ダイナミック・プログラミングとある制御過程について

小 田 中 敏 男*

1. は し が き

前論文[1)]に於て制御過程を論じたが，本論文に於ては確率規準による在庫管理をダイナミック・プログラミングの立場より考察するものである．従来在庫量管理には費用最小とか，利益最大等の各規準が用いられているが，国沢先生の著書[2)]にはある確率規準(probability criterion)のもとに於ける倉庫容量決定と在庫量管理を論ぜられている．しかしそこでは生産量を巨視的に確率変数として取扱ってあるが，むしろ OR 的には政策として決定されるべき量とも考えられる．

本論文に於ては生産量(input)を政策と考えて，その政策の決定方法を確率規準を用いて考察したものである．先ず文献(2)の方法を簡単に説明し，次にダイナミック・プログラミングの立場よりの定式化と計算法を論じ，その数値計算例を附した．

2. ある在庫量管理の問題

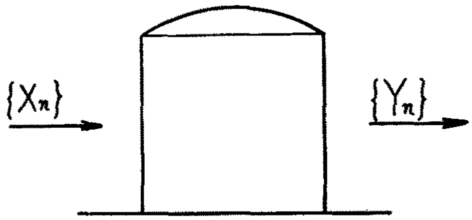
文献(2)の概要を記すると次のようになる．

いまある工場で毎日平均して m_1 トン生産して，その変動状態が標準偏差 σ_1 トンによって規定されるとする．また輸送量は毎日平均すれば m_2 トンであるが，その変動が標準偏差 σ_2 トンにしたがっているとしよう．在庫を管理していく場合，次の二種類の危険が存在している．即ち

（1） 在庫が増大して倉庫容量を越える場合，

（2） 在庫がすくなくなって，需要を満たさぬ場合，

である．



第 1 図

さてここで毎日平均生産量 m_1 トンと毎日平均輸送量 m_2 トンとは等しいと仮定する．即ち問題はインプットとアウトプットの変動状態を吸収し，且つ在庫払底を防ぐための容量と管理方式を導出する事である．いま在庫容量を A トンとし，予備在庫を B トン，初期在庫を C トンとする．n 日間を1週期とし毎日毎日の生産量と輸送量を順次に

$$X_1,\ X_2,\cdots\cdots\cdots\cdots X_n,$$

* 東京都立工業短期大学．昭和 34 年 11 月，日本 OR 学会第6回研究発表会にて発表．
昭和 35 年 7 月 6 日受理．

$$Y_1,\ Y_2, \cdots\cdots\cdots Y_n,$$

とする.

今

$$\left.\begin{array}{l} A-C>S_1>B-C \\ A-C>S_2>B-C \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A-C>S_n>B-C \end{array}\right. \tag{1}$$

が同時に成立すれば, n 日間を通して(1), (2)の危険をおかさず運営出来るわけである. この事の出来る確率は,

$$\mathrm{Prob}\{(\max_{0\le t\le T} x(t)<\alpha)_{or}(\min_{0\le t\le T} x(t)>p)\,|t(0)=C\} \tag{2}$$

に等しい事が証明され, $\beta=0$ の数表とグラフが求められている[2].

ここに, $S_1=X_1-Y_1$, $S_2=X_1-Y_1+X_2-Y_2$, $\cdots\cdots\cdots$,

$$S_n=X_1-Y_1+X_2-Y_2+\cdots+X_n-Y_n,\ \ \alpha=\frac{A}{\sqrt{n}},\qquad \beta=\frac{B}{\sqrt{n}}$$

で, $x(t)$はブラウン運動である.

3. ダイナミック・プログラミングよりの考察

既述のように上記理論に於てはインプットを確率変数と考えたが, しかし一般の管理過程に於ては生産量(input)は人為的に決定する所謂制御函数(control function)として考えねばならぬ. 即ち, 今在庫量を $z(t)$ とすれば, われわれの考えている系は連続的に

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dz(t)}{dt}=x(t)-y(t), \\ z(0)=C. \end{array}\right. \tag{3}$$

と表現される. 即ちわれわれは系に於ける各変数を

$x(t)$; 生産量 (制御函数).

$y(t)$; 需要量 (確率変数).

$z(t)$; 在庫量 (状態変数).

