多重窓口での待ち行列

牧　野　都　治*

1. まえがき

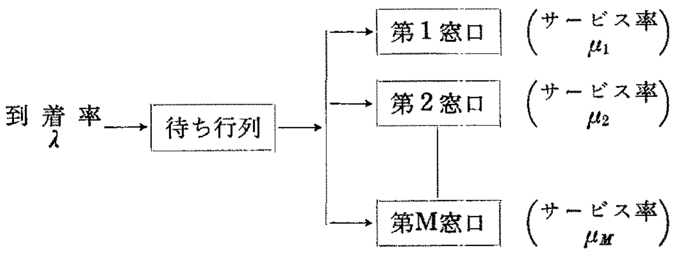
待ち行列問題を解析するには，先ず窓口の構造・窓口への客の到着の状況・サービスをうける順序・許される行列の長さ・サービスに要する時間等を規定し，それらの条件の下で，行列の長さ・待ち時間等――いわゆる一連の“待ち行列の解”を求めるのが普通である．

ここで扱う問題は，多重窓口と呼ばれる型のものであって，平行に並んでいる有限個の窓口(第 1，第 2,……，第M窓口)があり，客が到着したとき，数個の窓口が空いていれば，客は番号の若い窓口へ行ってサービスをうけるが，もし全窓口がふさがっているときは，客は行列を作って待ち，どの窓口でも空き次第，先着順にそこに入ってサービスをうけるという場合についてである．

このような型の問題で，客の列着がポアソン分布に従い，各窓口でのサービス時間は何れもサービス率一定の指数分布に従うとした場合については既に解かれている[3]が，ここでの狙いは各窓口でのサービス率が異なる場合における解を求め，更にそのエルゴード性を論ずることである．

2. 一般的考察

上の構造の下で，窓口M個の場合について考えてみる．



先ず，次の仮定を設ける．

i)　客の到着は，到着率 λ のポアソン分布に従う．

ii)　第 i 番目の窓口でのサービス時間は，サービス率 μ_i の指数分布に従う．

定常状態を扱うことにして，いま，第 i_1 番目，i_2 番目,……，i_k 番目の窓口がふさがっていて，他の窓口は空いている(従って待ち行列の数は0)確率を $P_{(i_1,i_2,\cdots,i_k)}$ で示すことにすると，次の方程式が得られる．

---

* 富士精密工業株式会社 1960 年 4 月 23 日，日本 OR 学会第 7 回研究発表会にて講演，昭和 35 年 5 月 24 日受理

$$\lambda \cdot \sum_{j=1}^{k} \left\{ \prod_{m=1}^{j} \delta_{i_m,m} \cdot P_{(i_1,i_2,\cdots,i_{j-1},i_{j+1},\cdots,i_k)} \right\}$$
$$+\sum_{r=1}^{M} \mu_r \cdot \left\{ \prod_{j=1}^{k} (1-\delta_{i_j,r}) \cdot P_{(i_1,i_2,\cdots,i_k,r)} \right\} - \left(\sum_{s=1}^{k} \mu_{i_s} + \lambda \right) \cdot P_{(i_1,i_2,\cdots i_k)}$$
$$=0$$

但し，$\delta_{i,j}=\begin{cases} 1 & (i=j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$

であり，また

$$i_1<i_2<\cdots\cdots<i_k$$

とする．

一方，窓口が全部ふさがっているときの，システム内の人数(行列の人数と，現にサービスをうけている人数との和)が n である確率を P_n で示すことにすれば，次の方程式が得られる．

$$\lambda \cdot \sum_{l=1}^{M} P_{(1,2,\cdots,l-1,l+1,l+2,\cdots,M)}$$
$$+\sum_{i=1}^{M} \mu_i \cdot P_{M+1} - \left(\lambda + \sum_{i=1}^{M} \mu_i \right) \cdot P_{(1,2,\cdots,M)} = 0$$

また，$n \geq 1$ のとき，一般に次式が成立する．

$$\lambda \cdot P_{n-1+M} + \left(\sum_{i=1}^{M} \mu_i \right) \cdot P_{n+1+M} - \left(\lambda + \sum_{i=1}^{M} \mu_i \right) \cdot P_{n+M} = 0$$

