〈綜合報告〉独占的競争のゲーム論的考察

宮　沢　光　一*
竹　内　　啓**
関　谷　　章***

§0. は し が き

1944年，von Neumann および Morgenstern による Game Theory の出現以来，既に15年以上の歳月が流れている．この間1000以上のゲーム関係の著書・論文が出たといわれているのであるが，最近におけるこの理論の発展と，他の科学部門への影響の大きさには眼をみはるばかりである．そこに展開される戦略の概念，解の概念は，人間社会における競争の場のみならず，自然を対象とするゲームという形で，統計理論にも多大の貢献をしているし，また最近とみに関心を高めている決定理論の定式化も，この理論にその根底をおくものといえるであろう．

しかしこの理論プロパーの現実的応用ということになると中々の困難を伴うようである．軍事面への数多くの応用はみられるとしても，企業経営への応用は未だ十分といわれず，今後の発展を待たれる，というのが現状ではなかろうか．勿論，入札問題，広告費配分問題，等々への応用がなされているとしても，LP のような直接アッピールする形での応用は数少いようである．このことは同時にまた，具体的な競争の場における最適戦略なるものが，そうやすやすと決定され得る性質のものでないことをも物語るものでもあろう．

ここでわれわれがとりあげようとする問題は，現実の市場の姿としての寡占の状態，あるいは不完全競争，あるいは独占的競争とよばれている市場構造を，ゲーム論的観点から分析しようということである．勿論，現実の企業間の競争は，ダイナミックな性格をもちながら虚々実々，まことに複雑怪奇に近いものであろう．極めて単純化された形で問題をとりあげていくのであるが，こうした分析を通じて，競争場裡にある企業の生産量の決定，あるいは価格の決定が，企業利潤にどのような反応効果をもつかが，従来の完全競争を前提とした抽象的分析よりも，より現実的な姿をもって洞察されることであろう．幸い最近，M. Shubik による "Strategy and Market Structure" (1959) が出て，この方面の研究に大きい刺戟を与えている．われわれもこの線に沿って解説を進めるとともに，2，3の拡張を試みたいと思う．

§1. 複占についての考察

はじめに独占的競争の最も簡単な場合，すなわち2者独占の場合を考える．次にこれを3企業

*,**,***　東大経済学部 35年5月5日受理

間の競争に拡張することを試みるであろう．２者独占には双方独占と複占があるが，ここでは複占すなわち市場を対象として２人の供給者が競争する場合を考える．しかも話を具体的にするために，各企業の戦略変数として，生産量のみを考察することとし，そこから求められる各種の解について，その性格を比較検討することとする．議論を簡単にするために市場の状態は完全であること，すなわちそこで生産される生産物は完全に同質のものであり，又市場の状態についての情報は全て費用を要せず，しかも完全に知ることが出来るものと仮定する．さらに時間とともに変動する要因を捨象して一期間だけについての企業行動の分析に考察を限定する．市場の需要函数についてはそれが $q=q_1+q_2$ のみの函数であって右下りの勾配を持つものとし，具体的には次の単純な函数

$$p=10-2q=10-2(q_1+q_2)$$

を例にとって計算を進める．ここに p は市場価格，q_1 および q_2 はそれぞれ企業 1,2 の生産高を表わすものとする．

費用函数はそれぞれ各企業の生産高のみの函数であるものと仮定し，平均費用函数 γ_1，γ_2 がそれぞれ次式で与えられるものとする．

$$\gamma_1=4-q_1+q_1^2,$$
$$\gamma_2=5-q_2+q_2^2.$$

しからば企業1，2の利潤 P_1，P_2 はそれぞれ次のように与えられる．

$$P_1=p_1q_1-q_1\gamma_1,$$
$$P_2=p_2q_2-q_2\gamma_2.$$

ここに p_1，p_2 は企業 1，2 の設定する価格であるが，われわれの数量のみを戦略変数とする複占の場合においては $p_1=p_2=p$ となっている．

こうした前提の下で，各企業がそれぞれの生産高を調整することを通じてより大きい利潤を求めて行動するとき，均衡点はどこに見出されてくるであろうか．最適生産量はどのように決定されてくるであろうか．こうした問題を各種の観点から分析し，またそれら分析の結果を相互に比較検討することからはじめたいと思う．

1.1. クールノー解

クールノーにおいては各企業は互に他と独立な行動をとるものと仮定して，相手の戦略が与えられた時に自らの利潤を極大化する行動をとるものと考える．したがってここではどのような協力も拒否されることになる．しかも行動そのものを見れば互に他の生産高がそのままに止まるとした場合に自らの利潤を極大化するような生産高を示す反応函数(reaction function)に基いて行動するのであるから，両者共に受動的な立場をとることが仮定されているといえよう．彼はかかる場合に需要函数が $q=q_1+q_2$ のみの函数で，かつ右下りという通常の条件の下でユニークな均衡解が存在することを証明している．勿論彼は企業間の結合乃至は協力という事情を無視したわけではなく，むしろこれを均衡点が存在しないという理由で積極的に拒否する態度をとって

いる．この事実は彼にあっては複占が，独占から出発して競争者の数を増大させることによって完全競争に達せんとする論理過程の一段階としての意義を持つものであった，という事情と合せて理解さるべき問題であろう．

クールノー解を得るための条件式は

$$\frac{\partial P_1}{\partial q_1}=0 \qquad \frac{\partial P_2}{\partial q_2}=0$$

