コックスの再生問題 (Cox's renewal problem) について

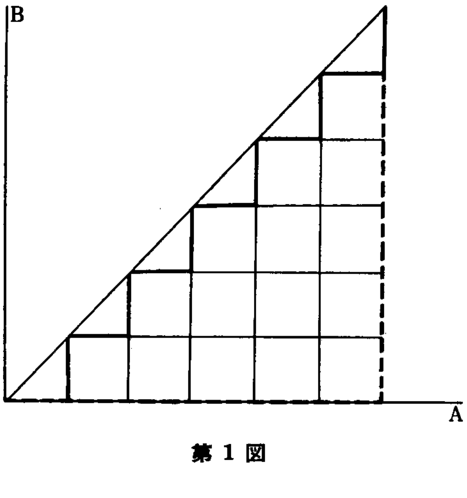
Prof. D. V. Lindley*

この問題は通常，婦人靴下の問題といわれ，ある婦人がいくつかの靴下を買い，1対ずつはくが，途中で何回でもとりかえてはくことにすると，だんだんすり切れて最後に1つだけまだすり切れていないものが残るということになる．そこで問題はその御婦人としてその残った靴下の余命の期待値を最小にするにはどういうはき方をしたらよいか，というはき方の strategy の問題である．

少し問題を一般化すると，n 個の靴下があって，その中 k 個だけが同時に用いられ，途中でとりかえを繰返してあらかじめ指定した数になったら使用を停止するという過程をとるということになる．

これは非常に一般的なので問題を簡単にして考えてみる．いま2つのものがあって，いつもその中のどれか1つだけを使うとし，何回かとりかえて使っている中に，その1つがだめになったらそれで終りということにする．すなわちいつでも1つの予備をもっているという方針の場合である．

議論を進めていくのに，時間を離散的に考えるのと連続的に考えるのと，そのどちらか便利な方を用いた方がよいが，まず離散的な場合から始める．すなわち考察の対象になるものがだめになることが，時刻 t, $2t$, $3t$, …においてのみ起り得るということである．



第1図

この状況は第1図のような格子で表わされる．水平方向は1つのものAを使い，垂直方向は他のものBを使うことを意味する．この図の太い線がその1つの strategy を示している．この図が対角線の下半分しかないのは，つねにAの方がBより余計に使われているとして一般性を失わないからである．（この図ではAもBも $N=6$ 以上の寿命はないとしている．）

λ_n は年齢 nt でこのものがだめになる確率とし既知の値とする．そこでA, Bの年齢がそれぞれ it, jt であるという状態について

$$\mu_i \mu_j \lambda_j$$

$$\mu_i \mu_j \lambda_j (i+j) t$$

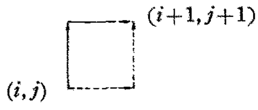
---

* 昭和35年6月13日 ISI セミナーにおける要旨．昭和35年10月31日受理．

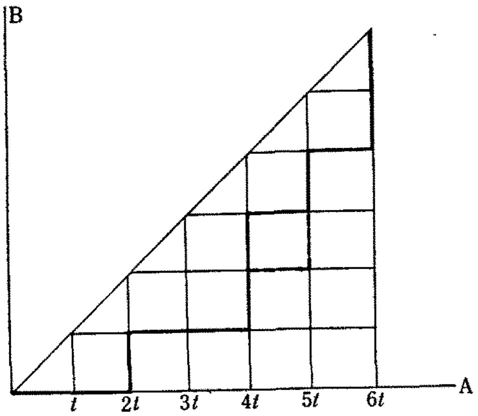
が考えられる.

［(河田教授による補足) 第1式はAが年齢 it, Bが年齢 jt という状態にあるとき，その次にBを使用したところだめになるという確率を示し，又第2式はある path (例えば第1図の太線―― strategy といってもよい) をとって，だめになるまでの時間の平均値を考えたとき，この path の一部分である $(it,\ jt)\longrightarrow(it,\ (j+1)t)$ のこの平均値への寄与を示している.］

今 path の一部分である状態 $(it,\ jt)$ から $(it,\ (j+1)t)$ を経て $((i+1)t,\ (j+1)t)$ へ移行する部分を考え (第2図の太線)，これを第2図のように破線でおきかえたものも考える．この2つを比較すると答は簡単で，$\lambda_i<\lambda_j$ ならば破線すなわちまずAを次にBを用いるのがよく，$\lambda_i>\lambda_j$ ならば太線すなわちまずBを次にAを用いるのがよい．この方法で1つの path (strategy) が考えられたとき，それを改良してもっと良い strategy を得ることが出来る.