従って上式より

$$P_n = \rho^{n-M} \cdot P_M \qquad \left(\text{但し，} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_M} \right)$$

が得られるので，さらに

$$\sum_{n=M+1}^{\infty} P_n + \sum_{n'=0}^{M} P_{n'} = 1$$

を用いると，すべての P_n が求められる．

よって，待ち行列の長さの期待値 L_q は，

$$L_q = \sum_{n=M}^{\infty} (n-M) \cdot P_M = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \cdot P_M$$

また，行列での平均待ち時間 W_q は

$$W_q = L_q/\lambda = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot P_M$$

となるので，L_q 及び W_q は求められるわけである．

しかし，数値計算により，実際に P_M の厳密な値を求めることは，窓口の数 M が増大すると共に急激に困難度を増す．

そこで，比較的容易に求められる，$M=2$ の場合の計算のみを，次に示すことにする．

3. 窓口2個の場合の解

システムの状態を$(h;i,\ j)$で示すことにする．hは行列にならんでいる客の数を示し，i，jはそれぞれ，第1窓口，第2窓口の状態を示す．但し，i，jは何れも整数値0又は1のみをとり，その窓口の空いている状態を0，使用中の状態を1で示すことにする．

次の表は，これを明細に示したものである．

システムの状態	行列の人数	第1窓口の状態	第2窓口の状態
(0: 0, 0)	0	0	0
(0: 1, 0)	0	1	0
(0: 0, 1)	0	0	1
(0: 1, 1)	0	1	1
(1: 1, 1)	1	1	1
(2: 1, 1)	2	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮
(n: 1, 1)	n	1	1

いま，システムの状態が(0; 0, 0)，(0; 1, 0)，……である確率をそれぞれ$P_{(0;0,0)}$，$P_{(0;1,0)}$，…と記すことにすれば，前述の条件の下で，次の階差方程式が成立つ．

$$\mu_1\cdot P_{(0;1,0)}+\mu_2\cdot P_{(0;0,1)}-\lambda\cdot P_{(0;0,0)}=0$$

$$\lambda\cdot P_{(0;0,0)}+\mu_2\cdot P_{(0;1,1)}-(\lambda+\mu_1)\cdot P_{(0;1,0)}=0$$

$$\mu_1\cdot P_{(0;1,1)}-(\lambda+\mu_2)\cdot P_{(0;0,1)}=0$$

$$(\mu_1+\mu_2)\cdot P_{(1;1,1)}+\lambda\cdot(P_{(0;1,0)}+P_{(0;0,1)})-(\lambda+\mu_1+\mu_2)\cdot P_{(0;1,1)}=0$$

$n\geq1$ のとき，一般に

$$\lambda\cdot P_{(n-1;1,1)}+(\mu_1+\mu_2)\cdot P_{(n+1;1,1)}-(\lambda+\mu_1+\mu_2)\cdot P_{(n;1,1)}=0$$

これらの方程式より，

$$P_{(n;1,1)}=\rho^n\cdot P_{(0;1,1)}$$

が得られ，

$$\sum_{n=1}^{\infty}P_{(n;1,1)}=\frac{\lambda^3\cdot(\lambda+\mu_2)}{\mu_1\mu_2(2\lambda+\mu_1+\mu_2)(\mu_1+\mu_2-\lambda)}\cdot P_{(0;0,0)}$$

となる．一方

$$\sum_{n=1}^{\infty}P_{(n;1,1)}+\{P_{(0;0,0)}+P_{(0;0,1)}+P_{(0;1,0)}+P_{(0;1,1)}\}=1$$

を用いることにより，システム内の人数が0である確率 $P_{(0;0,0)}$ を求めることができて，

$$P_{(0;0,0)}=\frac{\mu_1\mu_2\cdot(\mu_1+\mu_2+2\lambda)(\mu_1+\mu_2-\lambda)}{(\mu_1^2+\mu_2^2)\lambda^2+(\mu_1+\mu_2)(2\mu_1+\mu_2)\mu_2\lambda+(\mu_1+\mu_2)^2\mu_1\mu_2}$$

となる．

従って，行列に n 人ならんでいる確率の母関数，即ち

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}P_{(n;1,1)}z^n$$

は，上の $P_{(0;0,0)}$ を用いることにより，

$$F(z)=\frac{\lambda^2\cdot(\lambda+\mu_2)}{\mu_1\mu_2\cdot(2\lambda+\mu_1+\mu_2)}\cdot\frac{1}{1-\rho z}\cdot P_{(0;0,0)}$$

と書くことができる.