で与えられる．これらは各々企業 1，2 の反応函数を示すものに他ならない，われわれの例ではこの条件式はそれぞれ

$$6-2q_1-3q_1^2-2q_2=0$$

$$5-2q_2-3q_2^2-2q_1=0$$

となり，解は q_1，$q_2\geqq 0$ でユニークに定まる．

1.2. 有効点解

これは企業が有効性あるいは社会的総生産を極大化するように行動するという仮定の下で得られる解である．このために企業は自らの直接的な利益を追求することなく，あたかも利他的な動機にかられているかのように行動することになる．ただし各企業は零以下の利潤では生産を行わないものとしよう．さてこのような有効性の基準が通常の複占の状況には適合しないということは，それが経済の全体的な概念であるのに反して，複占は経済の部分的な現象にすぎないということからも明らかであろう．さらにこれを複占理論の中に組入れるために次のような状態を想定する．2つの企業は貨幣および限界費用による価格決定を資源の適正な配分のための会計手段として用いている中央集権化された経済の中の単位であると考え，価格函数はこれらの価格に対する残余の経済全体の反応を表現するものであるとする．この時それらの価格と費用函数のみを用いて2つの企業が従わねばならないルールを定めることができる．それは各生産者があたかも販売価格が定数であるかのように，そしてその下で自らの利潤を極大化とするかのように行動しなければならないということである．かくて均衡点では彼等の限界費用は価格と等しくなるであろう．この場合の条件式は次のように与えられる．

$$\frac{\partial(q_i\cdot\gamma_i)}{\partial q_i}=p$$

$$\text{ただし} \qquad P_i=q_ip-q_i\cdot\gamma_i\geqq 0 \qquad i=1,2$$

これらの方程式は γ_i が U 字型，需要函数が右下り，かついずれの企業も市場需要を上回る生産能力を持たず，また弾力性についての適当な条件が成立しているという通常の仮定の下では正の価格に対して唯一つの解が存在することが知られている．われわれの例は丁度これらの条件を満足するものであって，上述の条件式は

$$3q_1^2+2q_2=6$$

$$3q_2^2+2q_1=5$$

となっている．

さて有効点においては次の関係式が成り立つ：

$$\frac{\partial P_1}{\partial q_1}=\frac{\partial}{\partial q_1}[q_1(p-\gamma_1)]=p+q_1p'-\frac{\partial(\gamma_1\cdot q_1)}{\partial q_1}=q_1p'$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial q_1}=\frac{\partial}{\partial q_1}[q_2(p-\gamma_2)]=p+q_2p'-\frac{\partial(\gamma_1\cdot q_2)}{\partial q_2}=q_2p'$$

ここで p' は p の q についての微係数である．q_2 に関する P_1, P_2 の偏導函数も全く同様に与えられる．したがって

$$\frac{\partial P_1}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial P_2}{\partial q_2}=(q_1p')(q_2p')$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial P_2}{\partial q_2}=(q_1p')(q_2p')$$

この両式は恒等的に等しい．これから，有効点においては

$$|J|=\frac{\partial(P_1, P_2)}{\partial(q_1, q_2)}=0$$

が成立すること，すなわちヤコビアン条件が成立することを知る．q_1, q_2 平面上でヤコビアン条件を満足する点の軌跡は

$$\frac{\partial P_1}{\partial q_1}\Big/\frac{\partial P_1}{\partial q_2}=\frac{\partial P_2}{\partial q_2}\Big/\frac{\partial P_2}{\partial q_2}$$

を満足する点の軌跡であり，これは企業 1, 2 にとっての等利潤曲線の接点の軌跡に他ならない．この軌跡は一般に第2図にみられるように，Pareto optimal な点からなる曲線と，しからざる曲線――これを minimal surface という――の 2 つから成っている．さて有効点はこれら 2 つの曲線の中のいずれにのっているであろうか．そのために，P_1, P_2 の微小変化を $\varDelta P_1$, $\varDelta P_2$ とすると

$$\varDelta_1 P=\frac{\partial P_1}{\partial q_1}\varDelta q_1+\frac{\partial P_1}{\partial q_2}\varDelta q_2,$$

$$\varDelta P_2=\frac{\partial P_2}{\partial q_1}\varDelta q_1+\frac{\partial P_2}{\partial q_1}\varDelta q_2$$

であり，これらに上に求めた偏導函数を代入して

$$q_2\varDelta P-q_1\varDelta P_2=0$$

を得る．したがって q_1, $q_2>0$ であることから，$\varDelta P_1$ と $\varDelta P_2$ とは同符号である．すなわち有効点は Pareto optimal な点ではなく，それは minimal surface 上の点であることを知る．

1.3. フォンノイマン，モルゲンシュテルン解

ここでは複占の問題を非零和協力2人ゲームとして取扱う．2つの企業はまず結合利潤を極大ならしめるように協力して生産を行い，しかる後に side-payment (割戻し) という手段を用いて相互の利潤の再分配を行うものと考える．このとき，もし side-payment の後に最終的に得られる利潤の量が，他の企業のとる行動とは無関係に独力で獲得し得る量よりも少ないならば，如何

なる企業もそのような協力に同意することはないであろう．もしすべてのプレーヤーの協力によって得られる量が，個別的な行動で獲得し得る量の合計よりも大きいならば，そのゲームを本質的(essential)であるとよび，もしこれら両者が等しいならばしからざる結合あるいは協力を行う動機が存在しないことになる．そのようなゲームは非本質的(in-essential)であるという．一般の n 人ゲームに対する von Neumann, Morgenstern 解を説明するには，imputation の概念が必要である．実数の組 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が，$x_i \geqq v(\{i\})$，$i=1, 2, \cdots, n$，かつ $\sum_1^n x_i = v(\{1, 2, \cdots, n\})$ であるときに，x を imputation という．imputation x の要素 x_i は，n 人のプレーヤー全部が協力して得られる量をプレーヤーで配分するに当って，プレーヤーが受領しても一応不合理ではない——少くとも独力で得られる量だけは獲得するという意味で——ところの配分を表わす．さて2つの imputation $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ および $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ が与えられたとき，もしプレーヤーのある集合 T があって，$v(\mathrm{T}) \geqq \sum_{i \in T} y_i$，かつ $y_i > x_i$，すべての $i \epsilon T$ に対して，となっているときに，imputation y は imputation x を dominate(優越する)するという．さて，一般の n 人ゲームにおける von Neumann, Morgenstern 解は次のように定義されている．すなわち imputation の集合 A で(1)その中の任意の2つの imputation について，互に他をdominate する関係はないが，(2)集合 A に含まれない任意の imputation に対しては，それを dominate するような imputation が A の中に存在するようなものが von Neumann, Morgenstern 解である．この解の概念が有効な働きをするのは，3人以上のプレーヤーが存在するゲームの場合においてである．2人ゲームの場合には，imputation のすべての集合が解ということになってしまうことは，上の定義から明らかである．すなわち2つの実数の組 $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)$ で，$\alpha_1+\alpha_2=v(\{1,2\})$，$\alpha_1 \geqq v(\{1\})$，$\alpha_2 \geqq v(\{2\})$ であるもの全体の集合が解である．これらが Pareto optimal な点の集合になっていることは明らかである．

