

## OR における予測の要素

水谷 一雄\*

経済予測は過去の現象の測定に基づかなければならない。

最近, Measurement without theory ということがしばしば語られる。しかし果して理論なしに測定が可能であろうか。或る地域における特定の石鹼の需要を調査するものとしよう。この場合には, その石鹼の需要が明確に規定されなければならない。さもなければ我々が見出したことの意味が曖昧になるのであるが, そのような意味ある定義なるものは, 何等かの経済理論の全構造を前提するものであることは, ここに特に強調しておきたい。

これを更に立入って明らかにするため, 株式取引所に上場されている或る株の株価変動の予測に例を採って説明しよう。

明らかに, 株式取引所における株の価格変動は, 取引所取引員による株の需給に依存する。換言すれば, 株価の変動は, その株に対する超過需要の函数である。

単純化のために, その函数が線型であるとすれば

$$(1) \quad \frac{d\eta}{d\tau} = aE(\tau)$$

である。但し  $\eta(\tau)$  は  $\tau$  時点における株価であり,  $E(\tau)$  は  $\tau$  時点におけるその株に対する超過需要,  $a$  は正の常数である。

株の超過需要  $E(\tau)$  の変動は, 通常その価格  $\eta(\tau)$  の函数である。しかし投機目的で株が需給される限り, 超過需要  $E(\tau)$  の変動はその価格  $\eta(\tau)$  だけでなく, 予想価格の函数でもある。従って  $b$  及び  $c$  を正の常数として

$$(2) \quad \frac{dE(\tau)}{d\tau} = -b\eta(\tau) + c \int_{-l}^l \eta(\tau + \theta) \varphi(\theta) d\theta$$

(1) 及び (2) 式を連立に解けば, 次の特解を得る。

$$(3) \quad \begin{cases} \eta(\tau) = \sum_{i=1}^s \{A_i \cos w_i \tau + B_i \sin w_i \tau\} \\ E(\tau) = \sum_{i=1}^s \{G_i \cos w_i \tau + H_i \sin w_i \tau\} \end{cases}$$

ここで  $\varphi(\theta)$  は  $\theta$  の正值連続函数であり, また  $w_i$  は次の方程式の根である。

$$(4) \quad \begin{cases} w^2 - ab + ca\mu = 0 \\ \mu = \int_{-l}^l \cos w\theta \varphi(\theta) d\theta \end{cases}$$

(4) 式の相異なる根は  $w_1, w_2, \dots, w_s$  であるとし, これらの任意の一つ  $w_i$  は,  $w_i = 2\pi/p_i$  で

\* 神戸大学 昭和34年11月15日第6回研究発表会の特別講演 昭和35年10月17日受理

あり、 $p_i$  は整数である。これは、(1)、(2) に対応する (1)', (2)' なる微分方程式に

$$(5) \quad \tau = T(t)$$

なる変換を施したために、(1)', (2)' が (1), (2) となり、(1)', (2)' の特解に含まれる  $k_{it}$  が  $w_i\tau$  となり、 $k_i = 2\pi/q_i$  の  $q_i$  は整数でなかったものが  $w_i = 2\pi/p_i$  の  $p_i$  は整数となったのである。

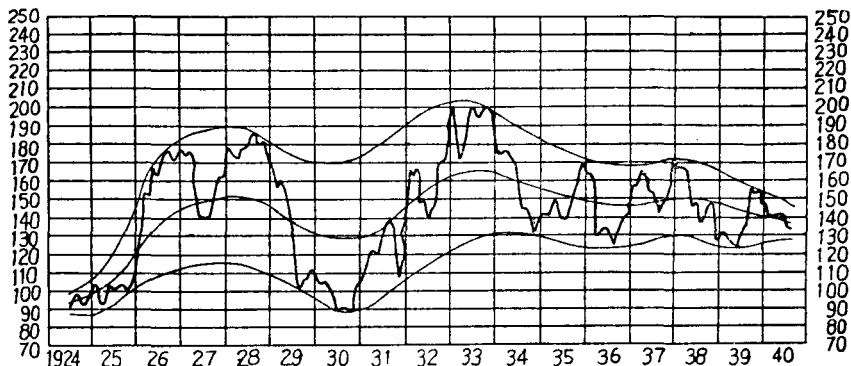
この理論的構造に基づいて、東京株式取引所の新株の価格変動を予測してみよう。基本的データとして、第1表に示した如く、1925年10月から1940年9月にわたる15年間の価格変動を取上げる。

第1表 新東月別平均相場

年 \ 月	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
1925										100.93	105.63	112.38
26	131.71	157.30	152.11	169.41	161.77	167.51	177.36	176.73	170.75	170.34	169.57	177.85
27	175.12	176.17	170.65	143.28	137.90	148.77	137.95	137.12	147.11	161.28	160.30	178.85
28	176.35	173.43	171.05	177.27	177.85	180.08	187.89	178.15	182.51	178.31	173.26	166.13
29	156.61	160.36	156.93	148.31	131.71	123.98	109.64	100.64	100.43	106.09	108.35	114.20
30	103.00	104.17	99.55	96.32	93.22	88.76	88.65	89.83	89.15	89.27	100.98	107.18
31	107.97	114.12	121.16	119.34	119.97	126.20	140.01	131.71	124.50	101.33	111.47	136.93
32	165.62	163.57	158.33	149.42	151.28	138.52	140.33	148.34	169.80	167.07	179.03	201.62
33	203.28	169.22	169.73	180.53	186.87	203.47	197.50	190.73	199.02	199.63	188.77	176.22
34	172.78	177.00	177.95	172.78	170.52	159.25	144.18	146.85	138.01	135.20	129.91	141.42
35	138.58	138.16	148.76	148.07	144.85	137.23	137.07	139.19	150.40	161.12	166.46	172.06
36	161.63	161.85	131.45	128.71	133.91	132.63	129.28	123.37	132.15	137.38	140.22	139.73
37	155.36	155.19	164.77	163.40	153.20	153.25	149.63	136.57	139.26	144.67	153.05	170.94
38	168.61	168.54	166.00	156.37	147.81	146.33	131.76	137.92	147.77	150.32	135.76	126.65
39	128.77	132.62	128.29	126.67	123.68	123.54	131.65	134.18	155.82	153.22	153.94	146.52
1940	143.7	139.6	139.7	144.6	141.6	138.2	133.2	122.9				