また，行列の長さの期待値 L_q は，$F(z)$ を微分して，$z=1$ とおけばよいので，

$$L_q=\frac{(\mu_1+\mu_2)\lambda^3(\lambda+\mu_2)}{\mu_1\mu_2(2\lambda+\mu_1+\mu_2)(\mu_1+\mu_2-\lambda)^2}\cdot P_{(0;0,0)}$$

となり，さらに，行列での平均待ち時間 W_q は，

$$W_q=L_q/\lambda=\frac{(\mu_1+\mu_2)\lambda^2(\lambda+\mu_2)}{\mu_1\mu_2(2\lambda+\mu_1+\mu_2)(\mu_1+\mu_2-\lambda)^2}\cdot P_{(0;0,0)}$$

となる.

4. エルゴード性について

第2節で扱った一般的構造の下で，システムがエルコードであるための必要・十分条件は，

$$\rho=\lambda/\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_M<1$$

であることが予想されてはいるが，ここでは，窓口2個の場合について，やや厳密にこのことを証明してみたいと思う.

先ず，システムの状態(これを State と呼ぶことにする)についてであるが，客が入ってきた瞬間をとらえ，そのとき行列に何人ならんでいるか(その客は算入しない)によって，分類することにする．これについての明細は，第3節に示した通りである.

次に，遷移確率の matrix を作るために，その element を計算する.

いま，時間 t の間に，行列の人数が n 人から m 人に移る確率を $P_{n,m}(t)$ で示すことにすれば，$n\geq1$ に対して，

$$\int_0^{\infty}P_{n,m}(t)dt=\int_0^{\infty}\int_0^t\mu_1e^{-\mu_1x}\cdot e^{-\mu_2x}dx\cdot P_{n-1,m}(t-x)e^{-\lambda x}dt$$
$$+\int_0^{\infty}\int_0^t\mu_2\cdot e^{-\mu_2x}\cdot e^{-\mu_1x}dx\cdot P_{n-1,m}(t-x)e^{-\lambda x}dt$$

が成立する．ここで

$$\int_0^{\infty}P_{n,m}(t)dt=Q_{n,m}$$

とおけば，$Q_{n,m}$ はとにかく，行列が n 人から m 人に移る確率を示すわけであって，上式より，

$$Q_{n,m}=\frac{1}{1+\rho}\cdot Q_{n-1,m}$$

となる.

一方，$n=0$ に対しては，次のようになる．

State　(0 ; 0, 0)　から

(0 ; 0, 0)　へ移る確率

$$\int_0^\infty\int_0^t \mu_1\cdot e^{-\mu_1 x}dx\cdot e^{-\lambda t}\cdot\lambda dt=\mu_1/(\lambda+\mu_1)$$

(0 ; 1, 0)　へ移る確率

$$\int_0^\infty e^{-\mu_1 t}\cdot e^{-\lambda t}\cdot\lambda dt=\lambda/(\lambda+\mu_1)$$

その他の State へ移る確率　0

State　(0 ; 1, 0)　から

(0 ; 0, 0)　へ移る確率

$$\int_0^\infty(1-e^{-\mu_1 t})(1-e^{-\mu_2 t})e^{-\lambda t}\lambda dt$$

$$=\lambda\cdot\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda+\mu_1}-\frac{1}{\lambda+\mu_2}+\frac{1}{\lambda+\mu_1+\mu_2}\right)$$

(0 ; 1, 0)　へ移る確率

$$\int_0^\infty(1-e^{-\mu_2 t})\cdot e^{-\mu_1 t}\cdot e^{-\lambda t}\cdot\lambda dt$$

$$=\lambda\cdot\left(\frac{1}{\lambda+\mu_1}-\frac{1}{\lambda+\mu_1+\mu_2}\right)$$