さてこの解の概念をわれわれの複占の場合に適用してみよう．$v(\{1,2\})$ は次の条件式から求められる．

$$\frac{\partial(P_1+P_2)}{\partial q_1}=6-2q_1-3q_1{}^2-4q_2=0$$

$$\frac{\partial(P_1+P_2)}{\partial q_2}=5-2q_2-3q_2{}^2-4q_1=0$$

これを解いて $q_1=0.9161$，$q_2=0.4125$ したがってこれから解は $P_1 \geqq v(\{1\})$，$P_2 \geqq v(\{2\})$，かつ $p_1+p_2=4.1991$ であるような(P_1, P_2)の集合として与えられる．

又この場合の解点が Pareto optimal なものであることは次のようにしても知られるであろう．

$$\varDelta P_1=\frac{\partial P_1}{\partial q_1}\varDelta q_1+\frac{\partial P_1}{\partial q_2}\varDelta q_2$$

$$\varDelta P_2=\frac{\partial P_2}{\partial q_1}\varDelta q_1+\frac{\partial P_2}{\partial q_2}\varDelta q_2$$

から上述の条件式を用いて

$$\Delta_1 P+\Delta P_2=\left(\frac{\partial P_1}{\partial q_1}+\frac{\partial P_2}{\partial q_1}\right)\Delta q_1+\left(\frac{\partial P_1}{\partial q_2}+\frac{\partial P_2}{\partial q_2}\right)\Delta q_2$$

$$=\frac{\partial({}_1P+P_2)}{\partial q_1}\Delta q_1+\frac{\partial({}_1P+P_2)}{\partial q_2}\Delta q_2=0$$

したがって $$\Delta P_1 \gtreqless 0 \rightleftarrows \Delta P_2 \lesseqgtr 0$$

これは Pareto optimality すなわち両者共に同様にその地位を改善し得ないということを示している.

1.4. ナッシュの解(1)——Side-Payment が許される場合

ここでの企業の最終的な行動様式は von Neumann, Morgenstern の場合と同一である. 但し今度は企業の最適な脅かしの点(optimal threat point)を与えてそこからの公平な利潤の配分を行うというルールを定めることによって解をユニークにすることを考える. したがって企業はまず協力して結合利潤を極大化しそのあとで optimal threat point から双方にとって妥当なやり方で利潤を配分するという手続がとられ, このために side-payment が用いられることになる. Nash はこの妥当な分配の基準として threat point$(P_1^T,\ P_2^T)$が与えられたときこれに対して, $(P_1-P_1^T)(P_2-P_2^T)$なる量を極大にするような点で配分を行うことを提案する(この理由の詳細はここでは省略する), 今の場合解は $P_1+P_2=c$(c は常数)上にあるから解点を$(P_1^C,\ P_2^C)$とすると, ここで接線を共有することから

$$+\frac{P_2^C-P_2^T}{P_1^C-P_1^T}=-1 \qquad \text{即ち} \qquad P_2^C-P_2^T=P_1^C-P_1^T$$

このことは今の場合 Nash の基準は optimal threat point からの両者の等しい利潤の分配を意味することを示している. 又もし任意の threat point を$(P_1,\ P_2)$とするとき

$$P_1^C=P_1+\frac{c-(P_1+P_2)}{2}=\frac{c}{2}-\frac{P_2-P_1}{2}$$

$$P_2^C=P_2+\frac{c-(P_1+P_2)}{2}=\frac{c}{2}+\frac{P_2+P_1}{2}$$

であるから企業1は(P_2-P_1)をなるべく小さく企業2はこれをなるべく大きくしようとすることになる. このことから threat point をどこにとるかということは2人の間の厳格に競争的なゲームと考えられる. われわれはこの均衡解を optimal threat point としてとり上げることにする. (この点はまたミニマックス解と一致していることはすぐわかる)この点を求めるための条件式は

$$\frac{\partial(P_2-P_1)}{\partial q_1}=0 \qquad \frac{\partial(P_2-P_1)}{\partial q_2}=0$$

となる. われわれの例ではこれらは各々

$$3q_1^2+2q_1-6=0$$

$$5-2q_2-3q_2^2=0$$

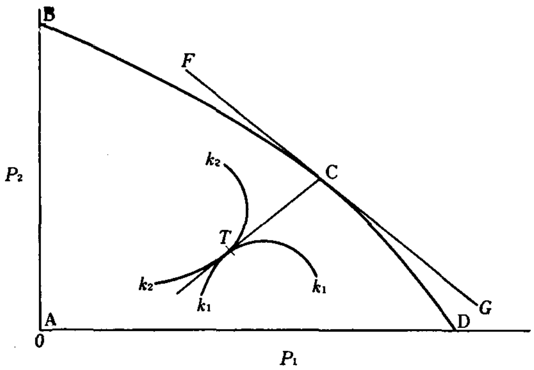
となり, これを解いて$(q_1^T,\ q_2^T)$を得る.