価格を時間  $t$  の函数  $Y(t)$  とする。第1表を図示したのが第1図である。

第1図 新東月別平均相場  
実数値線、中位線、上限線、下限線



第1図の3本の曲線を、上から順に、上限線  $h(t)$ 、中位線  $m(t)$  及び下限線  $k(t)$  と呼ぼう。  $h(t)$  と  $k(t)$  の差が振幅函数  $A(t)$  である。即ち

$$(6) \quad A(t) = h(t) - k(t)$$

第2表  $m(t)$ ,  $A(t)$  及び  $z(t)$  の値

年 月	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
1925												
$m(t)$										114	118	122
$A(t)$										* 39	42	46
$Z(t)$										°0.3351	°0.2945	°0.2091
1926												
$m(t)$	126	128	130	133	135	136	138	139	140	141	143	144
$A(t)$	53	58	71	64	64	66	68	68	69	69	70	71
$Z(t)$	0.2020	0.4431	0.3624	0.5689	0.4182	0.4774	0.5788	0.5548	0.4456	0.4252	0.3795	0.4767
1927												
$m(t)$	145	146	147	148	148	149	150	150	150	150	150	150
$A(t)$	70	71	72	72	73	74	73	73	74	74	74	74
$Z(t)$	0.4302	0.4249	0.3284	°0.0661	°0.1383	°0.1382	°0.1787	°0.1764	°0.0390	0.1524	0.1392	0.3898
1928												
$m(t)$	150	150	150	150	150	150	149	148	147	147	145	144
$A(t)$	74	74	75	75	76	76	76	75	75	75	74	74
$Z(t)$	0.3560	0.3166	0.2806	0.3636	0.3664	0.3957	0.5117	0.4020	0.4737	0.4174	0.3919	0.2990
1929												
$m(t)$	142	140	140	139	138	137	136	135	134	133	133	132
$A(t)$	72	72	72	72	72	73	74	73	74	74	75	75
$Z(t)$	0.2029	0.2827	0.2358	0.1293	°0.0861	°0.1568	0.3138	°0.4165	°0.3322	°0.2934	°0.2211	°0.2620
1930												
$m(t)$	131	131	130	130	130	130	130	130	130	130	130	131
$A(t)$	76	77	79	80	82	83	84	85	86	87	88	88
$Z(t)$	°0.3255	°0.3615	°0.3421	°0.3742	°0.3997	°0.4434	°0.4398	°0.4228	°0.4255	°0.4302	°0.2961	°0.2532
1931												
$m(t)$	131	132	132	133	134	136	137	138	139	141	142	145
$A(t)$	87	87	88	88	88	88	89	89	88	87	87	86
$Z(t)$	°0.2374	°0.1843	°0.1106	°0.1393	°0.1431	°0.1113	0.0304	°0.0641	°0.1479	°0.4089	°0.3148	°0.0736
1932												
$m(t)$	146	148	150	152	153	155	156	158	159	160	161	163
$A(t)$	86	85	84	84	83	84	82	82	81	80	79	79
$Z(t)$	0.2281	0.1831	0.2182	°0.0307	°0.0209	0.1961	°0.1911	°0.1778	0.1333	0.0882	0.2282	0.4888
1933												
$m(t)$	163	164	164	165	166	166	166	166	165	165	164	164
$A(t)$	78	78	77	76	74	73	73	71	70	68	67	65
$Z(t)$	0.6164	0.0669	0.0744	0.2043	0.2820	0.5132	0.4315	0.3483	0.4860	0.5092	0.3697	0.1880
1934												
$m(t)$	163	162	162	161	160	159	159	158	157	156	156	155
$A(t)$	65	63	72	60	60	59	58	57	55	55	54	53
$Z(t)$	0.1504	0.2381	0.2572	0.1963	0.1813	0.0042	°0.2555	°0.1956	°0.3331	°0.3781	°0.4831	°0.2562
1935												
$m(t)$	154	154	153	153	152	151	150	150	150	149	148	148
$A(t)$	53	52	62	50	50	49	50	49	49	49	48	49
$Z(t)$	°0.2909	0.3046	°0.0815	°0.0986	0.1430	0.2754	°0.2588	°0.2206	0.0081	0.2473	0.3845	0.4910
1936												
$m(t)$	147	147	146	146	146	146	146	145	145	145	145	145
$A(t)$	48	47	47	47	46	45	44	44	44	44	43	44
$Z(t)$	0.3048	0.3159	°0.3074	°0.3891	°0.2628	0.2971	°0.3800	°0.4915	°0.2920	°0.1731	0.1111	°0.1197
1937												
$m(t)$	145	145	145	146	146	147	147	148	148	148	149	149
$A(t)$	43	43	43	43	42	42	42	41	41	42	42	42
$Z(t)$	0.2409	0.2369	0.4597	0.4046	0.1190	0.1488	0.0626	°0.2787	°0.2131	°0.0793	0.0964	0.5223
1938												
$m(t)$	149	149	149	149	149	148	148	147	147	147	146	145
$A(t)$	42	42	42	42	42	42	42	42	41	41	41	40
$Z(t)$	0.4669	0.4652	0.4047	0.1754	°0.0283	°0.0397	°0.3855	°0.2214	°0.0056	0.0809	°0.2500	°0.4587
1939												
$m(t)$	144	143	143	142	142	141	141	140				
$A(t)$	40	40	39	38	37	36	35	33				
$Z(t)$	°0.3807	°0.2595	°0.3771	°0.4034	°0.4951	°0.4850	°0.2671	°0.1763				

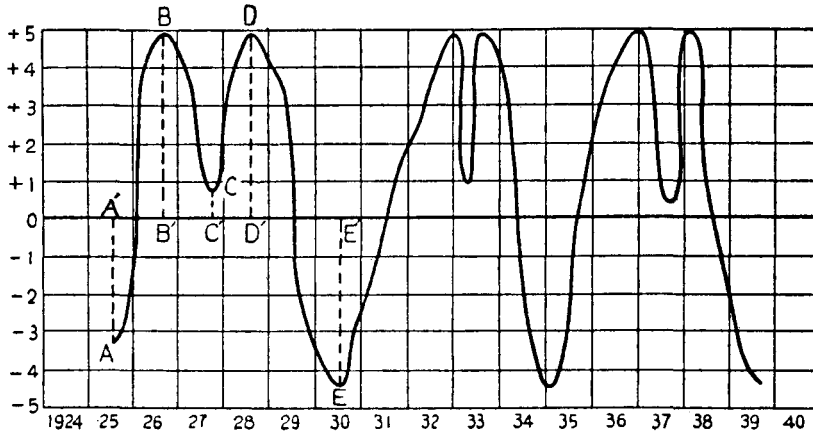
°印は、それが負の数であることを示す。例えば °0.0861 は -0.0861 である。

