文献抄録

CHERNOFF, H.: SEQUENTIAL DESIGN OF EXPERIMENTS

Ann. Math. Stat. ***30*** *(1959) pp. 755～770*

科学者がある現象を研究するのに，最初はそれについて全く何もわからない．そこで彼は予備的な実験をやる．data を集めるにつれて，現象の底に横たわる理論らしきものがだんだんはっきりしてくる．理論が明確になってくれば彼はもっと効果的な実験を企てることができる．こうして遂に彼の中に確信が生じて，ある結論を述べるに到る．

この場合，彼はその現象についての情報(information)を引き出すために実験を計画しているのである．そして得られた情報にもとづいて更によい実験を計画する．こうして遂に充分な量の情報が得られて，これ以上の実験は，その提供する情報量では実験 cost に引き合わなくなったときに実験をうちきるのである．

このような手順は最もありふれた逐次実験計画といってよい．しかし，この方面の統計学的理論は今までに殆んど何もなかった．その少い例の一つに two-armed bandit problem (Bradt-Johnson-Karlin, *Ann. Math. Stat.* ***27*** (1956)，*1060* というのがある．それは

> 2台のパチンコ機械がある．当りの確率をそれぞれ p_1, p_2 としてこれらの値は未知とする．全部で n 回パチンコをやるのに，当りの回数の期待値を最大にするには，どういう計画(design)に従って次々とパチンコ機械をえらべばよいか？

p_1, p_2 の値は初めは全く未知であるが，だんだんやってゆくにつれてよく推定できるようになる．情報を最もうまく利用するのが最適計画である．この問題に対する最適計画はまだ求められていない．

一般に，最適計画は求まらなくとも漸近的に最適な計画は求め易いことが多いのである．本論文には統計的仮説の逐次検定において，自然な形の一つの逐次計画が提示され，その‘漸近的最適性’が証明されている．いうまでもあるまいが，漸近的というのは統計的手法が，非逐次ならば標本の大いさ$\to\infty$，逐次ならば sampling cost $\to 0$ のことである．

例題として，上のパチンコの問題で，$p_1>p_2$ であるか，それとも $p_1\leqq p_2$ であるかを逐次推測で判定する問題が解かれている．loss ft. は，誤った決定を下したときの損失と観測総費用(すなわち，単位観測 cost × 観測個数)の期待値との和である．

(坂口　実)

SCODEL, A., RATOOSH, P. AND MINAS, J. S.: SOME PERSONALITY CORRELATES OF DECISION-MAKING UNDER CONDITIONS OF RISK

Behavioral Science, ***4*** *(1959) 19～28*

decision-maker の性格が彼のとる decision に影響を与えるか？ gambler は彼の expected gain を最大にするように賭けるのが normal であるか？ decision-maker の性格(personality)とその gambling behavior との関連を実験的に調べようというのがこの論文の目的である．

decision-maker の理論は，二つの仮定

(a) 主観的(subjective)確率が客観的(数学的ということ)確率と同じ

(b) 効用函数が linear

を assume すれば簡単になるが，あいにくこの仮定のもとの model では，人間が risk-taking situation で現実にどうふるまうかをみることはできない．

McGlothlin (1956) は競馬のかけでは，期待値が同一(あまり大きくない)ならば，高確率・低 payoff のかけよりも，低確率・高 payoff のかけに集中することを報告している．

Davidson-Suppes-Siegel (1957) は，主観的確率と客観的確率とのくい違いを除去する巧妙な技術で効用函数の実験的決定をやったが，そのとき 19 例の内 4 例は expected utility を最大にするようにふるまわなかった．

本論文の実験は次の通りである：player は 2 個のサイコロを 50 回ふる．始めに ＄10 与えられる．毎回どの賭(下表の如く A から I までの 9 種類ある)に幾ら(15￠と 30￠との 2 種類)をかけるかを選ぶ．当れば表にあるような賞金がもらえ，外れれば ante はとられる．50 回の play の後の final payoff は，そのときの財産 ＄x に対して

$$x\leqq 10 \quad ならば \quad x\times 0.1$$

$x>10$ ならば $1+(x-10)/2$

である（もちろん，途中で破産すれば0）

かけ	A	B	…	E	…	I
Winson 賞金	3	7	…	5, 6	…	2,3,4,5,6,7 10,11,12
15¢ pays	2.75	0.75	…	0.45	…	0.10
30¢ pays	5.50	1.50		0.90		0.20
確率	1/18	1/6	…	1/4	…	3/4

9種類のかけは，もし期待値を計算すれば，正，負，あるいは0のものもある．rational player ならば決してとらないようなバカなかけもわざと入れてある．この実験を 34 人の学生と 28 人の軍人に試みて得た data を比較して，学生と軍人の性格の違いがどのように現れているかを論じている．

（坂口　実）

STAM, A. J.: SOME INEQUALITIES SATISFIED BY THE QUANTITIES OF INFORMATION OF FISHER AND SHANNON *Information and Control*, **2** *101～112*

$p(x,\theta)$ は θ を助変数とする確率密度函数，

$$I(p)\equiv-\int p(x,\theta)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log p(x,\theta)\,dx$$

$$=\int p(x,\theta)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log p(x,\theta)\right)^2 dx$$

は Fisher の情報量である．いま

$$p(x,\theta)=q(x-\theta)$$

（ただし $q(x)>0$, $-\infty<x<\infty$；

$$\int q(x)\,dx=1,\quad \int xq(x)\,dx=0)$$

とかけるような場合を考える．このときは $I(p)$ は

$$\int\frac{(q'(x))^2}{q(x)}\,dx\equiv I_0(q)$$

となる．これは確率密度函数 $q(x)$ の sharpness を測る．たとえば，正規分布 $N(0,\sigma^2)$ に対しては $I_0(q)=\sigma^{-2}$.

