ある逐次計画の dynamic programming

坂　口　　実*

§0. はしがき

科学者がある現象を研究するのに，最初はそれについて全く何もわからない．そこで彼はまず予備的な実験をやる．data を集めるにつれて，現象の底に横たわる理論らしきものがだんだんはっきりしてくる．理論が明確になってくれば，彼はもっと効果的な実験を企てることができる．こうして遂に彼の中に確信が生じて，ある結論を述べるに至る．

この場合，彼は(その現象についての)情報(information)を引き出すために実験を計画するのである．そしてこの情報にもとづいて，さらによい実験を計画する．こうして遂に充分な量の情報が得られて，これ以上の実験はその提供する情報が，実験コストに引き合わなくなったときに実験をうちきるのである．

このような手順は最もありふれた逐次実験計画といってよい．しかし，この方面の統計学的理論は今までに殆んど何もなかった．

その少い例の一つに two-armed bandit problem というのがある．それは

> 2台のパチンコ機械がある．当りの確率をそれぞれ p_1, p_2 として，これらの値は全く未知とする．全部で n 回パチンコをやるのに，当りの回数の期待値を最大にするには，どういう計画(design)に従って次々にパチンコ機械をえらべばよいか？

この問題に対する最適計画はまだ求められていない．

§1. *Optimum stopping rule*

$\{x_n\}$ を同一分布(分布函数 $F(x)$)に従う独立確率変数の列とする．$x_n(n=1, 2, \cdots)$ を逐次に observe し，いつでもやめることができる．もし x_n でやめたら return $\phi_n(x_1, \cdots, x_n)$ をうけとる．

問題：return の期待値を最大にするような stopping rule を求める．

ここではまず逐次抜取が N 回まで許され，かつ

$$\phi_n(x_1, \cdots, x_n)=x_n-cn$$

の場合を考える [1] [2 : 128].

$f_n(x)$……あと n 段($n=0,1,\cdots,N-1$)残っていて，直前段の値が x のとき，最適政策を用いて望める利得の期待値

とおくと

---

* 電気通信大学数学教室 日本 OR 学会第8回研究発表会にて講演．昭和 35 年 9 月 6 日受理

(1) $$f_{n+1}(x)=\max\begin{bmatrix} S:\ x-(N-n-1)c \\ C:\ \int f_n(y)dF(y) \end{bmatrix}, \qquad (n=0,1,\cdots,N-2)$$

$$f_0(x)=x-cN$$

を得る.

これを解くと

(2) $$f_n(x)=\max(x,\mu_n-c)-(N-n)c, \qquad (n=0,\cdots,N-1)$$

ただし

(3) $$\mu_n=\int\max(x,\ \mu_{n-1}-c)dF(x), \qquad (n=1,\cdots,N;\ \mu_0=-\infty)$$

で，この積分は $dF(x)$ の一次の積率が有限ならば存在する.

だから，あと n 段($n=0,\ 1,\cdots,N-1$)残っていて，直前段の観測値が x のときの optimal choice は次の rule できまる：

(4) $$\begin{cases} \text{もし}\quad x>\mu_n-c \quad \text{ならば, stop sampling;} \\ \text{もし}\quad x\leqq\mu_n-c \quad \text{ならば, continue sampling,} \end{cases}$$

$n=N$ に対しては比較すべき直前回の値がないから別に考えねばならぬ. game に全然加入しなければ, return はもちろん 0, もし game に加入すれば, expected return は(2)(3)より

$$\int f_{N-1}(y)dF(y)=\int\{\max(y,\ \mu_{N-1}-c)-c\}dF(y)=\mu_N-c$$

となる. 故にこのときの optimal choice は次の rule：

(5) $$\begin{cases} \text{もし}\quad 0>\mu_N-c \quad \text{ならば, game に加入するな;} \\ \text{もし}\quad 0\leqq\mu_N-c \quad \text{ならば, 加入して first observation をとれ} \end{cases}$$

となる.