さて、変換

$$(7) \quad z(t) = \frac{1}{A(t)} \{Y(t) - m(t)\}$$

によって、等振幅函数  $Z(t)$  を得る。小さい変動を無視して、 $z(t)$  のグラフを平滑曲線で書いたのが第2図である。また  $m(t)$ ,  $A(t)$  及び  $z(t)$  は第2表に示しておいた。

第2図 新東・振幅還元偏差平滑曲線



第2図の平滑曲線は、全期間を、各期が約5カ年であるような3つの期間に分け得ることを示している。各期間には、2つのピーク (B及びD) と3つの谷 (A, C及びE) がある。従って各期間の曲線は、2つの上昇 (AからBへの長い上昇、並びにCからDへの短かい上昇) と2つの下降 (BからCへの短かい下降、並びにDからEへの長い下降) とから成っている。第1期についていうと、その期間 (A'E) を3点 B', C' 及び D' で分割する。これらの小期間 A'B', B'C', C'D' 及び D'E' の長さを夫々  $\pi_{11}$ ,  $\pi_{12}$ ,  $\pi_{13}$  及び  $\pi_{14}$  で示す。同様に、第  $i$  期間の第  $j$  小期の長さを  $\pi_{ij}$  ( $i=1\sim 3$ ,  $j=1\sim 4$ ) とする。

全ての期間の第  $j$  小期の長さの算術平均をとり、それを  $\pi_j$  で示す。即ち

$$(8) \quad \pi_j = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \pi_{ij}$$

更に

$$(9) \quad \pi_j' = 60\pi_j \left( \sum_{i=1}^4 \pi_j \right)^{-1}$$

を算出し、全ての期間の第  $j$  小期の長さが一様に  $\pi_j'$  に等しくなるように、変換

$$(10) \quad \tau = T(t)$$

により  $z(t)$  を  $y(\tau)$  ならしめる。

さて、 $\eta_i(\tau)$  を  $y_i(\tau)$  の基本構造的部分、 $u_i(\tau)$  を各時点において時点  $\tau$  に無関係に  $N(0, 1)$  なる標準正規分布をなす確率変数とする時

$$(11) \quad y_i(t) = \eta_i(\tau) + u_i(\tau)$$

なる仮定を導入する。

更に

$$(15) \quad \eta_i(\tau) = \alpha_{i0} + \sum_{k=1}^6 \alpha_{ik} \cos \frac{\pi}{30} k\tau + \sum_{k=1}^6 \beta_{ik} \sin \frac{\pi}{30} k\tau$$

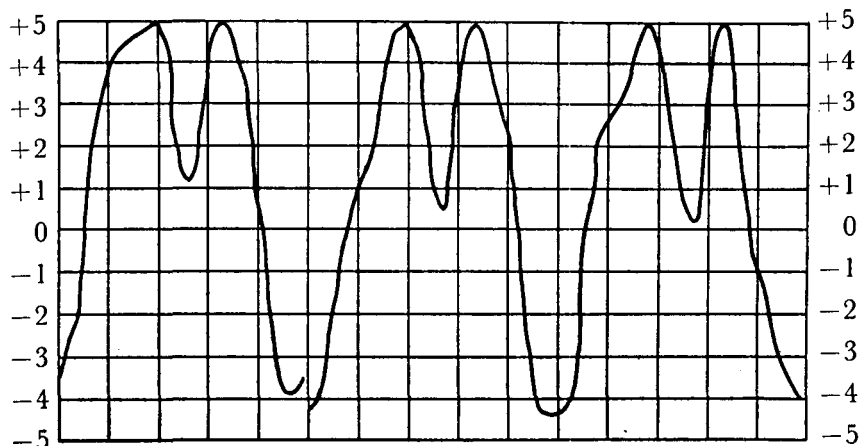
としよう。

最尤法によりこれらのパラメーターの値を決定すれば、次式を得る。

$$(13) \quad \left. \begin{aligned} \eta_1(\tau) &= 1.448 - 3.739 \cos \tau - 2.639 \cos 2\tau \\ &\quad + 0.530 \cos 3\tau - 0.116 \cos 4\tau + 0.484 \cos 5\tau \\ &\quad - 0.172 \cos 6\tau + 0.816 \sin \tau + 0.442 \sin 2\tau \\ &\quad + 0.223 \sin 3\tau - 0.546 \sin 4\tau + 0.001 \sin 5\tau \\ &\quad - 0.090 \sin 6\tau \\ \eta_2(\tau) &= 1.115 - 3.433 \cos \tau - 2.360 \cos 2\tau \\ &\quad + 0.573 \cos 3\tau - 0.532 \cos 4\tau + 0.281 \cos 5\tau \\ &\quad + 0.097 \cos 6\tau + 0.029 \sin \tau - 0.021 \sin 2\tau \\ &\quad + 0.809 \sin 3\tau - 0.118 \sin 4\tau + 0.165 \sin 5\tau \\ &\quad - 0.230 \sin 6\tau \\ \eta_3(\tau) &= 0.853 - 3.223 \cos \tau - 2.231 \cos 2\tau \\ &\quad + 0.757 \cos 3\tau - 0.769 \cos 4\tau + 0.058 \cos 5\tau \\ &\quad + 0.224 \cos 6\tau + 1.141 \sin \tau + 0.499 \sin 2\tau \\ &\quad - 0.115 \sin 3\tau - 0.619 \sin 4\tau + 0.081 \sin 5\tau \\ &\quad - 0.164 \sin 6\tau \end{aligned} \right\}$$

これを図示したのが第3図である。

第3図 新東・算定曲線

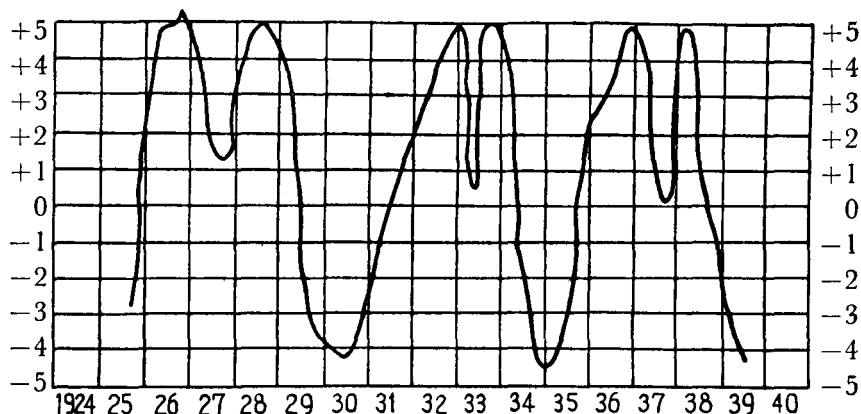


(5) の逆変換, 即ち

$$(14) \quad t = T^{-1}(\tau)$$

を (13) に施せば, 第4図に示されるようなグラフが書ける.