確率分布の sharpness を測るものに，他に entropy power

$$N(q)\equiv\frac{1}{2\pi e}e^{2H(q)}$$

（ただし $H(q)\equiv-\int q(x)\log q(x)\,dx$ はShannon の情報量）

の逆数 $(N(q))^{-1}$ がある．

これらの量と分散との関係として，有名な

(Duguè-Cramer-Rao の不等式)

$$I_0(q)\geqq(\mathrm{Var}\,q)^{-1} \qquad (1)$$

(Shannon の定理) $(N(q))^{-1}\geqq(\mathrm{Var}.q)^{-1}$ (2)

があるが，この論文では，さらに

$$I_0(q)\geqq(N(q))^{-1}$$

が証明されている．(2)の故に，これは(1)の改良を示す．

この不等式を最終的に証明する途中に，不等式

$$1\leqq N(q)I_0(q)\leqq\begin{Bmatrix}\sigma^2(|\phi|^2)I_0(q)\\16\pi^2N(q)\sigma^2(|\varphi|^2)\end{Bmatrix}$$

$$\leqq16\pi^2\sigma^2(|\varphi|^2)\sigma^2(|\phi|^2)$$

の成立が示される．ただしここで

$$q(x)=|\phi(x)|^2,\quad \varphi(u)\equiv\int\phi(x)e^{-2\pi iux}dx$$

$$\sigma^2(|\varphi|^2)\equiv\int(u-u_0)^2|\varphi(u)|^2du\ (u_0\text{ は任意})$$

である．

両端の不等式

$$1\leqq16\pi^2\sigma^2(|\phi|^2)\sigma^2(|\varphi|^2)$$

が物理学などでよく知られた普通の uncertainty principle である．

$$1\leqq16\pi^2N(q)\sigma^2(|\varphi|^2)$$

は sharper result だが，面白いことにもっと強い

$$1\overset{?}{\leqq}16\pi^2N(q)N(|\varphi|^2)$$

が予想されるのである．これは書き直せば

$$H(|\phi|^2)+H(|\varphi|^2)\overset{?}{\geqq}1-\log 2$$

($|\phi|^2=(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1}\exp(-x^2/(2\sigma^2))$ のとき等号成立）

で，有名な不等式

$$H(|\phi|^2)+H(|\phi|^2)\geqq0$$

の改良である．

（坂口　実）

BELLMAN, R., GLICKSBERG, I. AND GROSS, O.: ON THE BANG-BANG CONTROL PROBLEM *Quart. Appl. Math.*, **14** *(1956) 11～18*

時刻 t における状態が n 次元 vector $x(t)$ で表わされる系があって，線型微分方程式

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f,\quad x(0)=c \qquad (1)$$

に従うとする．$f(t)$ は強制項で control を表わす．制御回路の理論で重要な一つの問題は，$x(t)$ が最小時間で0になるように f をきめることである．

仮定 (a)　A は実数要素の $n\times n$ 行列で，固有根は皆負の実部をもつ

仮定 (b)　$|f_i(t)|\leqq1$　$(i=1,\cdots,n)$

をおく．(a) は (1) の解が $\to 0(t\to\infty)$ のための必要充分条件である．

つぎの二定理が証明されている．

〔定理 1〕 仮定 (a), (b) のもとに，最小時間で $x(t)=0$ となるような f が存在する．それは bang-bang type の control:

$$|f_i(t)|\equiv 1 \quad (i=1,\cdots,n)$$

である．

〔定理 2〕 A の固有根が皆実根で，相異なりかつ負ならば

$$|f_i(t)|\equiv 1 \quad (i=1,\cdots,n)$$

かつ，各 $f_i(t)$ が高々 $(n-1)$ 回しか符号を変えないような minimizing f が存在する．

例題として $n=2$,

$$A=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

の場合をていねいに解いてある． （坂口　実）

BELLMAN, R., GLICKSBERG, I. AND GROSS, O.: SOME ASPECTS OF THE MATHEMATICAL THEORY OF CONTROL PROCESSES *RAND Report 313, 1958.* xix+*244 pp.*

制御過程の一つの数学的理論——定式化と解法——を提供するのが本書の目的であるという．著者らの扱う制御過程は普通技術者の考えるそれよりも，より抽象的かつ一般的であるが，実際上極めて重要な feedback control については何も扱っていない．

最初の部分（第 1 部線型函数方程式，第 2 部線型および 2 次制御問題，第 3 部拘束条件つきの変分問題）は一種の変分問題で，例えば系 $\dot{x}=Ax+f$, $x(0)=c$ において，与えられた汎函数 $F[x,f]$ の値を最小にするよう f をきめよ，というのである．f は controling force で，F はこれを働らかすときの cost を測る量である．F をいろいろの形にし，さらに x と f とに副次的な拘束条件を課すると，沢山の問題が派生する．それらに対していろいろな存在・一意性・連続性定理を示している．二，三の問題に対しては実際に最適解が求められている（その基本的な数学的道具は Neyman-Pearson の補題）例えば問題

$$\begin{cases} J[f]\equiv\int_0^T(1-x)^2dt=\min \\ \dot{x}=-x+f, \quad x(0)=1 \\ \int_0^T f(t)\,dt\le a(<T) \\ 0\le f(t)\le M(M>1)\end{cases}$$

の最適解は

$$f^*(t)=\begin{cases} 0, & 0\le t<-\log(1-\lambda) \\ 1-\lambda, & -\log(1-\lambda)\le t\le -\log(1-\lambda)+a/(1-\lambda) \\ 0, & -\log(1-\lambda)+a/(1-\lambda)<t\le T\end{cases}$$

で与えられる．ここに λ はある超越方程式（省略）の根である．

つぎの部分（第 4 部，約 70 頁）は dynamic programming の理論を説明し，いろいろの型の例題をあげている（特に最適在庫の問題をくわしく）．しかし Bellman の旧著 (1957) の内容を出ない．

第 5 部 (Game の理論) では系 $\dot{x}=Ax+f+g$, $x(0)=c$ において，対抗する 2 行動主体の一方が f を他方が g を control するとき，与えられた目標汎函数 $J[f,g]$ に対して均衡が生ずるかどうか：

$$\max_g \min_f J[f,g] \overset{?}{=} \min_f \max_g J[f,g]$$

を論ずる，と著書らは summary でいっているが，実際に書いてあるのは，単位正方形上のある種の連続ゲーム，簡単な poker ゲーム，min-max 定理の応用によるある種の変分問題の解法などに過ぎない．

本書の内容は今まで各種の雑誌に現れた著者らの多数の論文を，control process の表題のもとに集めたもので，本質的に新しい結果は殆んどない．dynamic programming については第 4 部だけであるが，Bellman の書物 (1957) との重複はやむを得ない．それでも例題にはなるべく新しいものを，という意図はうかがわれる．例によって多数の misprint および careless mistake がある．