以上をまとめて

[定理1] われわれの問題に対する optimum stopping rule は(5), および(4)で規定される. この optimal rule をつかって得られる expected return は $\max(\mu_N-c,\ 0)$ である.

つぎに非負・非増加函数

(6) $$A(x)\equiv\int\max(y-x,\ 0)\,dF(y)=\int_x^\infty(y-x)dF(y)$$

を導入する. すると(3)は

(7) $$\mu_n=A(\mu_{n-1}-c)+\mu_{n-1}-c$$

とかける.

(系 1.1) もしも $c=0$ ならば, optimal stopping rule を規定する critical numbers $\mu_1,\cdots,\mu_N$ は

$$\mu_n = A(\mu_{n-1}) + \mu_{n-1} \qquad (n=2, \cdots, N) \tag{8}$$

$$\mu_1 = \int x dF(x)$$

で与えられる．

$$\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \cdots \leqq \mu_N$$

である．

(系 1.2) $c>0$ とする．さらに，母集団から無限回の逐次抽出が許されるものと仮定する．すると optimal stopping rule は

$$\begin{cases} \text{もしも} \quad 0>\alpha(c) \quad \text{ならば，game に加入するな；} \\ \text{もしも} \quad 0\leqq\alpha(c) \quad \text{ならば，game に加入して first observation をとれ} \end{cases}$$

つぎに，

逐次に抽出をつづけて始めて $x_m>\alpha(c)$ となったら，そこで抽出をやめよ．

となる．ここに $\alpha(c)$ は方程式

$$A(\alpha) \equiv \int_{\alpha}^{\infty} (x-\alpha) dF(x) = c \tag{9}$$

の根である．この optimal rule をつかうときの expected return は $\max(\alpha(c), 0)$ に等しい．

(証) (3)により，$\{\mu_n\}$ が収束して，その極限が $\alpha(c)+c$ になることを示せばよし．

$$B(x) = A(x) + x,$$

$$\nu_n = \mu_n - c$$

とおくと(7)は

$$\nu_n = B(\nu_{n-1}) - c$$

となる．これから，函数 $A(x)$ が $x=\alpha(c)$ の近所で strictly decreasing ならば $\{\nu_n\}$ は収束してその極限が $\alpha(c)$ なことが示される．もしも $c>0$ で，$A(x)$ がすべての x に対し strictly decreasing ならば，方程式(9)の根 $\alpha(c)$ は一意に存在する．

(例1) 正規母集団の場合．

$$dF(x) = \phi(x)dx, \qquad \phi(x) \equiv (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp(-x^2/2)$$

であるから

$$A(x) = A^*(x) \equiv \int_x^{\infty} (y-x)\phi(y)dy = \phi(x) - x\Phi(x)$$

となる．ただし

$$\Phi(x) \equiv \int_x^{\infty} \phi(y) dy.$$

もしも $c=0$ ならば(8)は単調増大数列

$$\mu_n = \phi(\mu_{n-1}) + \mu_{n-1}(1-\Phi(\mu_{n-1})) \tag{8'}$$

となる．例えば

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μ_n	0.399	0.629	0.790	0.912	1.011	1.090	1.160	1.223	1.276

である.

平均値 θ, 分散 σ^2 の正規母集団の場合には境界数は

$$\nu_n=\sigma\mu_n+\theta$$

で与えられる. ここに μ_n は(8′)で定義される数列である.

函数 $A^*(x)$ の数値を $-2.00<x<3.00$ に対して数表 I に示してある.

(例 2) 指数母集団の場合.

$$dF(x)=\beta^{-1}e^{-\frac{x}{\beta}}dx \quad (x\geqq 0)$$

であるから

$$A(x)=\int_x^\infty (y-x)\beta^{-1}e^{-\frac{y}{\beta}}dy=\beta e^{-\frac{x}{\beta}}.$$

$c=0$ ならば(8)は単調増大数列

$$\mu_n=\beta\exp(-\mu_{n-1}/\beta)+\mu_{n-1} \qquad (n=2, 3, \cdots; \mu_1=\beta)$$

となる. 例えば

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μ_n/β	1.368	1.623	1.821	1.983	2.121	2.241	2.347	2.442	2.529

もしも $0<c<\beta$ ならば方程式(9)は唯一つの正根

$$\alpha(c)=\beta\log(\beta/c)$$

をもつ.