第4図 新東・緩急還元曲線



(13) の三式に (14) の交換を施せば, 現実の  $z(t)$  に対応する理論的な  $z'(t)$  の値を得る. これらの値を示したのが第3表である.

第3表 新東・緩急還元曲線算定値

年	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
1925										△0.300	△0.140	0.020
26	0.160	0.260	0.370	0.430	0.480	0.480	0.480	0.485	0.500	0.515	0.500	0.485
27	0.460	0.430	0.395	0.350	0.300	0.235	0.170	0.140	0.120	0.105	0.125	0.170
28	0.335	0.375	0.415	0.445	0.465	0.480	0.490	0.495	0.490	0.480	0.460	0.450
29	0.420	0.400	0.360	0.310	0.240	0.130	0	△0.200*	△0.255	△0.295	△0.325	△0.350
30	△0.365	△0.380	△0.390	△0.400	△0.405	△0.410	△0.420	△0.415	△0.400	△0.380	△0.350	△0.300
31	△0.255	△0.220	△0.175	△0.140	△0.100	△0.060	△0.020	0.015	0.050	0.080	0.120	0.150
32	0.180	0.215	0.240	0.270	0.300	0.340	0.370	0.400	0.420	0.450	0.470	0.490
33	0.485	0.450	0.150	0.040	0.050	0.200	0.450	0.480	0.495	0.500	0.460	0.420
34	0.385	0.340	0.280	0.200	0.150	0	△0.170	△0.250	△0.330	△0.375	△0.415	△0.445
35	△0.450	△0.440	△0.420	△0.400	△0.375	△0.345	△0.300	△0.215	△0.100	0.055	0.130	0.180
36	0.220	0.250	0.270	0.285	0.300	0.325	0.355	0.390	0.430	0.465	0.480	0.490
37	0.460	0.430	0.390	0.315	0.220	0.120	0.070	0.030	0.005	0	0.100	0.350
38	0.480	0.495	0.470	0.400	0.300	0.180	0.100	0.020	△0.030	△0.070	△0.120	△0.200
39	△0.260	△0.295	△0.320	△0.355	△0.380	△0.405	△0.420	△0.440				

△印は, それが負の数であることを示す. 例えば △0.200 は -0.200 である.

さて, 過去のデータに基づいて, 価格の将来の変動 (即ち第4期の変動) を予測してみよう.

$\eta_4(\tau)$  についても前と同様に

$$(15) \quad \eta_4(\tau) = \alpha_{40} + \sum_{k=1}^6 \left\{ \alpha_{4k} \cos \frac{\pi}{30} k\tau + \beta_{4k} \sin \frac{\pi}{30} k\tau \right\}$$

であるとする.

パラメーター  $\alpha_{4k}$  と  $\alpha_{1k}$ ,  $\alpha_{2k}$ ,  $\alpha_{3k}$  との間の函数関係を見出すべく努める. そのため, 第一差, 第二差等を算出して, それらの間に簡単な法則を考えることが出来るかを試みることにする. この方法によって, 第二差が等比数列をなすことを確かめた. 即ち

$$\frac{\Delta\alpha_k^2}{\Delta\alpha_k^1} = \frac{\Delta\alpha_k^3}{\Delta\alpha_k^2}, \quad \frac{\Delta\beta_k^2}{\Delta\beta_k^1} = \frac{\Delta\beta_k^3}{\Delta\beta_k^2}$$

これから次の式が導かれる。

$$(16) \quad \begin{cases} \alpha_{4k} = \frac{\alpha_{1k}\alpha_{3k} + \alpha_{2k}\alpha_{3k} - (\alpha_{2k})^2 - (\alpha_{3k})^2}{\alpha_{1k} - \alpha_{2k}} \\ \beta_{4k} = \frac{\beta_{1k}\beta_{3k} + \beta_{2k}\beta_{3k} - (\beta_{2k})^2 - (\beta_{3k})^2}{\beta_{1k} - \beta_{2k}} \end{cases}$$

これによって、 $\alpha_{1k}$ ,  $\alpha_{2k}$  及び  $\alpha_{3k}$  から  $\alpha_{4k}$  を、 $\beta_{1k}$ ,  $\beta_{2k}$  及び  $\beta_{3k}$  から  $\beta_{4k}$  を推定することが出来る。

(16) 式を利用して、第4期の曲線の方程式を求めると

$$(17) \quad \begin{aligned} \eta_4(\tau) = & 0.647 - 3.079 \cos\tau - 2.171 \cos 2\tau \\ & + 1.544 \cos 3\tau - 0.904 \cos 4\tau - 0.187 \cos 5\tau \\ & + 0.284 \cos 6\tau - 0.430 \sin\tau - 0.085 \sin 2\tau \\ & + 0.937 \sin 3\tau - 0.038 \sin 4\tau + 0.124 \sin 5\tau \\ & - 0.195 \sin 6\tau \end{aligned}$$

同様にして、中位線の方程式及び振幅函数は夫々

$$(18) \quad \begin{cases} m(s) = 125.575033 + 0.08388632366 s \\ \quad \quad \quad + 0.0003365327285 s^2 \\ A(s) = 38.72807590 + 0.03245547797 s \\ \quad \quad \quad - 0.00004052701516 s^2 \end{cases}$$

なることがわかる。

第4期の小期の長さは、前と同様にして

$$\pi_{41} = 3, \pi_{42} = 23, \pi_{43} = 8, \pi_{44} = 23$$

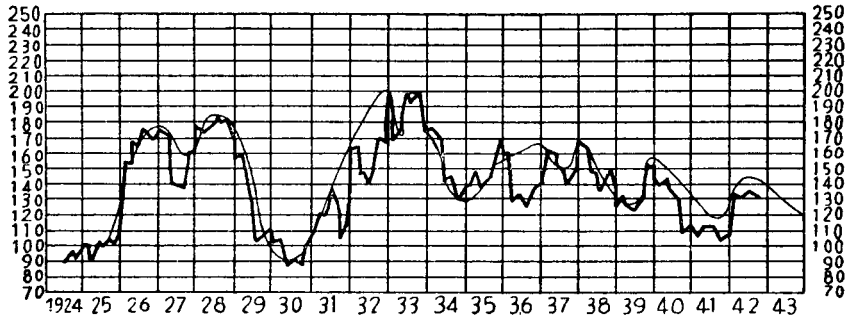
である。

これらのデータにより、第4期に対応する現実世界の予想値を導くことが出来る。それを表示及び図示したのが、第4表及び第5図である。

第4表 価格の推定値

年	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
1939 $Y(t)$								127.00	136.80	159.98	159.80	158.44
1940 $Y(t)$	157.50	155.48	153.96	150.44	148.11	145.78	143.45	140.88	138.58	136.29	134.18	132.07
1941 $Y(t)$	129.96	128.22	129.44	123.63	121.52	120.97	119.41	119.23	119.04	119.34	120.90	125.86
1942 $Y(t)$	131.54	136.86	141.45	145.16	145.88	146.34	144.72	142.96	142.84	139.96	137.97	136.80
1943 $Y(t)$	135.12	133.18	132.80	131.75	130.52	129.70	127.20	125.10	122.65	120.65	119.15	116.75
1944 $Y(t)$	116.05	115.70	115.35	114.87	114.00							