第 2 図



第 3 図

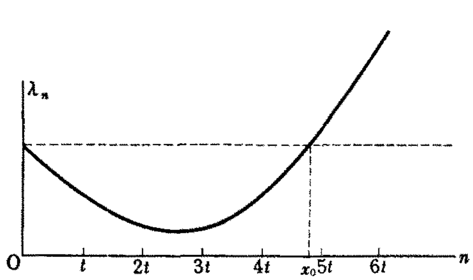
ここで簡単な場合として λ_n が単調増加の場合を考える．このときは任意の path が与えられたとき，上の方法で次々に改良してゆけば第3図の太線のようになる．すなわちなるべくひんぱんにAとBとをとりかえて用いた方が良い．これは古くなればだめになる確率が大きくなるからである．もし λ_n が単調減少ならば strategy の改良の仕方は逆で最後は第3図の破線の示す strategy になる．すなわち1つのものを使ったら，連続して使うことになるので垂直方向は心配しなくてよい．これは Cox のもとの論文 (Jour. Roy. Stat. Soc., B, 21, (1959) 180—9) でも議論されているが，ある条件の下でこれが最適であることが示される．この2つの場合の寿命の期待値はそれぞれ

$$t(\mu_1\lambda_1+2\mu_2\lambda_2+3\mu_3\lambda_3+\cdots\cdots)=t\sum n\mu_n\lambda_n$$

$$t\sum 2n\mu_n^2\lambda_n+t\sum(2n+1)\mu_{n+1}\mu_n\lambda_n$$

になる.

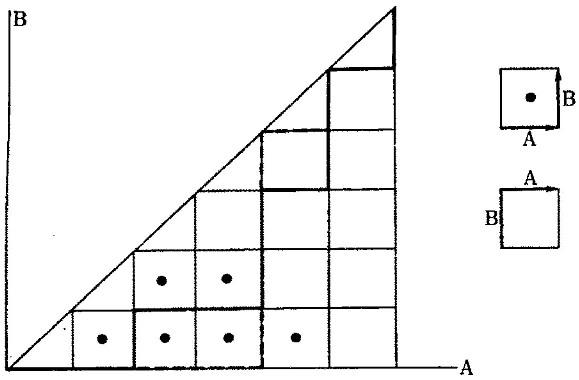
こういう最適な strategy を求める問題は Bellmann のダイナミック・プログラミング，したがって変分の方法で出来るのだが，以下ではこれを使わず，今迄の方法で行うことにする.



第 4 図

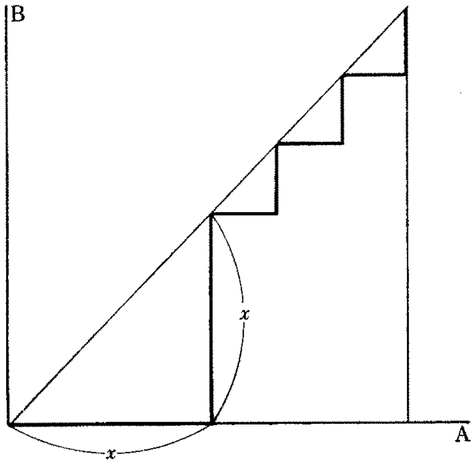
これまでは λ_n が単調の場合をとりあつかったが，今後は λ_n が第4図の様な (始め減少して，あるところから増大する) 場合を考える．どういうよ

にうすればよいかというと，前の論法で第5図で・のうってあるます目はまずAを次にBを使うstrategy に改良した方が良く，点のうってないます目はその逆が良い．したがって第5図の太線のあらわす strategy は図の点線の部分のように改良出来る．しかしこのように修正した strategy はたしかに前のものよりよくはなっているが最良であるとは必ずしもいえない．



第5図

そこでまずAを年齢xだけ用い，それからBを年齢xだけ用いれば，その後のλ_n は単調増加になって前に議論した場合になるから，後はAとBを交互に用いることになる．この strategy を S_x とよぼう．xとして種々の値を与えたときのこの様な strategy S_x の集りだけを考察の対象にすれば良いことは明らかである．