（坂口　実）

GROSS, O. AND JOHNSON, S. M.: SEQUENTIAL MINIMAX SEARCH FOR A ZERO OF A CONVEX FUNCTION *Math. Tables and other Aids to Computation, **13** (1959) No. 65, pp. 44～51*

ただ一つの実変数をふくむ方程式の実根を計算する方法はいろいろあるが（最も有名なのは Newton の接線法），大てい計算が複雑である．それは導函数がもとの函数より大てい複雑になるからである．この論文の方法の特色は (1) sequential min-max なことの他に (2) 原函数の evaluation しか伴なわないことである．

根を一度び，充分小さな区間内に locate できた

ら，問題にしている函数は，その区間内では，convex あるいは concave とみなしてよいであろう(著しく non-analytic なものでない限りは)．そこで次の問題を考える：

$f(x)$ は連続かつ単調な凸函数で

$$f(0)=1,\quad f(1)=-a\,(a>0)$$

とする．$f(x)$ の零点を推定するのに，N 回の evaluation の後に，零点をふくむある区間を指定して，その幅を min-max にせよ．

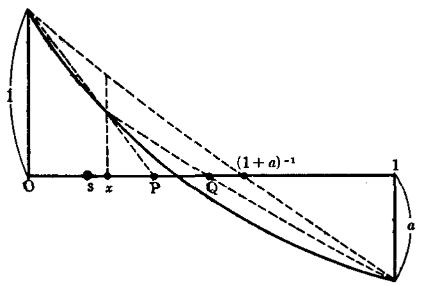
$f(x)$ は凸だから，零点が $\left(0,\ \dfrac{1}{1+a}\right)$ 内にあることは始めから明らかである．

$R_n(s,a)$…零点が区間 $\left(s,\ \dfrac{1}{1+a}\right)$ 内にあることが既知で，あと n 回の evaluation が許されるときに，最適政策を用いるときの推定区間の幅

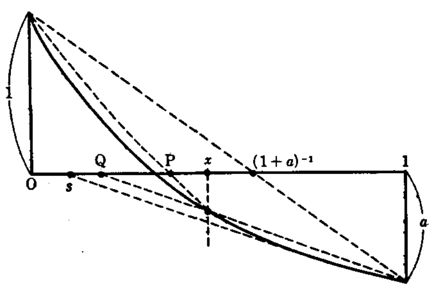
とおくと，函数方程式

$$R_n(s,a)=\min_{s\leq x\leq(1+a)^{-1}}\ \max\left[\begin{array}{l}\displaystyle\max_{0\leq v\leq 1-(1+a)x}(1-x)R_{n-1}\left(\frac{xv}{(1-x)(1-v)},\ \frac{v}{a}\right)\\ \displaystyle\max_{0\leq v\leq\frac{a(x-s)}{1-s}}\qquad xR_{n-1}\left(\frac{ax-v}{(a-v)x},\ v\right)\end{array}\right]$$

が成立することをみるのは容易である．それは x という点をえらんで $f(x)$ を evaluate したときに，今度は零点が図のように 2 点 P, Q の間に来る：



$v\equiv f(x)>0$ の場合



$v\equiv f(x)<0$ の場合

ことと，scale 変換とを考えればよろしい．

もちろん

$$R_0(s,a)=(1+a)^{-1}-s$$

であるから，上の漸化式より $R_n(s,a)$ が皆求まる．上式の右辺における min-max choice を $x_n^*(s,a)$,

$$\rho_n(s,a)\equiv\frac{x_n^*(s,a)-s}{(1+a)^{-1}-s}$$

とおいて，$\rho_n(0,a)$ $(n=1,2,3,4)$ が図示されている．

(坂口　実)

GLUSS, B.: AN OPTIMAL INVENTORY SOLUTION FOR SOME SPECIFIC DEMAND DISTRIBUTIONS

Noval Res. Logist. Quart., 7 (1960) 45～48

注文費用および信用損失が何れも比例的(係数それぞれ k, p)のときの動的在庫管理においては，需要分布が何であっても(ただし密度函数 $\varphi(s)>0$, $\int s\varphi(s)ds<\infty$ は仮定)，性質 A：

"最適在庫政策が定水準在庫政策になる"

があり，その水準 $\bar{x}$ は

$$k=\left(p\int_y^\infty+ak\int_0^y\right)\varphi(s)\,ds\quad(a\text{ は割引率})$$

のただ一つの正根として求められる．このよく知られた美しい結果は，両費用が比例的ということに決定的に負うものであって，例えばもしも信用損失が $p(s-y)+q$ (s は需要，y は starting stock, $q>0$ は定数)になったならば，もはや最適政策は一般にそんなに簡単な構造にならない．

$f(x)$…initial stock x のときに，最適在庫政策をつかって期待できる総費用

とおくと最適在庫方程式は

$$f(x)=\min_{y\geq x}\left[k(y-x)+a\left\{\int_y^\infty(p(s-y)+q+f(0))\varphi(s)\,ds+\int_0^y f(y-s)\varphi(s)\,ds\right\}\right]$$

だが，$aq\displaystyle\int_y^\infty\varphi(s)\,ds$ の項が附加されただけのために，数学的解析が面倒になるのである！

この場合，性質 A をもつためには，右辺の[ ]内を $0\leq y<\infty$ の函数と考えて，これが $y=\bar{x}$ ($\bar{x}$ はある定数)においてただ一つの極小をもてばよい．それには例えば $\varphi'(s)\leq 0$ であればよい(Bellman の本)．この論文では，需要密度函数がもっと一般的な class (それはすべての Pearson 型分布をふくむ)

に属するときに，性質Aがあるかどうかを調べる方法を提示する．それによると，例えば χ^2-分布

$$\varphi(y)\propto y^{n/2-1}\exp(-y/2)$$

や，F分布

$$\varphi(y)\propto y^{n_1/2-1}\{1+(n_1/n_2)y\}^{-(n_1+n_2)/2}$$

は $n, n_1>2$ のときに性質 A がある．（坂口　実）

KARLIN, S. : DYNAMIC INVENTORY POLICY WITH VARYING STOCHASTIC DEMANDS *Management Science* *6(1960)231～258*