(例 3) Poisson 母集団の場合.

$$dF(x)=e^{-\theta}\theta^x/(x!)dm \qquad (m \text{ は counting measure})$$

であるから

$$A(x)=\int_x^\infty (y-x)e^{-\theta}\theta^y/(y!)dm(y)$$
$$=\theta P_\theta([x])-xP_\theta([x]+1),$$

ただし

$$P_\theta(k)\equiv\sum_{x=k}^\infty e^{-\theta}\theta^x/(x!).$$

もしも $c=0$ ならば(8)から

$$\mu_n=\theta P_\theta([\mu_{n-1}])+\mu_{n-1}\{1-P_\theta([\mu_{n-1}]+1)\}, \qquad (n=2,3,\cdots; \mu_1=\theta)$$

例えば

$$\mu_2=\theta P_\theta([\theta])+\theta\{1-P_\theta([\theta]+1)\}$$
$$=\theta(e^{-\theta}\theta^{[\theta]}/[\theta]!+1)$$

である. 函数 $A(x)=\theta P_\theta([x])-xP_\theta([x]+1)$ の値を $\theta=1(1)10$ に対して数表IIに示してある.

§2. 未知母平均をもつ正規母集団の場合

前節の内容はつぎの2方向に拡張ができる．まず$\{x_n\}$が未知の分布にしたがう場合，例えば母集団分布が N$(\theta, 1)$ で平均値 θ の値がわからない場合である．このときは，われわれは逐次に抽出するごとに未知の θ についての情報を，ひき出し，集め，これを有効に利用しなければならない．

もう一つの拡張の方向は，2母集団の場合へである．既知の分布をもつ二つの母集団があって，それぞれから最大限 N_1, N_2 回の逐次抽出が許されるとすると，expected return を最大にするには，どのような計画(design)にしたがって，つぎつぎに母集団をえらんでそれから抽出してゆけばよいか？　この問題については§3で述べる．

この節では第一の拡張の方向についてやる．母集団分布が N$(\theta, 1)$ で，平均値 θ の値がわからないとする．しかし unknown true θ についての a priori 分布 $\xi(\theta)$ が想定されるものと仮定する．そして，もう一つ根本的仮定があって，それは m 個の逐次観測値 $x_1, \cdots, x_m$ が得られた後は，θ についての新しい a priori 分布は，a posteriori な確率

$$\xi_{x_1,\cdots,x_m}(\theta)=\frac{\xi(\theta)\phi(x_1-\theta)\cdots\phi(x_m-\theta)}{\int\xi(\theta)\phi(x_1-\theta)\cdots\phi(x_m-\theta)d\theta} \tag{10}$$

ただし

$$\phi(x)\equiv(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp(-x^2/2)$$

で与られるものとする．

$f_n(x_1, \cdots, x_{N-n})$……あと n 段残っていて，今までの観測値が $x_1, \cdots, x_{N-n}$ であったときに，以後 optimal rule をつかって得られる expected return

$(n=0, 1, \cdots, N-1)$とおくと，漸化関係式

$$f_{n+1}(x_1, \cdots, x_{N-n-1})=\max\begin{bmatrix} S:\ x_{N-n-1}-(N-n-1)c \\ C:\ \iint f_n(x_1, \cdots, x_{N-n-1}, y)\xi_{x_1,\cdots,x_{N-n-1}}(\theta)\phi(y-\theta)d\theta dy\end{bmatrix}$$

$$(n=0, 1, \cdots, N-2),$$

$$f_0(x_1, \cdots, x_N)=x_N-cN.$$

が得られる．

これを解くと［定理1］に似た［定理2］(省略)が得られる．

面白いのは，a priori 分布が正規分布：

$$\xi(\theta)=\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{\theta-\theta_0}{\sigma}\right) \tag{11}$$