上の条件式を満足する$(P_1^T,\ P_2^T)$が Jacobian 条件を満足する点であることは上述の行動様式

が $P_2(q_1,\ q_2)=C_2$ (C_2 は常数)なる条件の下で，$\max_{q_1}\min_{q_2} P_1(q_1,\ q_2)$ を求めることと同一であることを考えれば明らかである．この行動様式によって与えられる生産量の組は自らの利潤量は変えずに極大化を達成せんとする相手の利潤の極小化を果すようなものであり複占の場合には脅かしとして用うべき戦略を示すものであると考えることが妥当であろう．このような $(q_1,\ q_2)$ を示す曲線を脅かしの曲線(threat curve)とよぶこととする．上で求めた解は実はこの曲線の上の点で，side-payment が許される場合に Nash の公準を満たしているものに他ならない．

1.5. ナッシュの協力ゲーム(2)——Side-payment の許されない場合

もし企業にとって恐らくはある法的な規制によって side-payment の授受が許されない場合には，協力ゲームは一般には(1)と異る解を与え結合利潤の極大化は果されないことになる．なぜなら今度は生産高の決定が利潤の分配を調整するという重大な役割を担うことになるからである．この場合の解が Pareto optimal な曲線上にあることは容易に考えられる，即ちそのような点は依然として双方の状態を同時に改善することは出来ないといった点でなければならない．したがって Nash の基準に従えば(1)の場合と同様に考えて threat point$(P_1{}^T,\ P_2{}^T)$ が与えられたとき $(P_1-P_1{}^T)(P_2-P_2{}^T)$ を極大にすることによって一義的な解を Pareto optimal な曲線上に定めることが出来る．又 optimal threat point は(1)では (P_2-P_1) を利得とする零和2人ゲームの均衡解として定めたのに対応して，ここでは $\left(P_2-\left(\frac{\partial P_2}{\partial q_1}\Big/\frac{\partial P_1}{\partial q_1}\right)P_1\right)$ を利得とするゲームの均衡解として与えられることになる．このことは第1図を用いて次のような手続を与える．図で ABCD で囲まれる部分は到達可能な $(P_1,\ P_2)$ の集合である．われわれが関心を持つのは右上方の境界上の点即ち Pareto optimal な曲線上の点，BCD である．この境界上に $(q_1,\ q_2)$ があるための条件は $|J|=0$ である．図で T は上述の意味で最良の「脅かし」の点を，C は最終的な生産量の組に対応する利潤点，即ち解点である．FCG は BCD に C で接している．この点は $(P_1-P_1{}^T)(P_2-P_2{}^T)$ を極大にする点に他ならない．従って TC はこれと符号が逆の勾配を持つ直線で $P_2-\left(\frac{\partial P_2}{\partial P_1}\Big/\frac{\partial P_2}{\partial q_1}\right)_{q_1=q^C}$ $=$const. なる直線である．T の座標は threat point$(q_1{}^T,\ q_2{}^T)$ に対応する利潤の組 $(p_1{}^T,\ p_2{}^T)$ である．k_1 は $q_1=q_1{}^T$ であるときに q_2 を様々に変えて得られる利潤の組を示す曲線であり，k_2 は $q_2=q_2{}^T$ としたときの類似の曲線である．T および C が上述の意味で解であるための条件は k_1 が TC より完全に下方にあり，k_2 TC がより完全に上方にあるということである．しかしながら k_1, k_2 は微係数を持つから T で k_1 と k_2 とは接しなければならない．従って上述の行列式 $|J|$ は T においても O でなければならない．これは T が(1)で述べた threat curve の上にあることを要請する条件に他ならない．ところで FCG の勾配は



第1図

$$\frac{\dfrac{\partial P_2}{\partial q_1}}{\dfrac{\partial P_1}{\partial q_1}}=\frac{\dfrac{\partial P_2}{\partial q_2}}{\dfrac{\partial P_2}{\partial q_2}}$$

であり，TCの勾配は $\dfrac{p_2{}^C-p_2{}^T}{p_1{}^C-p_1{}^T}$ であるから，解を求めるための条件式は

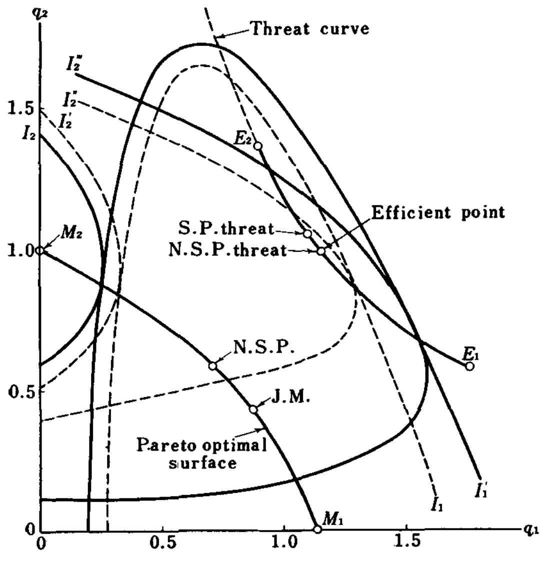
$$\frac{\dfrac{\partial P_2}{\partial q_i}}{\dfrac{\partial P_1}{\partial q_i}}=D_i$$ と定義すれば次のようになる．

$$-D_1{}^C=-D_2{}^C=\frac{p_2{}^C-p_2{}^T}{p_1{}^C-p_1{}^T}=D_1{}^T=D_2{}^T$$

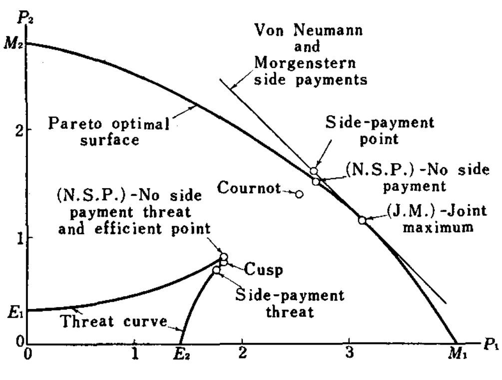
これを解いて $q_1{}^C$, $q_1{}^T$, $q_2{}^C$, $q_2{}^T$ が同時に与えられることになる．