第5図 新東・還元曲線



以上の予測において、二つの型の予測が見られる。一つは標準領域における現象の予測であり、今一つはその領域そのものの予測である。

この場合、これら二つの予測は互いに独立であると前提されている。このケースを「モザイク・ケース」と呼ぶ。これと異って、二つの予測が互いに依存している場合が考えられる。このケースを「ゲシュタルト・ケース」と言う。

先ず「モザイク・ケース」を考える。ここでは、領域が二つの変換

$$z(t) = \frac{1}{A(t)} \{ Y(t) - m(t) \}$$

$$\tau = T(t)$$

によって、既に標準領域に移されているものとする。

第  $i$  期の曲線は、この標準領域において

$$y^i(\tau) = \eta^i(\tau) + u^i(\tau)$$

$$\eta^i(\tau) = a_0^i + \sum_{k=1}^6 a_k^i \cos \frac{\pi}{30} k\tau + \sum_{k=1}^6 b_k^i \sin \frac{\pi}{30} k\tau$$

と表わされる。

この標準領域において、これらの過去のデータに基いて第4期の曲線を予測することとしよう。

今、 $\alpha^i = (a_0^i, a_1^i, \dots, a_6^i, b_1^i, \dots, b_6^i, i)$  が、14次元ユークリッド空間  $S$  の一点であり、これらの点  $\alpha^i$  と第  $i$  期の曲線との間に一対一の対応があるとする ( $i=1 \sim 4$ )。

更に  $\alpha^4$  が  $\alpha^1$ ,  $\alpha^2$  及び  $\alpha^3$  と函数的に関係をもち、この函数関係が平断面  $(a_k^i, i)$  或いは  $(b_k^i, i)$  への射影についても妥当すると仮定しよう。ここで平断面  $(a_k^i, i)$  或いは  $(b_k^i, i)$  への射影について次の函数関係が成立するとしよう。

$$\frac{\Delta a_k^2}{\Delta a_k^1} = \frac{\Delta a_k^3}{\Delta a_k^2}, \quad \frac{\Delta b_k^2}{\Delta b_k^1} = \frac{\Delta b_k^3}{\Delta b_k^2}$$

従って

$$a_k^4 = \frac{a_k^1 a_k^3 + a_k^2 a_k^3 - a_k^2 a_k^2 - a_k^1 a_k^2}{a_k^1 - a_k^2}$$

$$b_k^4 = \frac{b_k^1 b_k^3 + b_k^2 b_k^3 - b_k^2 b_k^2 - b_k^1 b_k^2}{b_k^1 - b_k^2}$$



然るとき、この標準領域においては、第4期の予測曲線が

$$\eta^4(\tau) = a_4^0 + \sum_{k=1}^6 \left\{ a_k^4 \cos \frac{\pi}{30} k\tau + b_k^4 \sin \frac{\pi}{30} k\tau \right\}$$

であることを知る。

次に、第4期の領域の構造の予測に進むこととしよう。

第4期の各小期  $\pi_1^4, \pi_2^4, \pi_3^4, \pi_4^4$  の長さ（予測）を求めるには、丁度第4期の曲線の径数を求めるのに、いま、径数空間（14次元）の点列  $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$  から  $\alpha^4$  なる第4期の曲線の径数を推定したように、全く同様に  $\pi_1^4, \pi_2^4, \pi_3^4, \pi_4^4$  の長さを推定すればよいのである。

尤も、中位線及び振幅函数については、いま、この資料の場合は簡単でもあり、他の資料との関係を確立すべき資料もなかったので、単に、第1期乃至第3期の資料に手描法で描いた曲線から得た数列に

$$m(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t t$$

$$A(t) = e_0 + e_1 t + e_2 t t$$

なる曲線を最小二乗法によって当てはめ、補外法によって第4期中位線及び振幅を算出するのである。

以上はモザイクの場合であるが、予測せられる現象（の曲線）と領域とが独立でない場合、即ち Gestalt をなす場合においては、特殊の測度を有する空間、例えば波動幾何学で考えられているような空間、即ち、そこにおいては、線素が

$$d_s = m_0 dt + \sum_{k=1}^n m_k dx_k$$

で表わされるような空間において変動する現象として扱うのがその一つの方法である。ただし、ここに  $m_0, m_1, \dots, m_k, \dots$  は、夫々適当な行列である。しかし、この「ゲシュタルト・ケース」については、将来の進歩に俟たなければならない部分が非常に多い。

以上を通じて、これらの予測の特色の一つは、標準領域において現象の分析を行うことである。即ち、場の変換  $S$  即ち

$$S: \tau = T^{-1}(t), \quad z(t) = \frac{1}{A(t)} \{ Y(t) - m(t) \}$$

によって、現実面における複雑なる変動も、理念面における簡単な変動に還元せられていることである。理念面における曲線を現実領域の変動の原像と言い、現実領域の曲線をその原像の現実領域への写像と名づけることとしよう。写像たる曲線は、理念面（標準領域）の原像が、場の変換  $S^{-1}$  によって現実領域へ投影せられたものと考えることが出来る。

理念面の原像を現実面へ投影するに対応する場の変換は、変換  $S$  の逆変換  $S^{-1}$  である。これを改めて  $T (= S^{-1})$  と記せば、例えば、日東紡株の価格変動を  $B_{11}$  とするとき、その原像  $U_1$  と  $B_{11}$  との関係を  $T_{11}$  とすると、東洋紡の価格変動  $B_{12}$  の原像も  $U_1$  であるという場合も少なくはない。このように、理念面の原像が同一であり乍ら、現実面の写像が異なるのは、投影が、