(0 ; 0, 1)　へ移る確率

$$\int_0^\infty(1-e^{-\mu_1 t})e^{-\mu_2 t}\cdot e^{-\lambda t}\lambda dt$$

$$=\lambda\cdot\left(\frac{1}{\lambda+\mu_2}-\frac{1}{\lambda+\mu_1+\mu_2}\right)$$

(0 ; 1, 1)　へ移る確率

$$\int_0^\infty e^{-\mu_1 t}\cdot e^{-\mu_2 t}\cdot e^{-\lambda t}\cdot\lambda dt=\frac{\lambda}{\lambda+\mu_1+\mu_2}$$

その他の State へ移る確率　0

State　(0 ; 1, 1)　から

(0 ; 0, 0)　へ移る確率

$$\int_0^\infty\int_0^t e^{-\mu_2 x}\cdot\mu_1\cdot e^{-\mu_1 x}dx(1-e^{-\mu_1(t-x)})(1-e^{-\mu_2(t-x)})e^{-\lambda t}\cdot\lambda dt$$

$$+\int_0^\infty\int_0^t e^{-\mu_1 x}\cdot\mu_2\cdot e^{-\mu_2 x}dx(1-e^{-\mu_2(t-x)})(1-e^{-\mu_1(t-x)})e^{-\lambda t}\cdot\lambda dt$$

$$=\lambda\cdot\left\{\left(-\frac{1}{\mu_1+\mu_2}+\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right)\cdot\frac{\mu_1+\mu_2}{\lambda+\mu_1+\mu_2}+\frac{\mu_1+\mu_2}{(\lambda+\mu_1+\mu_2)^2}+\frac{1}{\lambda}\right.$$

$$-\frac{1}{\lambda+\mu_1}-\frac{1}{\lambda+\mu_2}-\frac{\mu_1}{(\lambda+\mu_1)\mu_2}-\frac{\mu_2}{(\lambda+\mu_2)\mu_1}\Big\}$$

(0；1，0)　へ移る確率

$$\int_0^\infty\int_0^t e^{-\mu_2 x}\cdot\mu_1 e^{-\mu_1 x}dx\cdot(1-e^{-\mu_2(t-x)})\cdot e^{-\mu_1(t-x)}\cdot e^{-\lambda t}\cdot\lambda dt$$

$$+\int_0^\infty\int_0^t \mu_2\cdot e^{-\mu_1 x}\cdot(1-e^{-\mu_2(t-x)})dx\cdot e^{-\mu_1 t}\cdot e^{-\lambda t}\cdot\lambda dt$$

$$=\lambda\cdot\Big\{\Big(-\frac{\mu_1}{\mu_2}-1\Big)\Big(\frac{1}{\lambda+\mu_1+\mu_2}\Big)-\frac{2\mu_1}{(\lambda+\mu_1+\mu_2)^2}$$

$$+\frac{\mu_1}{\mu_2(\lambda+\mu_1)}+\frac{1}{\lambda+\mu_2}\Big\}$$

(0；0，1)　へ移る確率

$$\int_0^\infty\int_0^t e^{-\mu_1 x}\mu_2\cdot e^{-\mu_2 x}dx\cdot(1-e^{-\mu_1(t-x)})e^{-\mu_2(t-x)}\cdot e^{-\lambda t}\cdot\lambda dt$$

$$+\int_0^\infty\int_0^t \mu_1\cdot e^{-\mu_1 x}(1-e^{-\mu_1(t-x)})dx\cdot e^{-\mu_2 t}\cdot e^{-\lambda t}\cdot\lambda dt$$

$$=\lambda\cdot\Big\{\Big(-\frac{\mu_2}{\mu_1}-1\Big)\Big(\frac{1}{\lambda+\mu_1+\mu_2}\Big)-\frac{2\mu_2}{(\lambda+\mu_1+\mu_2)^2}+\frac{\mu_2}{\mu_1(\lambda+\mu_2)}+\frac{1}{\lambda+\mu_1}\Big\}$$