第1表

	q_1	q_2	p_1	p_2	p_1+p_2	p
Cournot	0.9386	0.7400	2.5346	1.3581	3.8927	6.6428
Eff. point	1.1716	0.9411	1.8437	0.7812	2.6249	5.7747
von Neumann	0.9161	0.4125	——	——	4.1991	7.3428
Side payment	0.9161	0.4125	2.6299	1.5692	4.1991	7.3428
S. P. threat	1.1196	1.0000	1.8214	0.7607	2.5821	5.7607
N. S. P	0.7812	0.5817	2.6913	1.4644	4.1557	7.2742
N. S. P. threat	1.1708	0.9419	1.8436	0.7811	2.6247	5.8873



第2図



第3図

この表と図2葉とは以上で得た結果を総括的に示したものである．表で N. S. P threat, S. P. threat とあるのは夫々 no side payment threat および side-payment threat の略である．

第2図は2つの企業の戦略，即ち生産高を座標として表現されている．図中の I_1，I_2 等は夫々企業 1，2 の等利潤曲線で1にとってはより下方にあるものが，2にとってはより左方にあるものがより高い利潤を与えるようなものである．又 E_0，E_1 はそこで利潤が0となってしまう境界点であり夫々第3図の記号と一致するものである．第3図は利潤 P_1，P_2 を座軸とするように第2図を変換したものである．

この簡単なモデルにおいてさえ興味ある事実がいくつか見られる．特に collusion が如何に生産高を制限して価格と利潤を高めているかということが明瞭に出ている．注目すべきことはこのような効果が side-payment が禁止されている場合にも依然存在しているということである．したがって公然たる collusion が法律によって規制される場合には自然このような暗黙の collusion を生ぜしめることとなろう．更にこの場合注意すべきことは公然たる collusion が行われる場合よりも生産高は大きく価格は低くなっているが，平均生産費がより低い企業1はかえって side-payment のある場合よりも多くの利潤を獲得していることで，この企業にとっては side-payme-nt が禁止されることの方が望ましいという常識とは多少異った結果を生じている．

§2.　三者独占の場合

2.1.　クールノー解，有効点

次に上記の2つの企業のほかに，なお第三の企業があって，その平均費用函数が次の形で表わされる場合を想定しよう．

$$\gamma_3=6-q_3+q_3^2$$

利潤は　$P_3=pq_3-\gamma_3q_3$　で表わされる．

ただし　$p=10-2(q_1+q_2+q_3)$　である．

これについて，二企業の場合について述べたいくつかの解がどうなるかを調べよう．

まずクールノー解，すなわち均衡点を求める．それには二企業の場合と同じく

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_i}=0 \qquad i=1,\ 2,\ 3$$

を満足する q_i を求めればよい．すなわち連立方程式

$$\begin{aligned} p&=4+3q_1^2\\ &=5+3q_2^2\\ &=6+3q_3^2\\ p&=10-2(q_1+q_2+q_3)\end{aligned}$$

を解けばよい．この解を求め，かつ夫々の利潤も計算すると，

$$\begin{aligned} q_1&=0.876 & P_1&=2.110\\ q_2&=0.658 & P_2&=1.003\\ q_3&=0.316 & P_3&=0.163\\ p&=6.300 \end{aligned}$$

となる．これを二企業の場合のクールノー解とくらべると，P_1 と P_2 が小さくなっていることがわかる．このことは企業の数がふえて，それだけ競争が激しくなったことを思えば，当然のことである．

次に三企業が合同して利潤合計を最大にする場合を考えよう．それは，

$$p-2\sum q_j=\frac{\partial}{\partial q_i}(q_i\cdot\gamma_i)\quad i=1,\ 2,\ 3$$

ただし $$q_i\geqq 0$$

の解として与えられる．この場合には，

$$q_1=0.916\qquad q_2=0.413\qquad q_3=0$$

$$P_1+P_2+P_3=4.199$$

となり，能率の悪い第三の企業は全く生産しない方がよいことになる．そうして q_1，q_2 は二企業の場合に最大結合利潤を与える q_1，q_2 の値と一致する．

次に最有効点を求めよう．それは，

$$p=\frac{\partial}{\partial q_i}(q_i\cdot\gamma_i)$$

ただし $$P_i\geqq 0\qquad i=1,\ 2,\ 3$$

$$p=10-\sum q_i$$

を解くことによって求められる．しかしここではこの最有効点はやや特殊な形になっていることに注意しよう．

まず $q_3=0$ でなければならないことを示す．

もし $q_3>0$ とすると，第三の企業が利潤をあげなければならないから，

$$p\geqq\gamma_3=q_3{}^2-q_3+6$$

とならなければならない．これより

$$p\geqq 5.75$$

しかるにこのことは，$q_1+q_2+q_3\leqq 2.125$ を意味する．他方

$$\begin{aligned}p&=4-2q_1+3q_1{}^2\\&=5-2q_2+3q_2{}^2\\&=6-2q_3+3q_3{}^2\end{aligned}$$

であるから，$p\geqq 5.75$ ならば

$$q_1\geqq 1.167\qquad q_2\geqq 0.933\qquad q_3\geqq 0.5$$

$$q_1+q_2+q_3\geqq 3.1$$

となって矛盾を生ずる．

したがって $q_3=0$，q_1，q_2 の値は二企業の場合と一致して，

$$q_1=1.172\qquad q_2=0.941$$

$$p=5.774$$

となる．

しかしここで注意すべきことは，この p の値は上記の限界 5.75 より僅か大きく，したがってこの p の値に対しては，第三の企業は生産をして利潤をあげることができることになる点である．しかし実際に利潤を上げるためには第三の企業の生産量はかなり大きくなければならず，そのためもしそれだけ生産をするとすれば価格が低落して損失を生ずることになるのである．