であって $\sigma\to\infty$ にやった場合である．

(11)を(10)に入れると

$$\xi_{x_1,\cdots,x_m}(\theta)=(m+\sigma^{-2})^{\frac{1}{2}}\phi\left((m+\sigma^{-2})^{\frac{1}{2}}\left(\theta-\frac{\theta_0\sigma^{-2}+m\bar{x}_m}{\sigma^{-2}+m}\right)\right)$$

ただし

$$\bar{x}_m\equiv(x_1+\cdots+x_m)/m$$

を得る．これは $\sigma\to\infty$ にやると θ_0 に無関係に $\sqrt{m}\,\phi(\sqrt{m}\,(\theta-\bar{x}_m))$ に収束する．

ここで新しい函数

$$A^*(x)\equiv\int\max(y-x,\ 0)\phi(y)\,dy$$

$$K(x)\equiv A^*(-x)-x$$

を導入しよう．$A^*(x)$ は (6) 式の $A(x)$ で $dF(y)=\phi(y)dy$ とおいたものである．$A^*(x)$ および $K(x)$ は何れも $-\infty$ から 0 への単調減少函数である．

(**系 2.1**) game に必らず加入しなければならないとする．a priori 分布が正規分布でその分散を $\to\infty$ にした極限の場合を考えると，optimum stopping rule は

$$\begin{cases}\text{もしも}\quad x_m>\mu_{N-m}(x_1,\cdots,x_m)-c\quad\text{ならば, stop sampling;}\\ \text{そうでなければ, continue sampling}\end{cases}$$

$(m=1,\cdots,N-1)$ できめられる．ここに函数 $\mu_1,\cdots,\mu_N$ は

$$\mu_n(x_1,\cdots,x_{N-n})=(x_1+\cdots+x_{N-n})/(N-n)+K_{n,N}(c),\qquad (n=1,\cdots,N-1)$$

$$K_{n,N}(c)=\sqrt{\frac{N-n}{N-n+1}}A^*\left(-\sqrt{\frac{N-n+1}{N-n}}(c-K_{n-1,N}(c))\right)-(c-K_{n-1,N}(c)),$$

$$(n=2,\cdots,N-1;\ K_{1,N}(c)\equiv0).$$

optimal rule をつかうときの expected return は

$$\theta-c+\max(K_{N-1,N}(c)-c,\ 0)$$

に等しい．ここに θ は正規母集団の未知平均値である．

もしも $c=0$ ならば単調増大列

$$K_{n,N}(0)=\sqrt{\frac{N-n}{N-n+1}}A^*\left(\sqrt{\frac{N-n+1}{N-n}}K_{n-1,N}(0))\right)+K_{n-1,N}(0)$$

を得る．例えば $N=10$ ならば

n	2	3	4	5	6	7	8	9
$K_{n,10}(0)$	0.376	0.591	0.737	0.847	0.930	0.993	1.036	1.058

である．

§3. 2 母 集 団 の 場 合

$\{x_n(y_n)\}$ を同一分布 (分布函数 $F(x)$ $(G(y))$) に従う独立確率変数の列とする．

$\{x_n\}$, $\{y_n\}$ は互いに独立とする．x_n または $y_n(n=1,\ 2,\cdots)$ を逐次に観測し，いつでもやめることができる．最大限 $\{x_n\}$ からは N_1 回，$\{y_n\}$ からは N_2 回の抜取が許される．もし $x_n(y_n)$

でやめたら，それまでに $\{x_n\}$ から n_1, $\{y_n\}$ から n_2 回とられていれば

$$x_n-(c_1n_1+c_2n_2) \qquad (y_n-(c_1n_1+c_2n_2))$$

の return をうける．

問題；expected return を最大にする stopping policy を求めよ．

例によって

$f_{n_1,n_2}(x)$……あと Π_1 から n_1 回，Π_2 から n_2 回残っていて，直前回の値が x であるときに，以後最適政策を用いて望める expected return