この論文の目的は，動的在庫管理において，未来の需要分布が期ごとに変化するとき，最適在庫政策はどうなるかを調べるにある．

注文(購入)費用が比例的(係数k)，信用損失$p(\cdot)$および在庫保持費用 $h(\cdot)$ が何れも連続・凸・増大函数で $p(0)=h(0)=0$ とする，需要分布の密度函数が期ごとにそれぞれ $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$で，注文に対する配達のおくれがないとする．

$f(x;\varphi_1,\varphi_2,\cdots)$…initial stock が x で，期ごとの需要密度が φ_1, φ_2 のとき，最適注文政策をつかって望める総費用

とおくと，最適在庫方程式は明らかに

$$f(x;\varphi_1,\varphi_2,\cdots)$$
$$=\min_{y\geq x}\left[k(y-x)+L(y;\varphi_1)+a\left\{f(0;\varphi_2,\varphi_3\cdots)\int_y^\infty\varphi_1(\xi)d\xi+\int_0^y f(y-\xi;\varphi_2,\varphi_3,\cdots)\varphi_1(\xi)d\xi\right\}\right]$$

ただし

$$L(y;\varphi_1)\equiv\int_0^y\{h(y-\xi)-r\xi\}\varphi_1(\xi)d\xi+\int_y^\infty\{p(\xi-y)-ry\}\varphi_1(\xi)d\xi$$

となる(a は割引率，r は単位量当りの売上利益)．

つぎのことが証明されている．例えば $r>k$ のような当然な条件のもとに，最適注文政策は定水準政策になる(定理 1)．しかし水準が期ごとに変るのはもちろんである．さらに‘水準は需要分布につき単調増大である’(定理 2)，正確にいうと $i=1,2,\cdots$ に対して

$$\int_0^x\varphi_i(\xi)d\xi\geq\int_0^x\psi_i(\xi)d\xi \quad for\ all x$$

(φ_i が ψ_i より stochastically smaller，記号で $\varphi_i\subset\psi_i$)ならば，水準は

$$\bar{x}(\varphi_1,\varphi_2,\cdots)\leq\bar{x}(\psi_1,\psi_2,\cdots).$$

この定理の系として，需要分布 φ_i の間に stochastically に大小があるとき，期ごとの水準にもそれに応じた変化が生ずる．例えば $\varphi_1\supset\varphi_2$ ならば $\bar{x}(\varphi_1,\varphi_2,\cdots)\geq\bar{x}(\varphi_2,\varphi_3,\cdots)$(系 3)．

以上が §1, §2 の内容で，§3 では購入費用が凸函数 $k(\cdot)$の場合，§4 では backlog や配達のおくれのある場合，§5 では需要密度函数が未知母数をふくみ統計的方法で推定されねばならない場合を論じている．（坂口　実）

LEE, A. M. AND P. A. LONGTON; QUEUING PROCESSES ASSOCIATED WITH AIRLINE PASSENGERCHECK-IN, *Oper. Res. Quart., Vol. 10, No. 1, 56～71, 1959.*

空港もしくは町中のターミナルでは，飛行機に乗るためにやって来た客に対し，手荷物の重さを測ったり，記録したり，必要があれば料金をとったり，また航空券を塔乗券ととり替えたりというような業務をしなければならない．それでこの手続(check-in)をする係を置かなくてはならないが，いつでも数便の飛行機のための手続を同時に受付けなくてはならないので，とにかく係は数人いなくてはならないというような場合を考える．客の方から見れば，そのサービス基準は待ち時間プラスサービス時間であるが，航空会社の方から云えば，客を喜ばすだけでなく経済的に運用しなければならないので，サービス基準をいくらにすべきかということ以外に，どういうシステムをとると経済的になるかという問題が起ってくる．著者達はこれを理論的，実験的に検討して最適なシステムの型を決定し，これを著者達の所属する BEA(British European Airways)のいくつかのターミナルで実行したそうである．

1つの便毎に窓口の定っているもの(completely restricted system)，数便同時に受付けるもの(common check-in system)，ぎりぎりの時間より少し前まで(この間の時間を transfer time という)は common desks で受付け，ぎりぎりになったら特別の窓口(final desks)で受付けるもの(composite check-in system)などが考えられる．第1のものは窓口の暇な時間がふえるのと，出発時間間際に客が殺到すると，余程人数を増やしておかない限りサービスし切れない心配があるという点が欠点であるのに対し，第2のものは窓口の能率はよくなるが遅く来た客は，自分よりも出発の遅い客の後に並んで

余計時間をとってしまうおそれがあるという点が欠点である．とにかく飛行機が遅れると非常に高価な損失になるので，客の平均待ち時間を 0.5 分に押さえ，手続が遅れたために飛行機の出発が5分遅れることは5%の確率でしか起らないようにして，係の人数を最小にするというのが，この論文の目標であった．

理論的検討は第3の system について行い(極端な場合として始めの2つの system を cover するから)，まず common desks における input はポアソン到着であり，final desks には2項分布に従ってはいること，更にサービス時間はアーラン型であることを実測している．そして $M/Ek/n$ 型の平均待ち時間 $\bar{w}_n$ を

$$\bar{w}_n=\frac{1}{2}E_n(1+V^2)$$

で評価するとよく適うということを Monte Carlo 法で確めている．ここで，E_n は $M/M/n$ 型の平均待ち時間(*Erlang* 式から容易に求る)， V はサービス時間の変動係数であって， $n=1$ のときには Pollaczek-Khintchine-Kendall の公式として有名な $M/G/1$ 型における平均待ち時間の公式に一致する．従ってこれはある意味での拡張とも云えよう．この拡張公式は数年前 Owen によって考えられ非公刊の研究に用いられたが，ここでやったような経験的検証は行わなかったそうである．この公式が経験的に確められたことは待合せ理論の適用範囲の拡大に大きな力があると予想されるので，このことだけでも，この論文の価値は大きいと思われる．

この他にも随所に Monte Carlo 法を用いながら，理論構成を試み，最後に transfer time を5分にすると要員数最少になることを出している．そして結論としてこの結果が実用して成功だった点，またたとえば荷物運びのコンベヤーの速度と要員数との関係などにある程度の予想のつく点なども強調している．とにかく当然のこととはいいながら，実際問題を解析して行くには，このような研究態度こそとられるべきだとの感を深くした． (森村英典)