第6図

この場合 S_x という strategy を採用したときの平均寿命を最大にする様なxを求めれば良いのだが，そのためには問題を連続化して考える（$N\to\infty$）ことにする．そこでこのものが年齢 t ではまだだめにならないが，$t+\delta t$ までにはだめになる確率を $\lambda(t)\delta t+o(\delta t)$ とすれば，t 以上生きる確率は $p(t)=\exp\{-\Lambda(t)\}$ である．但し $\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(s)ds$. これを用いると strategy S_x を用いるときの平均寿命は

$$[1+e^{-\Lambda(x)}]\int_0^x e^{-\Lambda(t)}dt+2\int_x^\infty e^{-2\Lambda(t)}dt$$

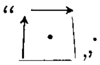
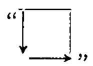
となる．最適解を見出すためには，上式が1つの変数xで表わされているから，微分して0とおけば良い．この strategy は直観的には sensible なものである．これまではいわば常識的な結果で，最初Aを用いて，次にそれと同じ時間だけBを用い，その後は λ_n が単調だから前に示した様にAとBとを交互に用いることになる．直観でゆくのはこの辺までで，後は微分法を用いて．結果は

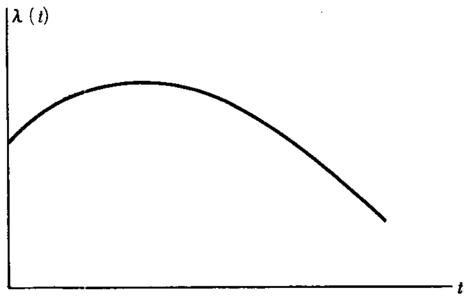
$$Q(x)=\int_0^x e^{-\Lambda(t)}dt$$

と定義すると

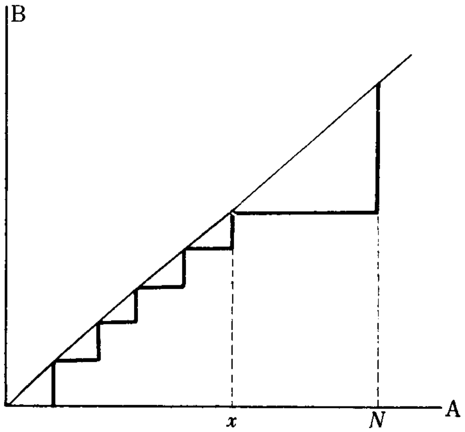
$$\lambda(x)=\frac{1-p(x)}{Q(x)}$$

が最適な x を与える方程式である．細かいことはいわないが，$0<x<x_0$ なる範囲に unique な解があることが証明される．(x_0 については第4図参照) この辺で皆様方からお話をうかがいたい．上の方程式から求まる x が，この方程式からわかるように $0<t<x_0$ における $\lambda(t)$ の値だけで決定されるということがどうもピンとこない．これは Cox も考えていないし他の人も考えていないが，このことの直観的な意味づけを考えられないのは驚くべきことである．

今度は $\lambda(t)$ が第7図のようになる場合，つまりこのものを用いると時刻がたつにつれて最初のうちは生存率が悪くなるが，あるところを越えるとよくなる場合を考える．このときは前の場合と逆に点のついたます目は""，点のうってないます目は""のように strategy の変形を行えばよい．この場合の complete class of strategy は第8図のようなものになることは常識的にもわかる．この class の中の最適な strategy を与える x を求めるためには



第 7 図



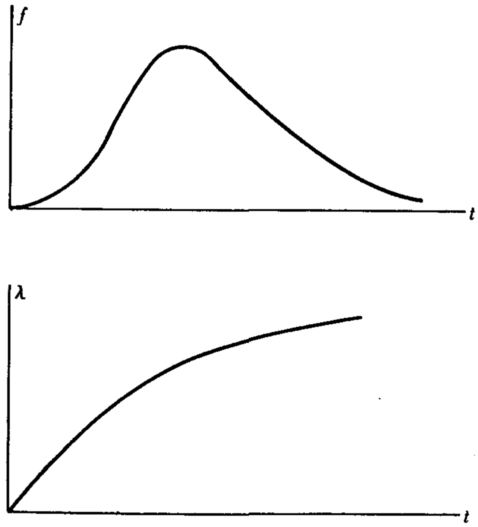
第 8 図

$$\lambda(x)=\frac{p(x)}{\mu-Q(x)}$$

を解けばよいことになる．ここに μ は1つの成分 (A又はB) の平均寿命である．これから得られる最適な x は $\lambda(t)$ の全体の様子に関連してきまってくる．この x は Cox が考えたように，その点での残りの寿命が最大なものを選ぶことになることで，前の場合の最適な strategy とは違っている．