とすると

$$f_{n_1+1,\,n_2+1}(x)=\max\begin{bmatrix} S: & x-(N_1-n_1-1)c_1-(N_2-n_2-1)c_2 \\ C_1: & \int f_{n_1,\,n_2+1}(u)dF(u) \\ C_2: & \int f_{n_1+1,\,n_2}(v)dG(v)\end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix} n_1=0,\ 1,\cdots,N_1-1\,;\ n_2=0,\ 1,\cdots,N_2-1 \\ \text{ただし}\quad n_1n_2\neq(N_1-1)(N_2-1)\end{pmatrix}$$

$$f_{n_1+1,\,0}(x)=\max\begin{bmatrix} S: & x-(N-n_1-1)c_1-N_2c_2 \\ C_1: & \int f_{n_1,\,0}(u)dF(u)\end{bmatrix}$$

$$f_{0,\,n_2+1}(x)=\max\begin{bmatrix} S: & x-N_1c_1-(N_2-n_2-1)c_2 \\ C_2: & \int f_{0,\,n_2}(v)dG(v)\end{bmatrix}$$

$$(n_1=0,\ 1,\cdots,N_1-1\,;\ n_2=0,\ 1,\cdots,N_2-1)$$

$$f_{0,\,0}(x)=x-c_1N_1-c_2N_2$$

が成立する．第2および第3の漸化式からそれぞれ

$$\begin{cases} f_{n,\,0}(x)=\max(x,\mu_n^{(1)}-c_1)-(N_1-n)c_1-N_2c_2 & (n=0,\ 1,\cdots,N_1) \\ f_{0,\,n}(x)=\max(x,\mu_n^{(2)}-c_2)-N_1c_1-(N_2-n)c_2 & (n=0,\ 1,\cdots,N_2)\end{cases} \tag{13}$$

ただし

$$\mu_n^{(1)}=\int\max(x,\ \mu_{n-1}^{(1)}-c_1)dF(x) \qquad (n=1,\cdots,N_1\,;\ \mu_0^{(1)}=-\infty)$$

$$\mu_n^{(2)}=\int\max(y,\ \mu_{n-1}^{(2)}-c_2)dG(y) \qquad (n=1,\cdots,N_2\,;\ \mu_0^{(2)}=-\infty)$$

である．

これらを第1の漸化式に入れると $f_{n_1,n_2}(x)$ が $n_1n_2=N_1N_2$ に対してを除きすべての $n_1=0,\cdots,N_1$；$n_2=0,\ 1,\cdots,N_2$ に対して求まる．

［定理3］ 2母集団の場合，optimum stopping rule によって得られる expected return は

$$\max\left(0,\ \int f_{N_1-1,N_2}(u)dF(u),\ \int f_{N_1,N_2-1}(v)dG(v)\right)$$

に等しい．ここに，$f_{N_1-1,N_2}(x)$ および $f_{N_1,N_2-1}(x)$ は (12), (13) により定まる函数である．

証明は易しいから省略する．

具体例として

$$N_1=N_2=2, \qquad c_1=c_2=0$$

$$dF(x)=\frac{1}{\sigma_1}\phi\left(\frac{x-\theta_1}{\sigma_1}\right), \qquad dG(y)=\frac{1}{\sigma_2}\phi\left(\frac{y-\theta_2}{\sigma_2}\right)$$

の場合の最適計画を求めてみよう．まず

$$\begin{cases}\mu_1^{(i)}=\theta_i \\ \mu_2^{(i)}=\theta_i+\sigma_i\phi(0) \qquad (i=1,\ 2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}f_{10}(x)=\max(x,\ \theta_1) \\ f_{20}(x)=\max(x,\ \theta_1+\sigma_1\phi(0)) \\ f_{01}(x)=\max(x,\ \theta_2) \\ f_{02}(x)=\max(x,\ \theta_2+\sigma_2\phi(0)).\end{cases}$$