と区別し, 取扱わなければならぬ事を強調するものである. 但し生産量は上限 A を越えぬものとし, 期首に全部入荷すると仮定した.

今われわれの問題は前述の場合と同様に確率規準

$$J=\mathrm{Prob}\{(\max_{0\le t\le T} z(t)>A)_{or}(\min_{0\le t\le T} z(t)<B)|z(0)=C\},\quad A,B>0. \tag{4}$$

を最小にせんとする $x(t)$ を決定することである.

離散的と見做すと,

$$\max_{0\le t\le T} z(t)=\max(Z_0,\ Z_1,\cdots\cdots\cdots,Z_{N-1})$$

$$\min_{0\le t\le T} z(t)=\min(Z_0,\ Z_1,\cdots\cdots\cdots,Z_{N-1}) \tag{5}$$

となり

$$\begin{aligned}\max(Z_0,\ Z_1,\cdots\cdots Z_{N-1})&=\max\{Z_0,\ \max(Z_1,\ Z_2\cdots\cdots Z_{N-1})\}\\ \min(Z_0,\ Z_1.\cdots\cdots Z_{N-1})&=\min\{Z_0,\ \min(Z_2,\ Z_2\cdots\cdots Z_{N-1})\}\end{aligned} \tag{6}$$

が成立するので最適性の原理[3] が可能となる.

今

$$\begin{aligned}f_n(C)=\min \mathrm{Prob}\,[&\max(Z_n,\ Z_{n+1},\cdots\cdots Z_{N-1})\ge A,\\ &\text{or}\min(Z_n,\ Z_{n+1},\cdots\cdots Z_{N-1})\le B]\end{aligned} \tag{7}$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots N-1.,\qquad B<C<A,$$

と置けば，明らかに

$$\begin{aligned}f_{N-1}(c)&=1, && C>A,\quad C<B,\\ &=0, && B<C<A,\end{aligned} \tag{8}$$

であり，一般に，

$$\begin{aligned}f_n(c)&=1, && C>A,\quad C<B,\\ &=\min_{0\le t\le A}\left[\int_0^\infty f_{n+1}(c+x-y)\,dG(y)\right], && B<C<A,\\ &n=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots\cdots,N-2.\end{aligned} \tag{9}$$

が成立する.

4. 計　算　法

公式(9)に於て

$$dG(y)=\frac{1}{\int_0^\infty e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}dy}\quad e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}dy \tag{10}$$

と置けば，(9)式より

$$f_{N-2}(c)=1,\qquad C>A,\ C<B,$$

$$=\min_{0\le x\le A}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{m}{\sigma}}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}dy}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{c+x-B-m}{\sigma}}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}dy+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{m}{\sigma}}^{z'} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right] \tag{11}$$

$$B<C<A,$$

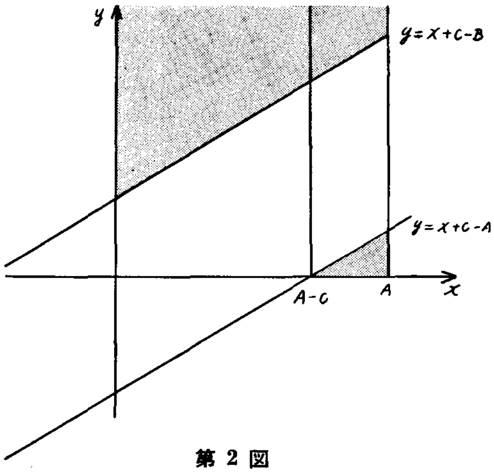
ここに，

$$\begin{aligned}z'&=\frac{C+x-A-m}{\sigma}, && \frac{C+x-A-m}{\sigma}>-\frac{m}{\sigma},\\ &=-\frac{m}{\sigma}, && \frac{C+x-A-m}{\sigma}\le-\frac{m}{\sigma},\end{aligned}$$

である.