日東紡 ( $B_{11}$ ) の場合は  $T_{11}$  であるのに対して、東洋紡 ( $B_{12}$ ) の場合は投影が  $T_{12}$  であることによるというように解釈することが出来る。即ち紡績株の理念面における原像はすべてで  $U_1$  であるのに、投影が  $T_{11}$ ,  $T_{12}$ ,  $\dots$ ,  $T_{1n}$  と異なるに従って、現実面における写像も  $B_{11}$  (日東紡),  $B_{12}$  (東洋紡),  $\dots$ ,  $B_{1n}$  (日清紡), と異なった様相を表わすものと解するのである。

かくて、紡績株の原像が  $U_1$  であるに対して; 鉄鋼株の原像は  $U_2$  であり,  $\dots$ , 食品株の原像は  $U_k$  であり, 夫々において投影の相違から, 現実面の写像の相違が生ずるものと解するのである。これを例えば, 鉄鋼株においては, 理念面における原像は, すべて  $U_2$  であるが, 投影が  $T_{21}$  であるか,  $T_{22}$  であるか, 乃至は  $T_{2m}$  の何れであるかに従って, 現実面における写像は  $B_{21}$ (住友金),  $B_{22}$ (神鋼)乃至  $B_{2m}$ (大同鋼)と異なった現われ方をし, 同様に食品株の変動の原像はすべて  $U_k$  であるのに, 投影が  $T_{k1}$  であるか  $T_{k2}$  であるか, 乃至は  $T_{kn}$  の何れであるかに従って, 現実面における写像は  $B_{k1}$ (朝麦),  $B_{k2}$ (キリン)乃至  $B_{kn}$ (台糖)と異った現われ方をするのである。

更にこの理念面(第一次)における原像  $U_1$ (紡績株),  $U_2$ (鉄鋼株),  $\dots$ ,  $U_k$ (食品株)という種々相が存在するのも矢張り理念面の理念面とも言うべき第二次理念面においては, 同一原像  $V$ (株)の変動に外ならぬものが投影  $T_1, T_2, \dots, T_k$  の如何に従って第一次理念面の写像(即ち先に述べた原像)が  $U_1, U_2, \dots, U_k$  という異なった様相を呈しているにすぎないのである。かく漸次に高次(第一次, 第二次,  $\dots$ , 第  $w$  次)の理念面へと溯る原像の階層(hierarchy)を考え, 投影の階層と, その相互関係を明らかにすることによって, 研究対象たる理論構造を明らかにし得る場合が多いと考えられる。 $(-1)^n$  は  $n$  が正の整数であるときは, 離散的である。このとき

$$(-1)^n = \cos n\pi + i \sin n\pi$$

であるから, その与えられた正の整数を含む実数の区間を考え,  $n$  はその区間の任意の一つの実数を表わすものと考え, ガウスの平面上の単位円周上にその対応点を見出す複素数として連続的に考えることが出来,  $n$  が正整数の場合はその特殊の場合(実数軸を切る点)として, これに含まれることになる。

例えば, このように離散的な投影の集合  $T_1, T_2, \dots, T_k$  も, 投影の或る連続的な集合  $\{T\}$  に含まれるものとして理解することとすれば, これに対応して, 一つの原像  $V$  の写像の連続的な集合が考えられ,  $U_1, U_2, \dots, U_k$  はこれに含まれるものとして理解することが出来るであろう。このような投影の連続的な集合, 従って写像の連続的な集合を考える場合にも, 前述のように, 漸次に高次(第一次, 第二次,  $\dots$ , 第  $w$  次)の理念面へと溯る原像の階層(hierarchy)と投影の階層的相互関係が如何なる構造及び関係をもっているか, その経済理論的解明こそが経済予測に必要なのである。

景気予測における古い Harvard の景気指標の如き, 投機線, 商況線, 金融線の三曲線間の関係を, 一定期間の先行遅差(Lead, Lag 4 カ月乃至 6 カ月の)関係と考えているのは, 投影  $T_1$ ,

$T_2$ ,  $T_3$  相互の関係を横軸方向における常数の差という極めて単純な仮定に立っているものと解釈することが出来る。これは余りにも単純な仮設と言わなければならない。また、その投機線、商況線、金融線各々の作成についても、例えば投機線は、投機の対象たる数種の株価の景気変動指数を夫々方正化した上で、それらの算術平均を求めて作成しているが、これも算術平均値を求めるところに、理論的構造を無視したところの、言わば、経済学的に無意味な操作が施されているのであって、これは当然それらの相異なるものを投影の差と解釈せしめるところの原像を求めることによって解決すると考えられるのである。

以上に述べた第一の特質は「標準領域の方法」という名で呼ぶのが適当であろう。

第二の特質と名づくべきは、能う限り予測を理論的基礎の上に立てようと力を用いた所にある。従来の予測、例えば Harvard の方法、或いは Diffusion Index の方法または Colm 方式などにしても、多くは柳の下の泥鰌式方法に基礎を置いているようである。Measurement without Theory という程には徹底していないにしても、大抵は、A 河岸の柳の下に泥鰌がいた、だから B 河岸の柳の下にも泥鰌がいるであろうとするにすぎない。

柳の下に偶然に泥鰌がいたにしても、それは、柳の下にたまたま泥鰌の餌の棲む藻が繁茂していたことによるのであるかもしれない。同じ柳の下にたまたま上述の藻が繁茂していたためであったとすれば、他の柳の下にはその藻が繁っているとは限らず、従って泥鰌がいるとは限らない。真の理論即ち予測の基礎となるべき理論は、上述の藻のある所泥鰌の餌は棲む、故に、その藻のある所、泥鰌ありということではなければならない。

さきには、標準領域の方法の説明に急であって、株価変動の方程式を樹立するに当っての理論が十分でなかった憾があるから、ここでそれを補充しておこう。

株式取引所に上場せられる株の価格は立会に参加する取引所取引員を通じて決定せられるのであるが、これら相場決定に参加する者の資力、情報取得能力、将来に関する洞察力などには種々の階層が存在し、それに応じて、その投機上の行動乃至傾向、即ち株式投機の仕法には種々のものが存在する。

情報取得能力に欠け、将来に関する洞察力にも自信の無いものは、平常は、資産株のように、その配当を楽しみ五年、十年の大波における高値に売り、安値のものに移るという手法を用いるであろう。一株 350 円位のものに例をとって言えば、これらの人々は、それが一株 250 円であるか、450 円であるかを問題にする人々である。これらの人々を、かりに第 1 階級  $X_1$  に属する人々と言こうにしよう。

これに対し、多少将来に関する洞察力にも自信を持ち、いわゆる夏枯れ秋高などの常規的変動に詳しい人々は夏 320 円で買い秋 380 円で売るといのように、多少投機的な手法を用いる人々、いわゆる中勢株価に目をつける人々がある。これらの人々を第 2 階級  $X_2$  に属する人々と名づけよう。これらの人々は、3 カ月乃至 6 カ月或いは精々 1 カ年位の高低の週期に売買する人々であって、これらの人々にとっては、その株価の大勢 350 円は、いわば自明の理として問題ではなく、