(0；1，1)　へ移る確率

$$\int_0^\infty\int_0^t \mu_1\cdot e^{-\mu_1 x}\cdot e^{-\mu_2 x}dx\cdot e^{-\mu_1(t-x)}\cdot e^{-\mu_2(t-x)}\cdot e^{-\lambda t}\cdot\lambda dt$$

$$+\int_0^\infty\int_0^t \mu_2\cdot e^{-\mu_2 x}\cdot e^{-\mu_1 x}dx\cdot e^{-\mu_1(t-x)}\cdot e^{-\mu_2(t-x)}\cdot e^{-\lambda t}\cdot\lambda dt$$

$$=\frac{\lambda\cdot(\mu_1+\mu_2)}{(\lambda+\mu_1+\mu_2)^2}$$

(1；1，1)　へ移る確率

$$\int_0^\infty e^{-\mu_1 t}\cdot e^{-\mu_2 t}\cdot e^{-\lambda t}\cdot\lambda dt$$

$$=\frac{\lambda}{\lambda+\mu_1+\mu_2}$$

その他の State へ移る確率　0

これで，遷移確率の matrix が得られたわけである.

さて，ここでの狙いは，このようなシステムがエルゴードであるための，必要・十分条件を調べることであるが，それを定理の形で述べる前に，必要な Lemma を挙げておく.

なお，計算の便宜上，State を調整して，次のようにおくことにする．即ち，システム内の人数によって State を分類し，次の matrix を設定する.

	0	1	2	3	⋯⋯ $i+2$
0	$P_{0,0}$	$P_{0,1}$	0	0	0
1	$P_{1,0}$	$P_{1,1}$	$P_{1,2}$	0	0
2	$P_{2,0}$	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$	$P_{2,3}$	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$i+1$	$P_{i+1,0}$	$P_{i+1,1}$	$P_{i+1,2}$	$P_{i+1,3}$ ⋯⋯	$P_{i+1,i+2}$

ここで更に,

$$a_{i,j}=P_{i,i+1-j}$$

とおく.

このとき matrix は次のようになる.

	0	1	2		$i+2$
0	$a_{0,1}$	$a_{0,0}$	0	⋯⋯⋯	0
1	$a_{1,2}$	$a_{1,1}$	$a_{1,0}$		0
2	$a_{2,3}$	$a_{2,2}$	$a_{2,1}$		0
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
$i+1$	$a_{i+1,i+2}$	$a_{i+1,i+1}$	$a_{i+1,i}$	⋯⋯⋯	$a_{i+1,0}$

$i\geq 3$ に対しては, 勿論

$$P_{i,j}=\frac{1}{1+\rho}\cdot P_{i-1,j}$$

であるから,

$$a_{i,j}=\frac{1}{1+\rho}\cdot a_{i-1,j-1}$$

である.

> Lemma 1.
>
> $$E_i\equiv\sum_{k=1}^{i+1}k\cdot a_{i,k} \quad \text{とおくとき,}$$
>
> $$E_i<E_{i+1}$$
>
> である.

<証明>

$i\geq 2$ の場合

matrix より，
$$E_{i+1}=\frac{1}{1+\rho}\cdot E_i+\frac{1}{1+\rho}$$

これより，

$$E_{i+1}-E_i=\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{i-1}\cdot(1-\rho\cdot E_2)$$

然るに，

$$\begin{aligned}E_2&=\frac{3}{1+\rho}-(a_{2,2}+2\cdot a_{2,1})\\&=\frac{3}{1+\rho}-\lambda\cdot\left[\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{\lambda+\mu_1+\mu_2}\right)\left(-\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1\mu_2}\right)+\frac{(\mu_1+\mu_2)\{(\mu_1+\mu_2)\lambda+2\mu_1\mu_2\}}{\mu_1\mu_2(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)}\right]\\&<\frac{1}{\rho}\end{aligned}$$

となるから
$$E_{i+1}>E_i$$

$i\leq 1$ の場合

$$E_0=a_{0,1}=\frac{\mu_1}{\lambda+\mu_1}$$

$$E_1=2a_{1,2}+a_{1,1}=2-\left(\frac{1}{\lambda+\mu_1}+\frac{1}{\lambda+\mu_2}\right)\cdot\lambda$$