ここで1つ考えたいことは $\lambda(t)$ の性質と $p(t)$ の関連である．$1-p(t)$ は分布函数で $-p'(t)=f(t)$ は密度函数である．密度函数 f のグラフが第9図のようになっていても，λ は単調に増大する函数として得られる．f が時間が経過すると小さくなって，だめになる割合が減少するように見えるが，実際は λ すなわちだめになる割合は増加しつつあるのでその辺ではもう既にだめになってしまっているものが沢山あるから f が減少しているのである．

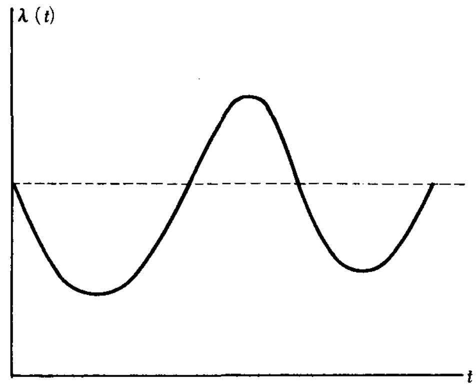
もう1つ述べたいことは，実際問題として，上の trivial な場合からもっと面白い場合に議論を進めることで，もっと沢山の成分があり，また一度にもっと沢山のものが使われる場合である．この論文を書いたときはまだそういうことを考えなかったが，これを一般化するときは，すなわち n 個の成分と k 個の spare をもつ場合には，2次元の格子の代りに $n+k$ 次元の格子を考え



第 9 図

てやれば解決出来ると確信している．

もう1つの点は $\lambda(t)$ の型が一般的な場合を考えることだが，今迄のところパッとした



第10図

結果は得られていない．$\lambda(t)$ のグラフが第10図のようなときは原理的には2つの変数の函数を微分することになるが，そういう一般的な場合は最適な strategy が簡単にわからない．$\lambda(t)$ についての相当な知識が必要になる．

今考えられる問題で私自身さっぱり進んでいない問題は，この最適な strategy が，ほんとにこれに従わなければならない sharp max か又は flat max かという点である．sharp max ならそれを見出す労力を投入するだけの価値があるが，flat max ならば，最適解 x のだいたいの値を用いればよいことになる．この問題がむずかしいのはある strategy をとったときの寿命の期待値を表わす正確な式が簡単に取り扱えないという点にあるのである．

質 疑 応 答

〔問〕 たとえばあるところまで使って休養させるわけだが，休養の時間に depend して λ が変ってくる，つまり休養によって恢復してくるような場合はどうか．

〔答〕 どこまで使ったかという量の他に，どれ位休んだかという量がはいってきて2変量の問題になるから，ずっと複雑になるだろう．しかし大変良い問題で，research student にとっての good subject だ．一般化についてもう少し触れたい．イギリスでは Vijda 博士が似た問題をやっているが彼のは deterministic な取り扱いである．

〔問〕 discrete の場合には LP の問題に似てますね．

〔答〕 彼は DP の問題として取り扱い，その方程式を作り，解くのに成功した．

〔問〕 公表されているか．

〔答〕 Birmingham での conference で話を聞いた．なお，DP は Bellman の云っているように彼の独創ではなく，Wald の statistical descision function にその概念は含れていると思う．

〔問〕 λ_n を需要函数と考え，A と B の2つの製品をいつどの位作製するかを policy とみれば，在

庫問題に応用出来るのではないか.

〔答〕 数学的にいろいろやってみないと何とも云えないが，どうやらやってゆけそうに思える.

〔問〕 そのときAとBの scale を変えないとならないと思う.

〔答〕 その通り．またAは金がかかるがいい方法で，Bは金はかからない方法というときも同じような問題だろう．なお，Bellman の idea は大変立派だし，その方程式もいいんだけれども，その解が得られたものは少い．解を得るいい方法を考え出さないと，なかなか使いものにはならないだろう.

〔問〕 max という operation は

$$\max|f(x)|=\lim_{p\to\infty}\left(\int f^{p}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

という関係があることから，すべての path の寿命の平均を考えることで近似するという方法をとってみるとよいかもしれない．たとえば $p=2$ のときには解析は容易になる．これは1つの提案である.

〔答〕 大変面白い．考えたことはなかったが，よい suggestion だと思う.