これらを (12) に入れると

$$f_{11}(x)=\max(x,\ \omega_{11})$$

$$f_{12}(x)=\max(x,\ \omega_{12})$$

$$f_{21}(x)=\max(x,\ \omega_{21}),$$

ただし

$$\omega_{11}\equiv\max\begin{bmatrix}C_1:\ \theta_2+\sigma_1A^*((\theta_2-\theta_1)/\sigma_1) \\ C_2:\ \theta_1+\sigma_2A^*((\theta_1-\theta_2)/\sigma_2)\end{bmatrix},$$

$$\omega_{12}\equiv\max\begin{bmatrix}C_1:\ \theta_2+\sigma_2\phi(0)+\sigma_1A^*((\theta_2+\sigma_2\phi(0)-\theta_1)/\sigma_1) \\ C_2:\ \omega_{11}+\sigma_2A^*((\omega_{11}-\theta_2)/\sigma_2)\end{bmatrix},$$

$$\omega_{21}\equiv\max\begin{bmatrix}C_1:\ \theta_1+\sigma_1\phi(0)+\sigma_2A^*((\theta_1+\sigma_1\phi(0)-\theta_2)/\sigma_2) \\ C_2:\ \omega_{11}+\sigma_1A^*((\omega_{11}-\theta_1)/\sigma_1)\end{bmatrix}.$$

最後に［定理 3］から expected return が

$$f_{22}=\max(0,\ \omega_{22}),$$

ただし

$$\omega_{22}\equiv\max\begin{bmatrix}C_1:\ \omega_{12}+\sigma_1A^*((\omega_{12}-\theta_1)/\sigma_1) \\ C_2:\ \omega_{21}+\sigma_2A^*((\omega_{21}-\theta_2)/\sigma_2)\end{bmatrix}$$

となる．ω_{ij} の定義式中の記号 C_i は 'continue sampling from Π_i' という choice に対応する．もはや求める最適計画は自明であろう．

この例をもっと vivid にするために数値例で示そう．つぎの 4 つの場合

	$F=\mathbf{N}(\theta_1, \sigma_1^2)$	$G=\mathbf{N}(\theta_2, \sigma_2^2)$
(a)	(0, 1)	(0, 4)
(b)	(0, 1)	(1, 1)
(c)	(0, 1)	(1, 4)
(d)	(0, 4)	(1, 1)

の最適計画を計算すると線図1のようになる.

$f_{N_i}^{(i)}(i=1, 2)$ を，唯一つの母集団 Π_i から最大 N_i 回の抜取が許されるときの最適計画による expected return とすると

	$f_{2,2}$	$f_4^{(1)}$	$f_4^{(2)}$	$f_2^{(1)}$	$f_2^{(2)}$
(a)	1.405	0.790	1.580	0.399	0.798
(b)	1.488	0.790	1.790	0.399	1.399
(c)	2.017	0.790	2.580	0.399	1.798
(d)	1.907	1.580	1.790	0.798	1.399

になる.

参考文献

[1] M. Sakaguchi, "Dynamic programming of some sequential sampling design," to appear in *Journ. Math. Analysis and Appl.* 1. (1960).

[2] M. Sasieni, A. Yaspan and L. Friedman, *Operations Research, Methods and Problems*, John Wiley & Sons, 1959.

TABLE 1

The Normal Distribution

$$A^*(x)=\int_x^\infty (y-x)\phi(y)\,dy=\phi(x)-x\Phi(x)$$

where $\phi(x)\equiv(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ and $\Phi(x)\equiv\int_x^\infty \phi(y)\,dy$