よって，

$$E_1-E_0=\frac{\mu_2}{\lambda+\mu_2}>0$$

$$\therefore\quad E_1>E_0$$

次に

$$\begin{aligned}E_2-E_1&=\frac{3}{1+\rho}-(a_{2,2}+2\cdot a_{2,1})\\&\quad-\left\{2-\left(\frac{1}{\lambda+\mu_1}+\frac{1}{\lambda+\mu_2}\right)\lambda\right\}\\&=\frac{(\mu_1^2+\mu_2^2)\lambda+(\mu_1+\mu_2)\mu_1\mu_2}{(\lambda+\mu_1+\mu_2)(\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)}>0\end{aligned}$$

$$\therefore\quad E_2>E_1$$

以上により，すべての i に対して，

$$E_{i+1}>E_i$$

が成立することが証明された．

Lemma 2.

$$\lim_{i\to\infty}E_i=1/\rho$$

である．

<証明>

$$\lim_{i\to\infty} E_i = \lim_{i\to\infty}\sum_{k=1}^{i+1}\left\{k\cdot\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^k\cdot\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)\right\} = \frac{1}{\rho}$$

Lemma 3.

既約な非周期的 Markov Chain がエルゴードであるための条件は，遷移確率 matrix $Q\equiv|q_{ij}|$ に対して，

$$\sum_{j=0}^{\infty} q_{ij}x_j < \infty \qquad i\leq i_0 \qquad (i_0\text{; 固定した整数})$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} q_{ij}x_j \leq x_i - \varepsilon \qquad i > i_0 \qquad (\varepsilon\text{ は任意の正数})$$

を満足せしむる解 $\{x_j\}$ が存在することである．

<証明> は Homma[5] によってなされている．

以上の Lemma を用いて，次の定理の証明がなされる．

〔定理 1〕

Imbedded Markov Chain がエルゴードであるための条件は，

$$\rho < 1$$

である．

<証明> Homma[5] の適用により，次の如くなされる．

システムが既約かつ非周期的であることは，遷移確率 matrix の形より，明らかである．

先ず，十分条件の証明を行う．

いま，$\rho<1$ であるとする．

このとき，Lemma 1 及び 2 により，ある固定した整数 i_0 に対して，$i\geq i_0$ なる i については，

$$E_i > 1+\varepsilon$$

なる正数 ε を求めることができる．そこで，もし

$$x_i = i \qquad (i\geq 0)$$

なるように $\{x_i\}$ を選ぶならば，

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}x_j = (i+1) - E_i < x_i - \varepsilon \qquad (i\geq i_0)$$

となり，一方 $i<i_0$ なる i に対しては明らかに

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}x_j < \infty$$

であるから，Lemma 3 の条件が満足されている．

従ってシステムはエルゴードである．

次に，必要条件の証明を行う．

いま，遷移確率 $P\equiv|P_{ij}|$ を有するシステムがエルゴードであるとする．このとき，次のような $\{\pi_j\}$ が存在する．

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}{}^{(n)}=\pi_j>0, \qquad \sum_{j=0}^{\infty}\pi_j=1$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}\pi_i=\pi_j$$

（但し，matrix $|P_{ij}{}^{(n)}|$ は P の n 乗の matrix である）

さて，次のような母関数 $E_i(z)$，$\Pi(z)$ を考える．

$$E_i(z)=\sum_{j=0}^{i+1} a_{ij}z^j, \qquad \Pi(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j z^j$$

このとき，

$$\Pi(z)=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i\cdot\left\{E_i\left(\frac{1}{z}\right)\right\}\cdot z^{i+1}$$

となり，両辺を z について微分して $z=1$ とおくことにより，

$$\Pi'(1)=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\pi_i-\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i\cdot E_i'(1)$$

が得られる．然るに，

$$\Pi'(1)=\sum_{j=1}^{\infty} j\cdot\pi_j, \qquad \sum_{j=0}^{\infty}\pi_j=1$$

であるから，

$$\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i\cdot E_i'(1)=1$$

勿論，$E_i'(1)=E_i$ であるから，

$$\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i E_i=1$$

Lemma 1 より

$$\lim_{i\to\infty} E_i>1$$

Lemma 2 を用いて，

$$\rho<1$$

よって定理の証明がすんだ．

次に，$\rho=1$ の場合はどのようになるかについて調べてみる．そのために，先ず次の Lemma を必要とする．

Lemma 4.