実際 $B<C<A$，の場合

$$f_{N-2}(C)=\min_{0\le x\le A}\left[\int_0^\infty f_{N-1}(C+x-y)\frac{1}{\int_0^\infty e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}dy}e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}dy\right], \tag{12}$$



第 2 図

が成立し，

$$f_{N-1}(C+x-y)=1,\quad C+x-y>A,\quad C+x-y<B \text{ の場合} \tag{13}$$

$$=0,\ B>C+x-y<A \text{ の場合}$$

であるから

$$C+x-y>A,$$

$$C+x-y<B,$$

$$0<x\le A,\qquad 0<y<\infty,$$

なる範囲をとれば

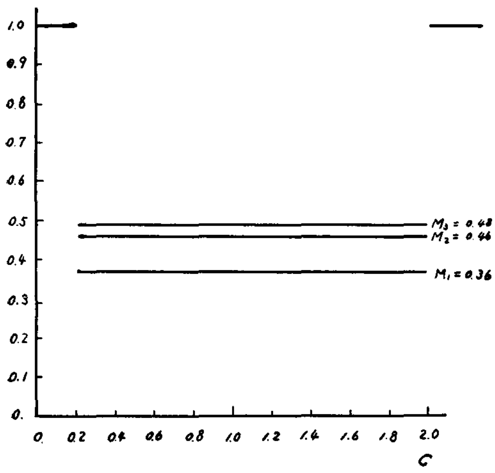
$$f_{N-2}(c)=\min_{0\le x\le A}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{m}{\sigma}}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{c+x-B-m}{\sigma}}^{\infty}e^{\frac{y^2}{2}}dy+\int_{-\frac{m}{\sigma}}^{\frac{c+x-A-m}{\sigma}}e^{\frac{y^2}{2}}dy\right\}, \tag{14}$$

が成立するからである．

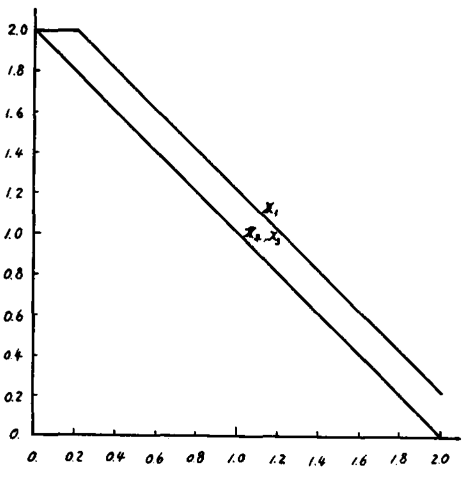
又，一般に $f_N(c)=\min\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{m}{\sigma}}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy}\left[\int_{\frac{C+x-B-m}{\sigma}}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy+\int_{-\frac{m}{\sigma}}^{Z'}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right.$

$$\left.+\int_{Z'}^{\frac{C+x-B-m}{\sigma}}f_{n+1}(c+x-\sigma y-m)e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right]$$

が成立する．



第 3 図



第 4 図

数値例として

$$A=2,\quad B=0.2,\quad \sigma=1.3,\quad m=1.1,$$

と置いた場合の(11)，(12)，(13)式に依る数値解は第3図，第4図のように示される．

5. 議　論

自動制御理論に於ても従来までの自乗誤差最小の規準と，この種の確率規準最小がほぼ一致するとの結果も得られていて[4]，OR はもとより制御過程一般に於ける最適化の規準として今後重視されるであろう．

例えば Wold の逐次模型[5]に於て，価格が一定の期間Tに於て一定の帯域を出る確率を最小ならしめんとする供給の政策如何という問題は

$$P_{t+1}=P_t+x(q_t{}^D-q_t{}^S),\qquad P_0=C,$$

なる系において，変動する $q_t{}^D$ に対して

$$J_N=\mathrm{Prob}\{\max_t|P_t|\geq\alpha\},$$

を最小にする $p_t{}^S$ を求める制御過程の問題と考えられる．

参考文献

1) 清家正，小田中敏男；ダイナミック・プログラミングの林業への応用．経営科学，Vol. 2., No. 3•4 合併号，(1958)．

2) 国沢清典；OR による在庫管理；p. 54．日本事務能率協会，(1959)．

3) B. Bellman; "Dynamic Programming" Princeton Univ. Press. (1957).

4) John R. Ragazzini, Lotei A. Zadeh "Probability Criterion for the Design of Servo-mechanism," *Journal of Applied Physics*. Vol. 20, Feb. (1949).

5) 森田徳三；経済変動の統計分析法，p. 194，岩波全書，(1955)．