	0.08	0.06	0.04	0.02	0.00
−1.9	1.9890	1.9694	1.9500	1.9305	1.8910
8	1.8917	1.8723	1.8529	1.8336	1.8153
7	1.7950	1.7758	1.7566	1.7374	1.7183
6	1.6992	1.6805	1.6611	1.6421	1.6232
5	1.6044	1.5855	1.5667	1.5480	1.5293
−1.4	1.5107	1.4921	1.4736	1.4551	1.4367
3	1.4183	1.4000	1.3818	1.3636	1.3455
2	1.3275	1.3095	1.2917	1.2738	1.2561
1	1.2387	1.2209	1.2034	1.1859	1.1686
0	1.1514	1.1342	1.1171	1.1002	1.0833
−0.9	1.0665	1.0499	1.0333	1.0168	1.0004
8	0.9842	0.9680	0.9520	0.9360	0.9202
7	0.9045	0.8889	0.8735	0.8581	0.8429
6	0.8278	0.8128	0.7980	0.7833	0.7687
5	0.7542	0.7399	0.7257	0.7117	0.6978
−0.4	0.6840	0.6704	0.6549	0.6436	0.6304
3	0.6174	0.6045	0.5918	0.5792	0.5668
2	0.5545	0.5424	0.5304	0.5186	0.5069
1	0.4945	0.4840	0.4728	0.4618	0.4509
0	0.4402	0.4297	0.4193	0.4090	0.3989

	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08
0.0	.3989	.3892	.3793	.3697	.3602
0.1	.3509	.3418	.3328	.3240	.3154
0.2	.3069	.2986	.2904	.2824	.2745
0.3	.2668	.2592	.2518	.2445	.2374
0.4	.2304	.2236	.2169	.2104	.2040
0.5	.1978	.1917	.1851	.1799	.1770
0.6	.1687	.1633	.1580	.1528	.1478
0.7	.1429	.1381	.1335	.1289	.1245
0.8	.1202	.1160	.1120	.1080	.1042
0.9	.1004	.0968	.0933	.0899	.0865
1.0	.0833	.0802	.0772	.0742	.0714
1.1	.0686	.0660	.0634	.0608	.0584
1.2	.0561	.0538	.0517	.0495	.0475
1.3	.0455	.0436	.0418	.0400	.0383
1.4	.0368	.0350	.0336	.0321	.0308
1.5	.0293	.0280	.0267	.0255	.0244
1.6	.0232	.0221	.0213	.0202	.0192
1.7	.0183	.0174	.0166	.0158	.0150
1.8	.0143	.0136	.0130	·0123	.0116
1.9	.0111	.0105	.0100	.0095	.0090
2.0	.0085	.0081	.0076	.0072	.0068
2.1	.0065	.0061	.0058	.0055	.0052
2.2	.0049	.0046	.0044	.0041	.0039
2.3	.0037	.0035	.0033	.0031	.0029
2.4	.0027	.0026	.0024	.0023	.0021
2.5	.0020	.0019	.0018	.0017	.0016
2.6	.0014	.0014	.0013	.0012	.0011
2.7	.0011	.0010	.0009	.0009	.0008
2.8	.0008	.0007	.0007	.0006	.0006
2.9	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004

TABLE 2

The Poisson Disribution

$$A(x)=\theta P_\theta([x])-xP_\theta([x]+1),\quad \text{where}\quad P_\theta(k)\equiv\sum_{x=k}^{\infty}e^{-\theta}\,\theta^x/(x!)$$