次のような遷移確率 matrix を有する Markov Chain を考える.

$$(\gamma_{ij}) \equiv \begin{vmatrix} \alpha_0 & \gamma_0 & 0 & 0 & \cdots\cdots \\ \alpha_1 & \gamma_1 & \gamma_0 & 0 & \\ \alpha_2 & \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \\ \vdots & & & & \end{vmatrix}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i=1, \qquad \alpha_i=1-\sum_{k=0}^{i}\gamma_k, \qquad \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\gamma_k\geq 1$$

このとき，次の関係式を満足せしむる $\{x_i\}$ が存在する.

$$\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_{ij}x_j=x_i \qquad (i\neq 0)$$

$$(i\to\infty \text{ のとき,} \quad x_i\to\infty)$$

<証明> は，Foster[4] によってなされている.

〔定理 2〕

Imbedded Markov Chain は，$\rho=1$ のとき再帰零状態 (null-recurrent) である.

<証明> Homma[5] の適用により，次の如くなされる.

ここで扱っている matrix は，次の形のものである.

	0	1	2	3	4 …………
0	$a_{0,1}$	$a_{0,0}$	0	0	0 …………
1	$a_{1,2}$	$a_{1,1}$	$a_{1,0}$	0	0
2	$a_{2,3}$	$a_{2,2}$	$a_{2,1}$	γ_0	0
3	$a_{3,4}$	$a_{3,3}$	$a_{3,2}$	γ_1	γ_0
$\vdots$	$\vdots$				
i	$a_{i,i+1}$	$a_{i,i}$	$a_{i,i-1}$	γ_{i-2}	γ_{i-3}
$\vdots$					

$$\text{但し,} \qquad \gamma_i=\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^i\cdot\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right) \qquad (i\geq 0)$$

さて，

$$\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i=1 \qquad \sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\gamma_k=\frac{1}{\rho}=1 \qquad (\because \ \rho=1)$$

よって Lemma 4 により，次のような $\{y_i\}$ が存在する.

$$\begin{cases} \gamma_1 y_1+\gamma_0 y_2=y_1 \\ \gamma_2 y_1+\gamma_1 y_2+\gamma_0 y_3=y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_i y_1+\gamma_{i-1} y_2+\gamma_{i-2} y_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+\gamma_0 y_{i+1}=y_i \\ \qquad\qquad i\to\infty \quad \text{とき,}\ y_i\to\infty \end{cases}$$

そこでいま,

$$x_0\leq 0, \qquad x_1=x_2=0, \qquad x_{2+j}=y_j \quad (j=1,\ 2,\cdots\cdots)$$

なるように, $\{x_i\}$ を選べば

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}x_j\leq x_i \qquad (i\neq 0)$$

$$i\to\infty \quad \text{のとき,} \quad x_i\to\infty$$

が満足される.

従って Foster[4] により, かかる Markov Chain は recurrent である. 然るに, 先に証明したように, $\rho<1$ がエルゴードであるための必要・十分条件であるから, $\rho=1$ のとき, システムは再帰零状態(null-recurrent)である[1].

以上により定理の証明がすんだわけであるが, 終りに, 有益な御指導と助言を賜わった慶応大学河村教授ならびに, 都立大学本間理博に感謝の意を表します.

参 考 文 献

1) W. Feller, "An Introduction to Probability Theory and its Applications" John Wiley & Sons, (1950)
2) H. Goode & R. Machol "System Engineering" McGraw-Hill (1952)
3) Philip M. Morse, "Queues, Inventories and Maintenance" John Wiley & Sons, (1957)
4) F. G. Foster, "On the Stochastic matrices Associated with Certain Queuing Processes" *Ann. Math. Stat.*, 24 (1953)
5) T. Homma "On the Many Server Queuing Process with a Particular Type of Queue Discipline" *Rep. Stat. Appl. Res.*, JUSE., vol. 4, No. 3, (1956)