TAKÂCS, L: ON A PROBABILITY PROBREM CONCERNING TELEPHONE TRAFFIC, *Acta Math. Acad. Sci. Hung., Vol. 8, 319～324, 1957*

GI/M/m 型で即時式の場合を取扱う．ポアソン到着のときの呼損率を与える公式は Erlang 式として有名なものであるが，Takács はこれより以前の論文で一般入力の場合にそれを拡張し，平衡状態における state probability も exact に求めている (*Acta Math. Acad. Sci. Hung., Vol. 7, 419—433, 1956*)．ところが呼損率は Palm(1943) や Pollaczek(1953) に既に与えられていたので，Takács は，この論文でその証明を簡単化する努力をした．その基本方針は Ashcroft(*Jour. Roy. Stat. Soc.*, B,*12, 145—151, 1950*) が機械修理工の実動率などを求めるのに用いた差分をとっていって単純な再帰公式を導くというやり方である．チャンネルに番号をつけ，若い番号のものから接続して行く，Palm によって考えられた方式をここで仮に考え，ある呼が r 番目の回線をあふれてから，次にまたある呼が r 番目の回線をあふれるまでの呼の数の期待値を Γ_r とし，これについて renewal equation type の方程式を立て，それを前記の差分の方法で解くのである．

Ashcroft が取扱った型の問題，つまり m 台の機械と1人の修理工がいて，機械の故障はポアソン型で起り，修理時間は任意の型のとき，ある service period 内でサービスをする数の期待値が上の Γ_m に一致すること，従って Ashcroft の求めた結果の別証になることも注意している．その際，この誌上で紹介している 1957 年の Takács の論文の結果を使っている． (森村英典)

TAKÂCS, L: ON A STOCHASTIC PROCESS CONCERNING SOME WAITING TIME PROBLEMS, Теория Вероятностей и ее Применения, *Vol. 2, 92～105, 1957.*

雑誌はソ連アカデミーのもの(当 OR 学会に交換で来ている)であるが，この論文は英語で書かれている．対象は自動機械修理の問題であって，機械が m 台，修理工が1人で，機械の故障はポアソン型で起り，修理時間は任意の分布という場合の待ち行列である．これは電話交換の待時式の場合と考えてもよい．

ある時点 t で動いている機械の数を $\eta(t)$ とし，また特に，サービスの終了した時点を $\tau_1, \tau_2, \cdots\cdots$ で表わすこととして，$\eta(\tau_n-0)=\eta_n$ とおく．更に機械が k 個同時に動いているという状態を Ek で示すこととする．また $\lim_{t\to\infty} P\{\eta(t)=k\}=Pk^*$, $\lim_{n\to\infty} P(\eta_n=k)=Pk$ とする．機械は有限個しかな

いから，いわゆる finite population の場合であって，行列が無限に長くなることはないけれども，$\{P_k{}^*\}$，$\{P_k\}$が分布として存在するかどうかは証明を要することであり，もしそれが存在すれば平衡状態に達したと云ってよいであろう．この論文では極限分布$\{P_k\}$および$\{P_k{}^*\}$が存在することと，その exact な形を求めている．η_n がマルコフ連鎖を作ることはすぐわかるし，これは Kendall の imbedded Markov process と同じ考えだが，とにかくその推移確率も求められるので，原理的には極限分布の存在はもちろん，その形も求め得る．ここでは P_k についての binomial moments B_r，すなわち

$$B_r = \sum_{k=r}^{m-1} \binom{k}{r} P_k$$

を導入し，B_r についての再帰公式を導くことで $\{P_k\}$ を求めている．$\{P_k{}^*\}$ の方はこういう論法が利かないので $E_k \to E_{k+1}$ という推移の起る事象に着目し，これが $(0,\ t)$ の間で起る回数の期待値を $M_k{}^*(t)$ で表わし，$K=m-1$ のときには添字を落すと，

$$P\{\eta(t)=m\} = \int_0^t e^{-m\mu(t-x)} dM^*(x)$$

となる．ここでμは故障の起る rate である．そして $M^*(t)$ と $M_k{}^*(t)$ との間には，renewal theorem から，極限において $M^*{}_k(t) \sim P_k M(t)$ なる関係のあることが導かれる． rough な云い方をすれば，$dM^*(t)$ の極限の形も renewal theorem から得られ，これらのことから，$\{P_k\}$ のときと同様に binomial moment を使って$\{P_k{}^*\}$の形が得られる．存在はその間に証明されている．

一方，$(0, t)$の間で $E_{k-1} \to E_k$ と $E_k \to E_{k-1}$ の生起回数が高々１しか違わない，つまりそれらの期待値はほぼ等しいという事実を用いて評価すると$\{P_k\}$ を使って$\{P_k{}^*\}$が表わされることが容易に導かれる．いずれにしても，$\{P_k\}$ と $\{P_k{}^*\}$ の形が違っている．つまり imbedded process を作る時点における確率の極限分布は，普通のそれと若干異ることは，極めて興味深い事実であると思われる．

更に，平衡状態において，$\eta(t)=k$ という条件のもとでの待ち時間の分布，$(0, T)$における機械の平均稼動時間，修理工の暇な時間の期待値なども求めている． (森村英典)

TAKÁCS, L: ON A QUEUEING PROBLEM CONCERNING TELEPHONE TRAFFIC, *Acta Math. Acad. Sci. Hung., Vol. 8, 325～335, 1957*

$GI/M/m$ 型の queue の問題で，前記 “Probability problem …” と同じ対象であるが，ここでは state probability が極限分布をもつことを示し，その形を explicit に求めている．そのやり方は，“On a stochastic process…” と同様，binomial moment を用いて表現する方法であって，その論文と違う点は前のが finite population で窓口が１つであったのに対し，ここでは infinite population で窓口 m 個という点である．基本的な考え方は殆んど同様に進められるが結果の式が若干異っているのは当然であろう．ここでも $P(\eta_n=k)$ と $P(\eta(t)=k)$ とを考えている．前者の場合はつまり imbedded Markov process だから，その極限分布の証明は Kendall (*Ann. Math. Stat., Vol. 24, 338～354, 1954*) ですんでいるので，具体的な形を求めることだけがやられている．