x \ θ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.1	0.9368	1.9135	2.9050	3.9017	4.9067	5.9006	6.9001	7.9001	8.9001	9.9001
0.2	0.8736	1.8271	2.8096	3.8064	4.8014	5.8005	6.8002	7.8001	8.8000	9.8000
0.3	0.8104	1.7406	2.7144	3.7055	4.7021	5.7007	6.7003	7.7001	8.7000	9.7000
0.4	0·7472	1.6542	2.6200	3.6073	4.6027	5.6010	6.6004	7.6002	8.6000	9.6000
0.5	0.6839	1.5677	2.5249	3.5092	4.5034	5.5013	6.5005	7.5002	8.5001	9.5000
0.6	0.6280	1.4812	2.4929	3.4110	4.4040	5.4015	6.4005	7.4002	8.4001	9.4000
0.7	0.5575	1.3947	2.3349	3.3128	4.3047	5.3018	6.3006	7.3002	8.3001	9.3000
0.8	0.4943	1.3083	2.2388	3.2147	4.2054	5.2020	6.2007	7.2003	8.2001	9.2000
0.9	0.4311	1.2380	2.1448	3.1165	4.1061	5.1022	6.1008	7.1003	8.1001	9.1000
1.0	0.3678	1.1989	2.0497	3.0182	4.0085	5.0025	6.0009	7.0003	8.0002	9.0000
1.2	0.3150	1.0165	1.8896	2.8366	3.8166	4.8060	5.8024	6.8009	7.8004	8.8001
1.4	0.2622	0.9135	1.7294	2.6549	3.6247	4.6094	5.6038	6.6015	7.6006	8.6002
1.6	0.2093	0.7789	1.5692	2.4733	3.4328	4.4129	5.4053	6.4021	7.4009	8.4003
1.8	0.1565	0.6602	1.4091	2.2916	3.2409	4.2164	5.2068	6.2027	7.2011	8.2004
2.0	0.1036	0.5413	1.2490	2.1099	3.0472	4.0198	5.0082	6.0033	7.0014	8.0005
3	0.0234	0.2180	0.6721	1.3480	2.1718	3.0818	4.0794	4.9631	6.0076	7.0033
4	0.0044	0.0751	0.2194	0.7815	1.4368	2.1330	3.1196	4.0595	5.0288	6.0136
5	0.0007	0.0225	0.1346	0.4103	0.8774	1.5125	2.2926	3.1592	4.0838	5.0430
6	0.0000	0.0059	0.0507	0.1955	0.4933	0.9837	1.5933	2.3503	3.1995	4.1100
7		0.0014	0.0182	0.0848	0.2555	0.5701	1.0430	1.6638	2.4063	3.2402
8		0.0003	0.0053	0.0336	0.1221	0.3140	0.6418	1.1167	1.7301	2.4604
9			0.0015	0.0123	0.0540	0.1623	0.3709	0.7092	1.1858	1.7932
10			0.0002	0.0041	0.0222	0.0773	0.2013	0.4259	0.7732	1.2511
11			0.0001	0.0013	0.0085	0.0347	0.1028	0.2418	0.4792	0.8342
12				0.0004	0.0030	0.0146	0.0495	0.1298	0.2822	0.5310
13				0.0001	0.0010	0.0058	0.0225	0.0660	0.1580	1.3224
14					0.0003	0.0022	0.0096	0.0319	0.0841	0.1871
15					0.0001	0.0008	0.0039	0.0146	0.0427	0.1035
16						0.0003	0.0015	0.0064	0.0206	0.0547
17						0.0001	0.0006	0.0020	0.0095	0.0277
18							0.0002	0.0010	0.0042	0.0134
19							1.0001	0.0004	0.0018	0.0062
20									0.0007	0.0028

DIAGRAM 1

Case	1st Move	2nd Move	3rd Move	4th Move	
(a)	sample Π_2 →	if $y_1>1.013$ stop otherwise[1] Π_1 →	if $x_1>0.798$ stop otherwise Π_2 →	if $y_2>0$ stop otherwise Π_1 →	stop with x_2 Expected Payoff $=1.405$
(b)	sample Π_2 →	if $y_1>1.168$ stop otherwise Π_1 →	if $x_1>1.083$ stop if otherwise sample Π_1 → or sample Π_2 →	if $x_2>1$ stop otherwise Π_2 → if $y_2>0$ stop otherwise Π_1 →	stop with y_2 stop with x_2 Expected Payoff $=1.488$
(c)	sample Π_1 →	if $x_1>2.009$ stop otherwise Π_2 →	if $y_1>1.395$ stop otherwise Π_2 →	if $y_2>0$ stop otherwise Π_1 →	stop with x_2 Expected Payoff $=2.017$
(d)	sample Π_1 →	if $x_1>1.685$ stop otherwise Π_1 →	if $x_2>1.399$ stop otherwise Π_2 →	if $y_1>1$ stop otherwise Π_2 →	stop with y_2 Expected Payoff $=1.907$

[註] (1) If otherwise sample Π_1 の略.