従って 320 円は負の 30 円と那些人々には感じられ、380 円は 30 円高としてそれらの人々の眼には映るのである。従って、その大勢株価 350 円を  $p_1$  と表わし、負の 30 円または正の 30 円を表わすものとして  $p_2$  を採れば、 $p_1+p_2$  が 320 円または 380 円を表わすのである。

ところが広い情報取得力を持ち、将来に対する洞察力にも自信をもつ専門家は、投機の対象たる価格の変動激しき株を寄付きに 700 円にて買い、大引けに 720 円にて売り放つという放れ業を演ずるなど、320 円台の値頃の株ならば、2~3 日または精々 1 週間位に 327 円になれば売る。或いは 2~3 日または精々 1 週間位に 7 円下って 313 円になると見込めば、今日 320 円で売るということをするであろう。これらの人々を第 3 階級  $X_3$  に属する人々と名づけよう。

即ち、これらの専門家にとっては、週期は 1 日ないし 7 日であり、価格は 700 円または 320 円の何れであるかは問題ではなく、20 円の騰落または 7 円の騰落が問題なのである。即ち  $p_1+p_2$  が 320 円を表わす場合、 $p_3$  を以て正の 7 円または負の 7 円を表わせば、 $p_1+p_2+p_3$  は 327 円または 313 円を表わすのである。

このように、現実の株価  $p$  は大雑把に言えば 3 つの部分  $p_1+p_2+p_3$  に分けることが出来る。更に、詳細に言えば、一般に、第  $t$  時点における株価  $p(t)$  は、

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) + \dots + p_i(t) + \dots + p_s(t)$$

なる  $s$  個の部分価格から成立っていると考えることが出来る。先の例で示したように相場の決定に参加する人々の資力、情報取得能力、将来に関する洞察力の如何によって、売買の手法、いわゆる手筋には種々がある。故に、相場の決定に参加する人々を、その売買の手法によって分類して  $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_s$  なる  $s$  個の階級に分類したとき、第  $i$  階級  $X_i$  に属する人々は  $\{p_h(t)\}$ ,  $[1 \leq h < i]$  従って

$$p_i'(t) = p_1(t) + p_2(t) + \dots + p_{i-1}(t)$$

には少しの関心をも示さず、

$$p_i''(t) = p_i(t) + p_{i+1}(t) + \dots + p_s(t)$$

特に  $p_i(t)$  に最大の関心を持ち、他の価格には、順次に薄い関心をもつのである。このことから、当然に、第  $i$  階級の  $X_i$  の人々の需要  $D_i(t)$  及び供給  $S_i(t)$ 、従って (対数) 超過需要率  $E_i(t) = \log D_i(t) - \log S_i(t)$  の変化率  $\dot{E}_i(t)$  は

$$(19) \quad \dot{p}_i(t) = \sum_{k=1}^s w_k^i(t) p_k(t)$$

の函数となるのである。[ただし  $w_1^i(t) = w_2^i(t) = \dots = w_{i-1}^i(t) = 0$ ,  $\sum_{j=1}^s w_j^i(t) = 1$ ]。一般に

$$(20) \quad \dot{E}_i(t) = -C_2 \dot{p}_i(t)$$

と考えてよいであろう。ところが、これだけならば、価格と超過需要率との関係は、普通の価格と超過需要率との関係と大して差異がない。ところが、売買の対象が投機株である場合には、この(20)の右辺の基本項  $[-C_2 \dot{p}_i(t)]$  の外に、投機項が加わり、更に附帯条件 (資力条件) が加わる所が普通財の場合と異なっている。

ただ基本項のみの場合、即ち (20) 式の関係においては、価格が高くなれば需要が減退し供給は増大し、結局超過需要率が減るという普通の場合しか表わしていないが、売買の対象が投機株である場合には、価格が現在 350 円であるといっても、それだけで超過需要率が左右されるのは、基本項の関係に止っている。売買の対象が投機株である場合には、この外に、価格が現在 350 円であるといっても、それが過去においては 380 円であったものが段々に下落して来て 350 円になったのであれば、価格は更に下るであろうと予想せられて、超過需要率は更に減少し、反対に過去に 320 円であったものが、段々騰貴して 350 円になったのであったら、価格は更に騰貴するであろうと予想せられて超過需要率に更に増大するような影響を及ぼすことになる。この関係を表わすものが投機項である。投機項は過去要素と未来要素とに分たれる。過去要素  $v_i(t)$  は

$$(21) \quad v_i(t) = \int_0^\lambda \{\bar{p}_i(t) - \bar{p}_i(t-\theta)\} \psi(\theta) d\theta \quad (\lambda \geq 0)$$

で表わされる。未来要素は未来の価格の予想に基づくのであって、本来、過去要素に基づく部分と、そうでない部分とがあるが、この過去要素には関係なく、その株の表示する事業の性質から、未来に特に予想せられる価格の動きに基づく関係を示すものが未来要素である。この関係を表わすには、先ず、現在を  $t$  とするとき、 $\theta > 0$  を採り、時点  $\tau = t + \theta$  のときの価格が  $\bar{p}_i(\tau, \sigma)$  なるべき確率密度を  $\omega_i(\tau, \sigma)$  とすれば、時点  $\tau$  における価  $\bar{p}_i(\tau, \sigma)$  の数学的期待値

$$(22) \quad \bar{p}_i(\tau) = \bar{p}_i(t+\theta) = \int_{\nu}^{\kappa} \omega_i(\tau, \sigma) \bar{p}_i(\tau, \sigma) d\sigma$$

を算出し、これによって、未来要素

$$(23) \quad u_i(t) = \int_0^\mu \{\bar{p}_i(t+\theta) - \bar{p}_i(t)\} \varphi(\theta) d\theta$$

を表わすこととすれば、これは、未来要素の一種であるということが出来る。

かくて、第  $i$  階級に関する超過需要率の変動方程式

$$(24) \quad \dot{E}_i(t) = -C_2 \bar{p}_i(t) + C_3 v_i(t) + C_4 u_i(t)$$

即ち

$$(25) \quad \begin{aligned} \dot{E}_i(t) = & -C_2 \bar{p}_i(t) + C_3 \int_0^\lambda \{\bar{p}_i(t) - \bar{p}_i(t-\theta)\} \psi(\theta) d\theta \\ & + C_4 \int_0^\mu \{\bar{p}_i(t+\theta) - \bar{p}_i(t)\} \varphi(\theta) d\theta \end{aligned}$$

