDANCY, *Jour. Oper. Res. Amer. 7 No. 5 pp 581—588, 1959*

いろいろな部品から構成される一つの System について，与えられた条件の下で各部品の寿命分布が知られている．一定の期間，費用(or 重量)の制限の下で最大の信頼度を得るためには，各部品の予備の数(or 冗長度)をどのように決めれば良いかという問題を考える．

部品 i の単価，故障数，予備品の数を各々 C_i, N_i, n_i とすると問題は

$c=\sum_{i=1}^k n_i c_i$ の条件の下で

$R(n)=\prod_{i=1}^k P_i(n_i)=\prod_{i=1}^k P_r(N_i\leqq n_i)$ を最大にするような vector $n^*=(n_1^*\cdots\cdots n_k^*)$ を見出すことになる．ここでは各部品の寿命分布が指数分布である時，$P(n)$ の対数が Concave ft. であることを用いて次の定理を証明している．

$P_i(m)=\log P_i(u)$ として任意の正数 r に対して $\Delta R_i(0)<rc_i$ なる i に対しては $n_i^*=0$, $\Delta R_i(0)\geqq rc_i$ なる i に対しては $n_i^*=1+[\underset{\Delta R_i(m)\geqq rc_i}{\mathrm{Max}}\ m]$ の如く決めた $n^*=(n_1^*\cdots n_k^*)$ は，$c(n)\leqq c(n^*)$ なるすべての n に対して $P(n^*)\geqq P(n)$ である．

UHE と VHF 受信機の真空管の redundancy を決める例で $c(n^*)$ に対する $P(n^*)$ の計算法についても言及してある．

以上の結果は寿命分布が指数分布の場合のみ考えたが，一般に寿命分布 f が尤度比の単調性，即ち任意の $t_1>t_2$, $w>0$ に対して

$$\frac{f(t_1)}{f(t_1-w)}\geqq\frac{f(t_2)}{f(t_2-w)}$$

なる性質を有している分布の class に対しても上の議論が適用し得るとしている．（反町洋一）

MANNE, A, S: ON THE JOB-SHOP SCHEDULING PROBLEM *Jour. Oper. Res. Amer. 8 No. 2 pp. 219—224, 1960*

“順序づけ”の問題を L. P. の手法を用いて解こうとする試みがいろいろなされているがまだ弱点が多く，特に問題の規模に比べて変数の数が非常に膨大となる傾向がある．

この論文では，変数 x_j で仕事(task) j を始める時間，a_j で機械にかける時間を表し

① 技術的に実行可能な条件

② 順序の条件

③ 仕事の完成予定日の条件

の 3 つの条件を次のように処理している．

① $x_j-x_k\geqq a_k$ or $x_k-x_j\geqq a_j$ なる条件を一次不等式の条件に変えるために変数 $0\leqq y_{jk}\leqq 1$ を導入し $|x_j-x_k|\leqq T$ なる T を用いて

$$0\leqq y_{jk}\leqq 1$$
$$(T+a_k)y_{jk}+(x_j-x_k)\geqq a_k$$
$$(T+a_j)(1-y_{jk})+(x_k-x_j)\geqq a_j$$

② 仕事 j が仕事 k に先行する $x_j+a_j\leqq x_k$

③ d_j を仕事 j の完成予定日とすると

$$x_j+a_j\leqq d_j$$

最適な“順序”の判定基準となる目的函数としては仕事の総処理時間 t を最小にする問題となる

但し t は　$x_j+a_j\leqq t\quad j=1,\cdots,n$

機械計算の面から考えて見ると変数の数は slack 変数を除いて n jobs, m machines の場合には $n\times m+\binom{n}{2}\times m$ の変数が必要となるがこれ迄の L. P. による formuration にくらべて変数が相当少く，計算機によって計算する価値もあろうと著者は述べている．

最後に①で導入した変数 y_{jk} の数を減少させる方向が残されている問題であり，その可能性についても述べられている．（反町洋一）

G, B, DANTZING, AND P, WOLFE : DECOMPOSITION PRINCIPLE FOR LINEAR PROGRAMS *Jour. OperRes. Amer. Vol. 8. No. 1.(1960)*

Vector X, Y が convex set L, L′ の要素である時

但し L: $A_1X=b_1$, L': $A_2Y=b_2$

$$P_0x_0+\bar{A}_1X+\bar{A}_2Y=b$$

を満す X, Y, 及び Max x_0 を求める L. P. の問題を考える．L. P. の制約条件が上のように分解されることは相当多く angular, multistage, triangular, system 等が考えられる．