〔問〕 私には1つの経験がある．極限定理の問題において，Lévy の maximum concentration funcion を mean concentration function で置換えた結果，計算は容易で同じ結論が得られた.

〔問〕 使っていないでも時間が経つとだんだんだめになってゆく品物もある．そういう場合はどうか.

〔答〕 それは先程の2変数の場合に含まれる.

以上でセミナーについての質疑を終り，queue と information を主題にした特別懇談会に移った.

〔問〕 queue の一般産業への応用について.

〔答〕 私の O.R. における興味は主として理論的な問題なので実際的な話はあまり多くは知らないが若干申し上げられることがあると思う．queuing theory は実際に使われているが，多くの場合理論的前提になっている randomness のようなことがうまくあわない場合でも使われている．こういう場合 bad theory でもなんにもないよりはましであって，実際使われている状況を見ると，queuing theory の behavior は実際問題で予期されるものとは違って，いわば mathematical な fiction という形で表われる.

2つの例を知っている．1つは National Coal Board の石炭を運ぶタグの問題である．タグの数が多すぎると，もちろん港内が混雑し，少なすぎれば石炭がたまってしまう．queue のタイプとしては石炭を持出すところと，置くところとあり，いわゆる circular type の queue で，これは実際に解決して，約10%程タグの数を減らし，かなりの財政的節約をもたらした．もう1つは空港設計の問題である．この場合の queuing situation は大変難かしく，arrival に互に association がある．つまり1つの飛行機が遅れるとき同じ事情が他の飛行機にも影響を及して他の飛行機も遅れるし，server も沢山あるのに，つまり滑走路は何本もあるのに，それがどれも同様に使われるわけではなくて，大型の飛行機に使える滑走路などは決っている．そしてこの behavior は analytical に取り扱うのは困難なので，電子計算機を用いて simulation を行った.

Road Research Laboratory が queue に興味をもっているが形としては double queue, つまり十字路や．行き違いの道路の queue の問題という形で analytical には解けないで simulation に頼っているようである．また Transport Commission でも鉄道の最適利用という面から興味を持っているようである.

次に，simulation technique について少しお話したい．私自身はこれの最近の進歩については何も知らないけれど，英国におけるこの道の専門家は，K. D. Tocher (United Steel) であって，彼を中心に仕事がされているけれども，United Steel が発表を許可しないので，論文にはなっていない．私のお話し出来るのはその位のことである.

理論的な面で queue の分野での英国における第1人者は W. L. Smith であり，“こういう理論は出来ているかどうか”などということは自分で調べるよりも彼に聞いた方が早い.

〔問〕 traffic intensity ρ の推定の理論的，実際的検討についてお伺いしたい.

〔問〕 これは私の質問でもある．ρ が1に近いときは行列の長さの平均は急速に増えるから，実際問題では ρ の推定は精密に行われる必要がある．私の知っているのでは Clark の最尤推定量を求めた仕事 (A. M. S) だけだが，私の意見では統計学的見地

からみた queuing theory というものも重要な問題であって，こういう分野の仕事がもっとされなければならないと思う．

〔答〕 queue の長さがうんと長くなるとき，私はまず non-stationarity による影響か否かを推定することに大きな注意を向けるべきだと思う．それは stochastic process の推測論における重要問題の1つだが文献的にはまだないように思う．ρ の少しの変化が重要な影響を持つから，その推定は非常に注意深く行う必要があるということには同感である．

この後，坂口氏の発言から端を発し，国沢教授が情報理論の概念を case study に用いた経験（日本信販の問題等）について Lindley 博士に説明をし，同博士が大変興味を示し英語で発表することを強く望まれたが，かなりこれに時間を費したので，最後に次の質疑応答を行って，この有意義な懇談会を終えた．

〔問〕 O.R. の定義の meaning についてお伺いしたい．

〔答〕 英国では operational researhch というからそれに従うと，operational research は確率と統計の応用だと云える．ただ1つの例外は L.P. でこれは確率の概念を必要としないが，それ以外は確率・統計の応用にすぎない．英国で，広告で求人をするのに，殆んど同じ言葉で2つの個所に statistician と operational research worker とを募集すると，1人の統計学研究者の応募に対し100人の O.R. worker の応募がある．その理由は O.R. に応募する人は正規の統計学の訓練を受けていない人だからである．しかしながら，O.R. worker には統計学全般の訓練と，もちろん数学のコースの勉強も必要だと私は思う．要するに O.R. の機能は確率と統計の応用であって，それ以外の何物でもない．

（羽鳥，森村）