こういう点から考えると，第三の企業は全体的に見た場合，有効な働きをしないものであり，したがってそれは「過剰設備」を表わすものと見なすことができるであろう．しかしこのことは決して市場における競争に，第三の企業が影響力を持たないことを意味するものではない．

2.2. 二者協同

次に部分的な協同を考えよう．まず第一と第二の企業が連合する場合を考える．簡単のために，side payment が許されるものとし，二企業は協同して，利潤の和をなるべく大きくするように行動するものと想定しよう．

まず両企業が合わせて $q_0=q_1+q_2$ を生産するとき，費用合計は

$$C=4q_1-q_1^2+q_1^3+5q_2-q_2^2+q_2^3$$

であるから，これを最小にする q_1，q_2，

$q_1+q_2=q_0$，$q_1\geq 0$，$q_2\geq 0$ を求めると，

$q_0\leq 1$ のとき，

$$q_1=q_0 \qquad q_2=0$$

$$C_0=C\,\mathrm{min}=4q_0-q_0^2+q_0^3$$

$q_0\geq 1$ のとき

$$q_1=\frac{1}{2}\left(q_0+\frac{1}{3q_0-2}\right),\quad q_0=\frac{1}{2}\left(q_0-\frac{1}{3q_0-2}\right)$$

$$C_0=\frac{1}{4}q_0^3-\frac{1}{2}q_0^2+\frac{9}{2}q_0-\frac{1}{4(3q_0-2)}$$

となる．

ここで，第一第二の企業が合同したものと，第三の企業との間の複占の状況を考えよう．前者の費用函数は C_0 で与えられ，利潤は

$$P_0=pq_0-C_0$$

と表わされる．

まずクールノー解を求めると，

$$\frac{\partial P_0}{\partial q_0}=0, \qquad \frac{\partial P_3}{\partial q_3}=0$$

より，

$$q_0=0.988=q_1 \qquad q_2=0$$

$$q_3=0.557$$

$$p=6.930$$

そうして $P_0=2.907$

$P_3=0.320$

となる.

この結果は一見奇妙に思われる. なぜなら先に三者が別個に行動した場合のクールノー解によれば, $P_1+P_2=3.113$ であったから, 第一第二の両企業は合同することによって, かえって利潤の和を減じた, いいかえれば損をしたことになっている. これに対した仲間はずれにされた第三の企業は利潤を 0.163 から 0.320 へ倍加させることができることになる.

しかしこのパラドックスは次のようにして説明することができる. 例えば, 三者が独立に行動しながら, 先に述べたクールノー解に達していたと仮定しよう. このとき第一第二の企業が合同を行ったとすれば, 合同した企業は, 第三の企業がその生産量を変えないものと仮定する限り, 利潤を最大にするために,

$$q_0=q_1+q_2=1.17$$

として $P_0=3.41$

の利潤を期待するであろう.

しかしもし合同した企業が実際に生産量を $q_1+q_2=1.534$ から 1.17 に減らすならば, それに応じて第三の企業は生産量を増加させて利潤を増すことができる. しかし第三の企業が生産量を増せば, 合同した企業は予期した利潤を得ることができなくなるであろう. したがって合同した企業は生産量を減ずることによって, 第三の企業の利潤を確実に増加させるが自分達の利潤は増すことになるか減らすことになるかわからないということになる. 即ち下手な行動をとるカルテルはかえってアウトサイダーだけを富ませることになるわけである.

しかしこのようなことは, 相手の行動の変化を考慮に入れないクールノー解の概念の不充分さを示すものとも考えることができる.

実際, 合同した企業は 2.907 よりは多くの利潤を得ることが可能である. それには例えば $q_0=2$ とすれば, $p=10-2(q_0+q_3)=6-2q_3$ となるから, 第三の企業は生産をしても利潤を上げることができないことが確かめられる. したがって $q_3=0$, $p=6$

$$P_0=6\times 2-C_0=3.062>2.907$$

勿論ここで $q_3=0$ を前提にすれば, q_0 はもっと小さく$(=1.329)$とする方が利潤が大きくなることはいうまでもない. しかし実際に q_0 を小さくすれば p が上昇し, その結果第三の企業が生産を開始することになって, かえって損をすることになるとすれば, $q_0=2$ として第三の企業を「締め出し」ておくことは合理的とも考えられる.

次にこの合同した企業と第三の企業との間の複占において,「協同」(或いはむしろ「交渉」という方がよいであろう)を考えよう.

Jacobian 条件は,

$$\begin{vmatrix} 10-2q_3-4q_0-C_0'(q_0) & -2q_0 \\ -2q_3 & 4-2q_0-2q_3+3q_3^3 \end{vmatrix}=0$$

と表わされる．これから pareto 条件，および曲線 threat が得られる．

ところで threat 曲線の上では，$q_3>0$ ならば，$P_3<0$ となってしまうことがわかるから，有効な threat の点は $q_0=2$, $q_3=0$ だけとなる．したがってこれが最適な threat である．(threat 曲線の勾配が 45° となる点を求めると $q_0=1.327$, $q_3=0.868$ となるが，このとき勿論 $P_3<0$)したがって，side payment を許す場合の Nash の解は

$$P_0=3.062+\frac{1}{2}(4.199-3.062)=3.631$$

$$P_3=\frac{1}{2}(4.199-3.062)=0.568$$

となる．

同様にして，第一と第三，第二と第三の企業が合同した場合の解を求めると

第一，第三の合同の場合

	q_1+q_3	q_2	P_1+P_3	P_2	P
クールノー	0.939	0.740	2.535	1.358	6.643
S. P. threat	1.120	1.000	1.821	0.761	5.761
Nash	0.916	0.413	2.630	1.569	7.343