ただし  $a_i^2 - p_i^2(t) \geq 0$ ,  $[p_i^2(t) = \bar{p}_i^2(t) \text{ または } \tilde{p}_i^2(t)]$

が得られる。

この過去要素、未来要素などにおける加重値函数  $\psi(\theta)$ ,  $\varphi(\theta)$  は階級  $i$  の如何とは無関係である簡単な場合を考えると、(24) 即ち (25) と

$$(26) \quad E(t) = \sum_{i=1}^s E_i(t); \quad p(t) = \sum_{i=1}^s p_i(t), \quad (p = \bar{p} \text{ または } \tilde{p})$$

なる関係とから

$$(27a) \quad \dot{p}(t) = C_1 E(t)$$

$$(27b) \quad \dot{E}(t) = -C_2 p(t) + C_3 \int_0^\lambda \{p(t) - p(t-\theta)\} \phi(\theta) d\theta \\ + C_4 \int_0^\mu \{p(t+\theta) - p(t)\} \varphi(\theta) d\theta$$

ただし

$$(27c) \quad a^2 - p^2(t) \geq 0, \quad a_1^2 - p_1^2(t) \geq 0, \quad a_2^2 - p_2^2(t) \geq 0, \quad \dots, \quad a_s^2 - p_s^2(t) \geq 0$$

とする。更に、普通の微分方程式の概念からは外れるかも知れないが、(27c) の資力条件は附帯条件であるよりは、経済理論的には、例えば、(27b) の右辺の第4項として

$$-\frac{p(t)}{|p(t)|} \sqrt{a^2 - p^2(t)}$$

を附加することにする方が、理論的な意義が重加せられる。

例えば、このような理論的基礎の下に株価変動の微分方程式が樹立せられたのである。更に、望むらくは、第一期、第二期、第三期に亘る径数の変動から第四期の径数を推定するについても上述の予測では、いわゆる柳の下の泥鰌式論法を用いたのであるが、ここでも理論的基礎に立つことが望ましい。

ここに、上述の予測の方法の第三の特質即ち「径数空間の方法」\* が潜んでいるのであるが、この方法に理論的基礎を与うるものとして新しく樹立せらるべき「径数経済学」ならびに「径数計画」とも名づくべき理論が待望せられるのであり、いまその樹立に力を致しているのであるが、それに対して、この新しい道を拓くものは、上述の「径数空間の方法」である。

従来の経済動態理論においては主として、常数径数の微分方程式または常数係の定差方程式が用いられていたのであるが、実際には径数は変化するのが常態であり、常数径数の微分方程式乃至定差方程式は非現実的と言わざるを得ない。それ故に「径数経済学」ならびに「径数計画」が必要となるのである。

注意すべきは、従来の Operations Research においては理論的仮説の検定は採用棄却の何れかに決定するものであって、理論の信頼度は問題とせられなかった。しかし我々の予測の場合においては、従来と異なった意味において理論の信頼度を問題とし、これと径数の信頼度とを区別して検定して径数空間を用いる予測に役立たしめなければならない。

\* さきに筆者は、これを曲線統計論、超曲面統計論と名づけた。拙著「数学的思推と経済理論」309頁以下参照。

## R. A. フィッシャー卿の講演原稿の一頁 (原文のまま)

Induction Logic

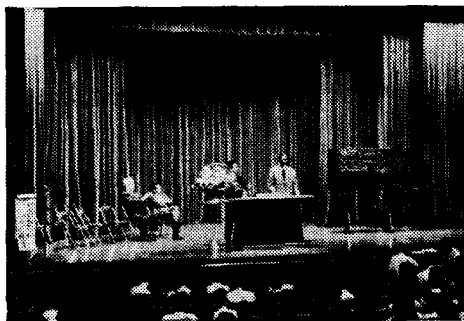
-2-

Though deductive reasoning was thus familiar and tolerably well understood in the traditional intellectual heritage of the modern world, the same could not be said of inductive reasoning, based on observational material, with its errors of observation, and its errors of random sampling, by which, <sup>however,</sup> all that we know of the world studied by the sciences must be inferred. Indeed, there seem to be in the United States many converts to the opinion of J. Neyman who <sup>by</sup> ~~asserted~~ <sup>so readily in 1938 asserted</sup> that inductive reason positively did not exist, and that no <sup>from</sup> ~~name~~ deserving the name of reasoning could be applied to the data of science. In expressing this opinion, in the fourth decade of our century Neyman was, in my opinion, some hundred years, and probably much more, out of date, for the great Karl Gauss had developed, though he had not finally perfected, ~~more than 100 years before,~~ <sup>more or</sup> such a process for the interpretation of the data obtained in astronomy and geodesy; and 100 years earlier still the theorem of Thomas Bayes (1763) <sup>should have</sup> ~~must~~ be regarded as a meaningless gesture <sup>was it not</sup> for its deliberate aim to make mathematically rigorous statements (though still uncertain statements), about an unknown parameter, on the basis of data susceptible to errors of random sampling. Neyman's doctrine challenged not only the rapidly developing statistical science of the 20th century, but its foundations in the 19th and 18th centuries. On the contrary, it will be my thesis that the continuous development of mathematical thought in Western Europe from the great French mathematicians of the 17th century onward, has come to fruition in our own time, by cross-fertilization with the Natural Sciences, in supplying just such a model of the correct use of inductive reasoning, as was supplied by Euclid <sup>for</sup> ~~on the~~ deductive side. A model only, for the development of its manifold latent possibilities has remained almost untouched, as any reader of my book Statistical Methods and Scientific Inference (1956, 1959) will easily appreciate.

Thoughtful reasoning  
Some of the obstacles which have stood in the way of the rational exploitation of these opportunities are perhaps worthy of special consideration. I spoke a moment ago of rigorous, though still uncertain, statements. <sup>There was</sup> ~~The word~~ rigorous referred to the process of reasoning, the inductive logic, by which correct inferences may be drawn from observations, imperfect in the various ways characteristic of scientific observations. Because they are imperfect, because, as one might put it, the observational basis of our reasoning might equally have been somewhat different from <sup>the data</sup> ~~that~~ which we have,



↑ 昭和35年5月28日, 朝日新聞社東京本社控室にて講演会終了後, NHKの「Visitors From Abroad」のインタビューに応ずるアデレイド大学 R. A. フィッシャー卿。



← 昭和35年5月28日, 朝日新聞社東京本社講堂におけるインド統計研究所 P. C. マハラノビス教授の講演。通訳は東大森口繁一教授。座席に腰かけているのは左より R. A. フィッシャー卿, その隣りは司会者九大北川敏男教授。