$\{P^*\}$ の方，つまり $P\{\eta(t)=k\}$ の極限分布の存在も，前の論文と同様の方法，すなわち $E_k \to E_{k-1}$ と $E_{k-1} \to E_k$ という推移の回数の違いが高々１だという事実から $\{P_k\}$ に reduce するというやり方で求められる．そして，その結果，$P_0{}^*$ 以外の $\{P_k{}^*\}$ は

$$P_k{}^* = \frac{P_{k-1}}{k\alpha\mu} \quad (k=1, 2, \cdots, m-1)$$

$$P_k{}^* = \frac{P_{k-1}}{m\alpha\mu} \quad (k=m, m+1, \cdots)$$

という形で与えられることが示される．ここでαは到着時間々間の平均値で，このことから特に $M/M/m$ 型ならば $\{P_k\}$ と $\{P_k{}^*\}$ が一致することがわかる．なお，前論文同様，平衡状態における待ち時間の分布を計算し，その具体的な形を求めている． W. L. Smith (*Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 49, 449～461, 1953*) は，$GI/M/1$ 型の待ち時間の分布は必ず指数型になることを証明しているが，Takács のこの結果も指数型であるので，$GI/M/m$ 型でも同様の結論になりそうだとの予想を与える材料となるであろう． (森村英典)

SEVASTIJANOV, B. A; AN ERGODIC THEOREM FOR MARKOV PROCESSES AND ITS APPLICATION TO TELEPHONE SYSTEMS WITH REFUSALS, Терия ВерояТносТей и ее Применения, *Vol. 2, 106～116, 1957*

待合せ理論では，時点 t で n 人が系の中にいる状態の起る確率 $P_n(t)$ という量について微分方程式を作り，$t\to\infty$ の極限において平衡状態が達成される(エルゴード的である)として，この微分方程式系を連立一次方程式に reduce してから解く，というやり方がよく用いられる．有名な Erlang 式も大体そういうやり方で求められている．しかし，この極限移行が許されるという点をはっきり数学的に証明してあるものは案外少い．Markov chain についての Feller の理論を用いるというのが普通であるが，imbedded process ならばともかく，*M/G* 型になるとそれも出来ないので，この論文はそういう場合に使いやすい形で Markov process についての一つのエルゴード定理を述べ，それを用いて，Erlang 式はサービス時間の分布が指数分布でなくとも，平均値有限の任意の分布でも成立つことを示している．なお，この Erlang 式の拡張については，Fortet (1950) がサービス時間の分布が絶対連続のときにやってあり，*GI/M* 型のときの拡張は Takács その他がある(本誌紹介論文 "On a probability problem…" 参照)．

なお，ここで証明したエルゴード定理は数学的にきちんとした形であり，原論文の英文要約に記されている．原題は Б. А. СЕВАСТЬЯНОВ; ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К ТЕЛЕФОННЫМ СИСТЕМАМС ОТКЗАМИ. (森村英典)

MANNE, A. S.: LINEAR PROGRAMMING AND SEQUENTIAL DECISIONS *Management Science Vol. 6. No. 3, April 1960*

在庫のモデルで考える．需要分布 P_n(需要が n 個である確率，$n\geq 0$) が既知の時，期首在庫 i 個を知って生産量 j 個を決定する政策を一般に mixed strategies x_{ij} として考える．x_{ij} が与えられればこの系は一つの Markov 過程と考えられ，その平衡状態に於ける期待費用 $\sum_{ij}c_{ij}x_{ij}$ を最小にする問題として x_{ij} を逆に求める事は LP の問題に帰着される．制限条件としては

$$\sum_{ij}x_{ij}=1 \qquad x_{ij}\geq 0$$

$$\sum_{j}x_{tj}=\sum_{\substack{ijn\\ i+j-n=t}}P_n x_{ij} \quad (t=1,2,\cdots,T)$$

がある．第一の式の意味は明らかであろう．第二式の左辺は期首在庫が t になる確率，右辺は期末在庫がやはり t になる確率を示し，この両者が平衡状態では等しくなる筈である事を示している．

費用 c_{ij} としては期首在庫，生産量，品切れに関係する三つの費用の和が考えられている．

数値例として $P_0=2/3$, $P_1=0$, $P_2=1/3$ の場合の計算が示してあり，この場合には mixed strategy ではなく，pure strategy が出ている．

問題点として挙げてあるのは (1) 上の pure strategies と mixed strategies の問題，(2) $i+j$ の上限の問題(倉庫の大きさ)および (3) Markov 過程に於ける初期条件の影響でこのうち(3)は Dynamic Programming と関係をもっている．

応用の範囲としては (1) 生産費に季節変動のある場合の生産計画，(2) 需要の季節変動のある場合の在庫管理，(3) 倉庫が沢山ある場合の在庫管理 (4) 注文から入庫迄の間におくれのある場合の在庫問題等がありいづれも上のモデルに多少の修正を施して適用できる．

費用の期内変動，金利等を含んだ問題はまだ解かれていない． (柳井　浩)

BELLMAN, R.: ON A CLASS OF VARIATIONAL PROBLAMS *Quarterly of Appl. Math. 1957. pp. 353～359.*

在庫管理等に出て来る問題として

$$\sum_{n=0}^{T}[F_1(x_n-b_1(n),n)+\cdots +F_K(\triangle^{K-1}x_n-b_K(n),n)]$$

ただし，

$$\triangle x_n=x_n-x_{n-1},\ \triangle^2 x_n=x_n-2x_{n-1}+x_{n-2},\cdots$$

或いは

$$\int_0^T[F_1(x-b_1(t),t)+\cdots+F_K(x^{(K-1)}-b_K(t),t)]dt$$

$$x(0)=c_1, x'(0)=c_2,\cdots,x^{(K-1)}(0)=c_k$$

を最小にする問題がある．これらはいずれも，適当な条件の下に Dynamic Programming の方法によって数値的或いは解析的に解くことが出来る．離

散的，連続的の各場合について F_i が二次式になる時の解き方を $K=2$ についてはかなりくわしく，$K=3$ については大ざっぱに与えている．

離散的な場合，$K=2$：問題は

$$\underset{\substack{x_i\\ i=1,\cdots,N}}{\mathrm{Min}} \sum_{i=1}^{N} b_i(x_i-d_i)^2+c_i(x_i-x_{i-1})^2$$