第二第三の合同の場合も，q_2 が q_2+q_3 に，P_2 が P_2+P_3 にかわるだけで，全く変化しない．即ちこれらの場合，第三の企業は全く有効な働きをしないことになる．

3.2. 三者協同

ここで三つの企業の間の関係を Neumann の考え方に従い，$P_1+P_2+P_3=4.199$ を三者の間で分配する問題と考えれば，上記の三つの Nash 解は，3 人一定和ゲームの特性函数を与えるものと考えることができる．即ち

$$v(1,\ 2,\ 3)=4.199$$

$$v(1,\ 2)=3.631 \qquad v(3)=0.568$$

$$v(1,\ 3)=2.630 \qquad v(2)=1.569$$

$$v(2,\ 3)=1.569 \qquad v(1)=2.630$$

をゲームの value を与える函数と考えることができる．しかしここでは，

$$v(1,\ 2)<v(1)+v(2) \quad 等$$

となってしまっているから，Neumann の特性函数の条件は成立していない．したがってこの場合には Neumann の理論は適用できない．

次に Nash の考えをやや拡張した Harsanyi に従って，三者の間の交渉を考えてみよう．そのとき，それぞれの企業は交渉を拒否すれば，S. P. threat の利潤に甘んじなければならないと

すれば,

$$P_1=1.821, \quad P_2=0.761, \quad P_3=0$$

となるから，この点を no trade point として，最大利益との差を三等分するとすれば,

$$P_1=2.360, \quad P_2=1.300, \quad P_3=0.539$$

となる.

またこの Harsanyi の解を前提にすれば，次のように考えることもできよう.

3企業がそれぞれ生産量を q_1, q_2, q_3 とする結果得られる利潤が(P_1, P_2, P_3)であるとしよう．この点を基準にして，最大利潤4.199との差額を上に述べた方式に従って配分するとすれば，夫々の得る利潤額は結局,

$$P_1{}^*=P_1+\frac{4.199-(P_1+P_2+P_3)}{3}=\frac{2P_1-(P_2+P_3)}{3}+1.400$$

$$P_2{}^*=\frac{2P_2-(P_1+P_3)}{3}+1.400$$

$$P_3{}^*=\frac{2P_3-(P_1+P_2)}{3}+1.400$$

となる．したがって各企業が $P_1{}^*$, $P_2{}^*$, $P_3{}^*$ を最大ならしめるように行動するものとすれば，結局問題は Neumann の一定和3人ゲームに帰着する．そこで特性函数を求めてみると,

(Ⅰ, Ⅱ)対Ⅲの場合におけるミニマックス解を求めると,

$$\frac{\partial}{\partial q_0}\{(P_1+P_2)-2P_3\}=0, \qquad \frac{\partial}{\partial q_3}\{(P_1+P_2)-2P_3\}=0$$

ただし　$q_0=q_1+q_2$

より

$$q_0=1.586 \qquad P_0=2.057$$

$$\begin{cases} q_1=0.974 \\ q_2=0.612 \end{cases} \qquad \begin{cases} P_1=1.555 \\ P_2=0.502 \end{cases}$$

$$q_3=0.623 \qquad P_3=-0.104$$

$P=5.582$　（負の利潤もここでは許されるものとする）

$$P_0{}^*=v\{1,\ 2\}=3.554$$

$$P_3{}^*=v\{3\}=0.645$$

同様に(Ⅰ, Ⅲ)対Ⅱについてミニマックス解を求めると,

$$q_0=1.298 \qquad P_0=1.772$$

$$\begin{cases} q_1=1.298 \\ q_3=0.000 \end{cases} \qquad \begin{cases} P_1=1.772 \\ P_3=0.000 \end{cases}$$

$$q_2=0.826 \qquad P_2=0.740$$

$$p=5.752$$

$$P_0{}^*=v\{1,\ 3\}=2.897$$

$$P_2{}^*=v\{1\}=1.302$$

(Ⅱ，Ⅲ)対Ⅰについて $q_0=1.531$　　$P_0=-0.281$

$$\begin{cases} q_2=0.958 \\ q_3=0.573 \end{cases} \qquad \begin{cases} P_2=0.109 \\ P_3=-0.390 \end{cases}$$

$$q_1=0.932 \qquad P_1=1.060$$

$$P=5.074$$

$$P_0{}^*=v\{2,\ 3\}=1.999$$

$$P_1{}^*=v\{1\}=2.200$$

ここで $v(1)+v(2)+v(3)=4.147$ となっているから，このゲームは inessential な場合に近い．しかしとにかく Neumann の解を求めてみると，その対称解は

$$(2.226,\ 1.328,\ 0.645)$$

$$(2.200,\ 1.328,\ 0.671)$$

$$(2.226,\ 1.302,\ 0.671)$$

の3つの配分の組として与えられる．

なおここでしたのと同じような計算を，第三の企業の費用函数があまり高くなく，

$$r_3=4.5-q_3+q_3{}^2$$

と表わされる場合について行なった結果は，次のようになる．

第 2 表

	q_1	q_2	q_3	P_1	P_2	P_3	p
Cournot	0.800	0.553	0.688	1.406	0.654	1.623	5.918
efficient p.	0.996	0.657	0.855	0.984	0.137	0.520	4.984
joint maximal	0.816	0.000	0.592	2.720	0.000	1.733	7.184
					4.453		
(Ⅰ，Ⅱ)versus Ⅲ							
Cournot	0.917	0.000	0.821	2.384	0.000	1.782	6.524
threat p.	0.916	0.411	1.061	1.308	0.192	0.681	5.224
				1.500			
Nash				2.636		1.817	
(Ⅱ，Ⅲ)versus Ⅰ							
Cournot	0.917	0.000	0.821	2.384	0.000	1.782	6.524
threat p.	1.120	0.529	0.786	1.116	0.201	0.627	5.130
					0.828		
Nash				2.370	2.083		
(Ⅰ，Ⅲ)versus Ⅱ							
Cournot	0.747	0.683	0.370	1.934	1.104	0.789	6.400
threat p.	0.816	1.000	0.592	1.089	0.184	0.548	5.184
				1.637			
Nash				2.953	1.500		