このような型の L. P. を取扱う手順について述べたもので記憶容量に限度のある Computer でもこの手順によると，相当大規模な L. P. でも分解された小さな sub L. P. を反復解く事で処理することが可能となる．又このような L. P. の型と手順の性質から，いくつかの地方支社からなる企業の線型計画を考える時，各支社では各支社の計画に従って L. P. を解く．本社では各支社の情報を集め，新しい instruction を各支社に与えて各支社の計画の改良を行なわせるという繰返しによって，企業全体としての最良の計画に到達することが出来るという decentralized decision process の考え方で広い応用があるものと思われる．

この論文では convex set L, L′ の頂点を X_i, Y_i, $S_i=\bar{A}X_i$, $T_i=\bar{A}_2Y_i$ で表わし変数 δ_i, δ_i' を導入して任意の feasible solution を S_i, T_i の convex combination で表わし，問題をその convex weight $\lambda_i\geqq 0$, $\mu_i\geqq 0$ と Max x_0 を求める interconnecting L. P. を考える．

手順は basis B の simplex multiplier Π を求めて basis B の optymality を判定するのだがこの段階で simplex criterion の最小の vector を見出す時に $\underset{\mathrm{L}_1}{\mathrm{Min}}\ \pi\bar{A}_1X_i$, $\underset{\mathrm{L}'}{\mathrm{Min}}\ \pi\bar{A}_2Y_i$ なる２つの sub L. P. を解く．

それによって新しく basis に導入する vector を決定し，新しい basis が定まり，その basis に対応する simplex multiplier Π を計算するという step の有限回の繰返しで optimal solution に到達できることが証明されている．

更に L. P. の制約行列の列 vector P_j が任意の convex set C_j の要素である generalized programming problem や先に例であげた angular system, multistage system に対するくわしい計算の手順も述べられている．　　　　（反町洋一）

JEWELL, W. S. : THE PROPERTIES OF RECURRENT EVENT PROCESSES, *Oper. Res. Vol. 8, No. 4, 446—472, 1960.*

OR のモデルには，ある事象の繰返しを記述するために再帰事象理論がよく用いられている．たとえば，待ち行列の問題で客が到着すること，機械器具の故障の発生などはこのような事象と見られるし，待ち合わせ理論のみならず，在庫管理，水力発電の運用，取替理論，人口問題や伝染病の解析，通信網，交通流といったような諸問題には，再帰事象理論を含む確率過程論を用いる必要が生じてくることも多い．

ところで，再帰事象の理論が数学書で取扱われたものは一般的過ぎて細かな結論を述べたものが少ないので，OR ワーカーにとって読み易いように，あまり厳密な議論はしないで特殊なタイプの process，つまり Poisson process, Erlang process, stuttering-Poisson process の３種類のものについて，いくつかの細かい結果を述べることを目的に書かれたのがこの論文である．特に

（1）　再帰事象過程の事象間間隔

（2）　ある時間間隔内で起る事象の累積総数

の２つの間の関係を中心に，（2）の数をあらかじめ与えたとき，それが起る確率(state probability とよんでいる)を求めたり，その漸近分布などを問題にしている．

第１節は以上を骨子とする introduction，第２節は interevent distribution で，ある再帰事象の相続く生起時点間の間隔の長さの分布について論じている．この分布が指数分布のときは，任意の時間間隔内でのこの事象の生起回数は Poisson 分布であることはよく知られているから，指数分布を出発点にして考えるが，この変動係数は１であり，これを r 回重畳したもの(Erlang 分布)の変動係数は１より小さくなることを強調する．一方変動係数が１より大きくなる分布は hyper-exponential distribution であって，その密度函数は，$p+q=1$ として

$$p\mu_1\exp(-\mu_1t)+q\mu_2\exp(-\mu_2t)\qquad(t\geqq 0)$$

という形で与えられる．ここで $\mu_1\to 0$ としてみると，$\delta(t)$ で Dirac の delta 函数を表わすことに

して,

$$p\delta(t-0^{+})+q^{2}\mu e^{-q\mu t} \qquad (t\geqq 0)$$

となるが,これは m 個同時に生起する確率が幾何分布で与えられるようなものなので gemetric exponential distribution とよんでいる.また生起時間間隔の分布としてこの形をとるとき,その再帰事象の process を stuttering-Poisson process とよぶのである.