$x_0=x$：既知

を求めることで，これを Dynamic Programming の形にすると，

$$f_N(x)=\underset{x_N}{\mathrm{Min}}\,[b_N(x_N-d_N)^2+c_N(x_N-x)^2]$$

$$f_i(x)=\underset{x_i}{\mathrm{Min}}[b_i(x_i-d_i)^2+c_i(x_i-x)^2+f_{i+1}(x_i)]$$

これは

$$f_i(x)=u_i+v_ix+w_ix^2$$

とおけることから，この u_i, v_i, w_i を $i=N$ から $i=2$ 迄求め，次に

$$x_i=\frac{x_{i-1}c_i+d_ib_i-v_{i+1}/2}{b_i+c_i+w_{i+1}}$$

によって $x_i\, i=1, \cdots, N$ を与えられた $x_0=x$ から逐次計算すればよい．

連続的な場合，$K=2$：問題は

$$\int_s^T[a_1(t)\,(x-b_1(t))^2+a_2(t)(x'-b_2(t))^2]dt$$

$$0\leq s\leq T,\ x(s)=c,$$

を最小にする事で Dynamic Programming の考え方で

$$2a_1(s)\,(v-b_2(s))+f_c=0$$

$$\underset{v}{\mathrm{Min}}\, a_1(s)(c-b_1(s))^2+a_2(s)(v-b_2(s))^2$$

$$+f_s+vf_c=0$$

なる v を s の関数として求めることに帰着されることがわかる．

$$f(c,\ s)=p(s)+cq(s)+c^2r(s)$$

とおけることから，問題はさらに

(a) $p'(s)=-a_1{}^2(s)+b^2(s)q(s)-q^2(s)/4a_2(s)$

(b) $q'(s)=2a_1(s)b(s)+2b_2(s)r(s)-q(s)r(s)/a_2(s)$

(c) $r'(s)=-a_1(s)-r^2(s)/a_2(s)$

$p(T)=q(T)=r(T)=0$

を解くことに帰着され，これは(c)が Riccauti の微分方程式であることから解ける．こうして $f(c,s)$ が求まったら，

$$\frac{dx}{dt}=v(x,t)=\frac{-q(t)+2yr(t)}{2a_2(t)}+b_2(t)$$

によって $x(t)$ を得る．

（柳井　浩）

KARLIN, S. "MATHEMATICAL METHOD AND THEORY IN GAMES, PROGRAMMING, AND ECONOMICS."

2 Vols Adison-Wesley 1959

この本は上下各400ページに上るかなり大部な本である．その趣旨は著者の序文によれば，decision making にふくまれる数学の重要性がますます増大していることにかんがみ，ゲーム，プログラミング，数理経済学の理論において発展しつつある数学的な理論の総合を目ざしたものである．従ってこの本はそれらの分野を統一的に貫いている数学的な論理を展開することを目ざしているものである．

まず第1巻では finite game から出発して，有限零和2人ゲームのミニマックス定理→リニアープログラミングの双対定理→ノンリニアープログラミング，特に concave programming→レオンティエフ体系，線型および非線型の均衡理論という順で展開される．

この構成からもわかる通り，この本は一般的な均衡点に関する数学理論を中心として体系的にかかれたものであって，各分野を総括的にのべたものではない．従って n 人ゲームのことは全くのべられていないし，プログラミング問題でもダイナミックプログラミングには全くふれられていない．しかしゲームやリニアープログラミングについては，いくつかの有名な例題がくわしく解説されていて，それ自体興味あるものをふくんでいる．

数学的な叙述は厳密であり，証明もきちんとなされているので，各分野についてこれまで概略は知っていたものにとっても，改めて体系的な正確な理解を得るのに有用であろうと思われる．

もう少しくわしく内容を紹介すると，第1章がゲームの定義とミニマックス定理の証明．第2～3章が行列ゲームにおける optimal strategy の構造，すべての optimal strategy を定めること，第4章，ゲームの例題，ここでは Blotto 大佐の問題，敵味方判別の問題，ポーカー，広告費配分の問題，かけしきの問題があげられている．

ここまでが第1部で，次に第2部では，第5章ではリニアープログラミングの双対定理がくわしく論ぜられ，例題として，倉庫問題，割当問題，輸送問題，輸送路の問題および caterer の問題といわれるものと価格投機の一例があげられている．第6章には計算法としてシンプレックス法と，ゲームの価の漸近的な近似法がのべられている．

第7章はノンリニアープログラミングという題であるが，concave programming のことを扱い，Kuhn-Tucker の定理，gradient 法，および conjugate function を用いる方法と concave programming における双対定理が論ぜられている．

第8章は経済モデル，まづレオンティエフモデル，元か正である行列の理論を用いる線型均衡論，次に非線型均衡論，不動点定理による存在定理が展開されている．第9章は第8章の続きとして，均衡点のパレート最大性の証明，均衡点の local および global な安定性，および動的均衡が論ぜられている．

第2巻は無限ゲームを対象としているが，第1巻とは様子が違って，無限ゲームのいろいろな場合をくわしく論ずるという形になっている．第1章は第1巻の第1章をそのままくり返えして入れて，第2巻だけでも独立な著作となるようになっているが，第2章で無限ゲームの一般的な解を論じたあとは，第3章では separable および polynomial game, 第4章では convex game, 第6章ではタイミングのゲーム(例えば両方から一発ずつの弾をこめた銃を持って決闘者がだんだんお互いに近づいて来るような場合)，第7章では主として payoff が $K(\xi-\eta)$ という形のものについて，具体的な解の構造と作り方を論じている．ここまではゲームの strategy が実数により，その payoff が $\xi\,\eta$ の函数として表わされる場合であるが，第9章では strategy が函数として表わされる場合を考える．その例としては fighter-bomber duel, および次の章で扱われているポーカーがある．(ポーカーにおいては，strategy は自分にくばられた手の函数になるわけである)ポーカーについてはいろいろな場合が論ぜられている．函数空間では mixed strategy は導入されていないが，それは今後の問題であると著者はのべている．

第2巻については，全体としていろいろな問題をくわしく論じてはいるが，とりあげられた対象がやや片寄っているような感じを受ける．例えば recursive な関係をふくむ game, 或いはいわゆる differential game 等が全く論じられていないのは残念である．(竹内　啓)