次に side payment が許されない場合を考えよう．まずヤコビアン条件は次のように表わされる．

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial P_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial P_2}{\partial q_1} & \dfrac{\partial P_3}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial q_2} & \dfrac{\partial P_2}{\partial q_2} & \dfrac{\partial P_3}{\partial q_2} \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial q_3} & \dfrac{\partial P_2}{\partial q_3} & \dfrac{\partial P_3}{\partial q_3} \end{vmatrix} = 0$$

これを解いたものは三次元の$(q_1,\ q_2,\ q_3)$空間における曲面を表わす．そこでこの曲面が何を表わしているかを考えよう．

上記の行列式の条件は，q_1，q_2，q_3 か微小量変化したときの P_1，P_2，P_3 の変化

$$\triangle P_1 = \frac{\partial P_1}{\partial q_1}\triangle q_1 + \frac{\partial P_1}{\partial q_2}\triangle q_2 + \frac{\partial P_1}{\partial q_3}\triangle q_3$$

$$\triangle P_2 = \frac{\partial P_2}{\partial q_1}\triangle q_1 + \frac{\partial P_2}{\partial q_2}\triangle q_2 + \frac{\partial P_2}{\partial q_3}\triangle q_3$$

$$\triangle P_3 = \frac{\partial P_3}{\partial q_1}\triangle q_1 + \frac{\partial P_3}{\partial q_2}\triangle q_2 + \frac{\partial P_3}{\partial q_3}\triangle q_3$$

の間に，$\triangle q_1 : \triangle q_2 : \triangle q_3$ の比に無関係に，つねに

$$A_1\triangle P_1 + A_2\triangle P_2 + A_3\triangle P_3 = 0$$

の関係が成立することを意味している．そこで係数 A_1，A_2，A_3 の符号に応じて4通りの場合にわけられる．

1) A_1，A_2，A_3 がすべて同符号．この場合には $\triangle P_1$，$\triangle P_2$，$\triangle P_3$ はすべてが同時に正，あるいは同時に負となることはできない．即ち P_1，P_2，P_3 をすべて増加させ，あるいはすべて減少させることはできない．このような点は pareto 極大(極小)を表わしている．そこでこれに対応する曲面を pareto 曲面とよぶ．

2) A_1A_2 が同符号，A_3 が異符号．この場合 $\triangle P_1$，$\triangle P_2$ が正ならば，$\triangle P_3$ も正，(負なら負)となるから，P_1P_2 を同時に増加させながら，P_3 を減少させることはきでない．いいかえれば(Ⅰ，Ⅱ)に関しては極大，(Ⅰ，Ⅱ)とⅢに関しては threat の関係にある．この場合点は(Ⅰ，Ⅱ)-Ⅲ threat 曲面の上にあるという．

3) A_2，A_3 が同符号，A_1 が異符号．この場合は(Ⅱ，Ⅲ)-Ⅰ threat 曲面に対応する．

4) A_3，A_1 が同符号，A_2 が異符号(Ⅰ，Ⅲ)-Ⅱ threat 曲面に対応する．

結局一般に1つの pareto 曲面と，3 つの threat 曲面とが得られることになる．

先にあげた場合について，ヤコビアン条件を表わすと

$$\begin{vmatrix} 6-2(q_1+q_2+q_3)-3q_1^2 & -2q_2 & -2q_3 \\ -2q_1 & 5-2(q_1+q_2+q_3)-3q_2^2 & -2q_3 \\ -2q_1 & -2q_2 & 4-2(q_1+q_2+q_3)-3q_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

となる．これを展開すると，例えば q_1 についての4次方程式が得られるから，一般に4つの面が得られ，それらが夫々上記の4つの場合に対応するものとなるであろう．

特に $q_3=0$ としたときの断面を見ると，その場合には二企業の場合のヤコビアン条件と $q_1+q_2=2$ とが得られる．前者から2曲線は夫々 pareto 曲面，および(Ⅰ，Ⅲ)-Ⅱ threat かつ(Ⅱ，Ⅲ)-Ⅰ threat(この2つはここでは一致している)曲面の断面を表わし，$q_1+q_2=2$ は(Ⅰ，Ⅱ)-Ⅲ threat 曲面の断面を表わしている．

これらの曲面を前提にして二企業の場合で考えたのと同じ方式に従い，かつ三企業で side payment が許される場合と同じような方法で，side payment が許されない場合の解を求めてゆくことができるが，計算が複雑になるので省略する．

4企業以上になっても，本質的には同じ考え方が適用されるが，情況は一層複雑となる．しかし，例えば企業の数が多くなるにつれて，

$$\frac{\partial p}{\partial q_i}\longrightarrow 0$$

となるならば，クールノー解は，有効点解に近づき，限界企業の利潤は0になって，完全競争の条件に近づくことは簡単に示される．

参考文献

Cournot, Augustin A. 「富の理論の数学的原理に関する研究」(岩波文庫)

Nash, J. F. The Bargaining Problem, *Econometrica vol. 18*

〃 Non-Cooperative Games, *Ann. Math. vol. 54*

〃 Two-Person Cooperative Games, *Econometrica vol. 21*

Nash, J, et al. A comparison of Treatments of a Duopoly Situation, *Econometrica vol. 21*

Neumann, J., von & Morgenstern, O, Theory of Games and Economic Behaviour. Princetson University press, 1944

Shubik, M. Strategy and Market Structure. John Wiley & Sons, 1959