第3節は state distribution で,まず Laplace 変換を用いてこれを求める基本的な方法に触れた後,実はこの分布は考えている時間間隔をどうとるか(つまり前にある事象が起ったときから測ることにするか,それとも原点をランダムに選ぶか)によって異ってくるので, measurement-dependent event density distribution $a(t|\tau)$ なるものを導入する.ここで $a(t|\tau)dt$ は原点から $-\tau$ の時点でその事象が起ったことを知ったときの,$(t, t+dt)$ の間ではじめてその事象が起る条件付確率を表わす.この $a(t|\tau)$ の性質,特に two important cases と銘打って,$\tau\to 0$ と $\tau\to\infty$ の場合のそれについて議論する.これらは上に注意した2つの場合に対応する.

第4節は limiting forms of the state average で,Tauber 型定理をあいまいな表現で述べ,第5節 Poisson process,第6節 Erlang process,第7節 stuttering-Poisson Process の諸節では,以上の準備に基いて,それらの process の state probability 及びその平均値,分散,変動係数,$t\to\infty$ や $t\to 0$ のときの近似式などを導いている.

第9節の asymptotic distributions of state probabilities では $t\to\infty$ のとき正規分布に近づくことが知られているので,その近似の補正項を与えている.最後の節 numerical example ではこの近似を用いたときの数値例について触れている.

(森村英典)

ACZEL, M. A.; THE EFFECT OF INTRODUCING PRIORITIES, *Oper. Res. Vol. 8, No. 5, 730—733, 1960.*

Poisson 到着で指数分布サービス,窓口1個の場合の queue において,客に k 種類あって,それぞれの mean arrival rate λ_i, mean service time を m_i とするとき,(head-of-the-line) priority を導入すると,平均行列の長さなどにどんな影響があるかという問題を論じた簡単なノートである.

基本的には Cobham の結果に従って算出される平均行列の長さと,priority のない場合のそれとの差を評価する簡単な lemma に基いて,たとえば,$m_i<m_j$ ならば i を優先するというような(つまり長くかかる者は後廻しにする)policy を用いれば,行列の長さはたしかに減少することを示している.(常識的にこの定性的性質は明らかであろう).更にある時刻に行列中にいる人を全部サービスするために要すべき時間の平均値(mean work content と呼んでいる)は,first-come first-service,つまり priority のないときのそれと一致することを計算で示しているが,この量はサービス側の働く量を示すものであるから,priority のあるなしによって影響を受けないことは当然であろう.(森村英典)

BENEŠ, V. E.; COMBINATORY METHODS AND STOCHASTIC KOLMOGOROV EQUATIONS IN THE THEORY OF QUEUES WITH ONE SERVER, *Trans. Amer Math. Soc., Vol. 94, No. 2, 282—294, 1960.*

時間的には,前号で紹介した *Bell Syst. Tech. Journ.* に出した同著者の論文よりは前に書かれたものであり,内容はそこで physical meaning を重視しながら書いたことのうち一番重要な部分を,数学的に厳密に議論することである.前の紹介の際にも強調したことだが,到着時間間隔が必ずしも独立でないような場合にも使える理論を作ろうというごく一般的な態度が基本になっている.そして数学的なことを除けば前の論文に含まれてしまうので,ここではこれ以上立入った紹介はしない.

(森村英典)

《海外交換雑誌》

1) REVUE FRANÇAISE DE RECHERCHE OPERATIONNELLE 4 ANNEE No, 15 & 16
2) ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ИЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТОМ V ВЫПУСК 1~4
3) PRINCETON ENGINEER
   1959 10. 11. 12 月号
   1960 1. 2. 3. 4. 5 月号
4) NAVAL RESEARCH LOGISTICS QUARTERLY
   Vol. 6, No. 1~4　Vol. 7, No. 1