DREYFUS, E. S.: AN ANALYTIC SOLUTION OF THE WAREHOUSE PROBLEM. *Management Science. Vol. 4 No. 1, Oct., 1957, pp 99～104*

向うN期の売り値，買い値がわかっている時，購入量，販売量の最適値をきめる動的計画で，一個当りの買い値 c_i, 売り値 p_i, 購入量 x_i, 販売量 y_i, ここに $i=1,\cdots,N$ で期の番号とする．なお y_i は調節出来る値である．

$f_i(v)=$(初期在庫 v のとき最適計画によってあと i 期であげる最大の利益)

とするとき，

$$f_N(v)=\max_{x_N,\,y_N}\left[p_Ny_N-c_Nx_N+f_{N-1}(v+x_N-y_N)\right]$$

$x_N,\ y_N$ の領域は

$$y_N\leqq v,\ v+x_N-y_N\leqq B,\ x_N,\ y_N\geqq 0$$

このとき $f_N(v)=K_N+L_Nv$ と書けることが証明される．ここに $K_1=0,\ L_1=p_1$. 又 $K_N,\ L_N$ は次の様なものである．

(i)　$c_N>p_N$

$c_N<L_{N-1},\ v+x-y=B$;

$K_N=K_{N-1}+L_{N-1}\cdot B-c_NB$

$L_N=c_N$

$p_N<L_{N-1}<c_N,\ v+x-y=v$;

$K_N=K_{N-1}$

$L_N=L_{N-1}$

$L_{N-1}<p_N,\quad v+x-y=0$;

$K_N=K_{N-1}$

$L_N=p_N$

(ii)　$p_N>c_N$

$L_{N-1}<c_N,\quad v+x-y=B$;

$K_N=K_{N-1}+L_{N-1}\cdot B-c_NB$

$L_N=p_N$

$L_{N-1}>c_N,\quad v+x-y=0$;

$K_N=K_{N-1}$

$L_N=p_N$

この後 $N=10$ の場合について c 及び p にデータを与えて計算を行った例がのっている．(柳井　浩)

BELLMAN, R.: NOTES ON THE THEORY OF DYNAMIC PROGRAMMING — TRANSPORTATION MODELS *Management Science Vol. 4, No. 2, Jan. 1958*

配分問題を D. P. で解くやり方を示したものである．配分問題は周知の通り，夫々 $x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n$ の資材を保有する貯蔵地から夫々 $y_1, y_2, \cdots y_j, \cdots y_N$ の需要のある消費地へ夫々 x_{ij} ずつ資材を供給する際に，その総運搬費用

$$C=\sum_{ij}d_{ij}\cdot x_{ij}$$

を最小にする様な供給方式 x_{ij} を選ぶ事である．ただし需要と供給はバランスしていて，$\sum_i x_i=\sum_j y_j$, $\sum_j x_{ij}=x_i$, $\sum_i x_{ij}=y_j$, $x_{ij}\geqq 0$ なるものとする．さてこの問題を D. P. で解くには $f_N(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$=\underset{x_{ij}}{\mathrm{Min}}\, C$ とおいて

$$f_N(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$=\underset{x_{i1}}{\mathrm{Min}}\left[\sum_{i=1}^{n} d_{i1}\cdot x_{i1}+f_{N-1}(x_1-x_{11}, x_2-x_{21}, \cdots, x_n-x_{n1})\right], \text{ etc.}$$

ただし　$x_{i1}\geqq 0, \ \sum_{i=1}^{n} x_{i1}=y_1$, etc.

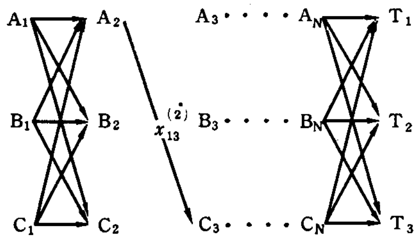
$$f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)=d_{1N}x_1+d_{2N}x_2+\cdots+d_{nN}x_n$$

で逐次に計算できる．

次に多段配分問題を考えてみる．3個ずつ平列に並んだ生産地 A_i, B_i, C_i (保有量 $x_i, y_i, z_i, i=1, \cdots, N$) において，$A_1, B_1, C_1$, から出発して需要量 r_1, r_2, r_3 を有する消費地 T_1, T_2, T_3 にはこぶときその総費用

$$\sum_{i\cdot j\cdot k} d_{ij}{}^{(K)} x_{ij}{}^{(K)}$$

を最小にする $x_{ij}{}^{(K)}$ を選ぶのが問題である．



この問題を $D.P.$ で解くには前と同様 $f_K=(A_K, B_K, C_K$ において各々 x, y, z の保有量で出発して最適政策を用いて運搬した場合の総費用)

とする時

$$f_K(x, y, z)=\underset{\{x_{ij}\}}{\mathrm{Min}}\Big[\sum_i (d_{1i}{}^{(K)}x_{1i}+d_{2i}{}^{(K)}y_{1i}+d_{3i}{}^{(K)}z_{1i})+f_{K+1}(x+x_{11}{}^{(K)}+y_{11}{}^{(K)}+z_{11}{}^{(K)}, \cdots, z+x_{13}{}^{(K)}+y_{13}{}^{(K)}+z_{13}{}^{(K)})\Big]$$

を用いて逐次計算することが出来る．

ただしこの場合も制限条件として

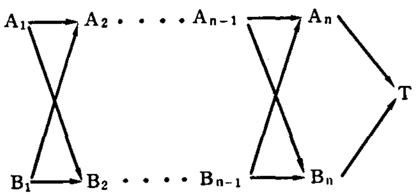
$$x_{ij},\ y_{ij},\ z_{ij}\geqq 0$$

及び需要と供給のバランス

$$r_1+r_2+r_3=\sum_i x_i+\sum_i y_i+\sum_i z_i$$

が加わる．

最後に通信量の問題を考えよう．通信網として



を考える．ここに各矢印は情報の流れを示しているがこれには上限 C がある．このとき，T に流れこむ情報の量を最大にするにはどの様にすればよいか？というのが問題である．今迄と同様 A_k, B_k で x, y の情報量で出発して

$f_K(x, y)=$ (最適の方法をつかったとき T に流れ込む情報の量.)

とすれば

$$f_n(x, y)=\mathrm{Min}(x, d_1)+\mathrm{Min}(y, d_2)$$

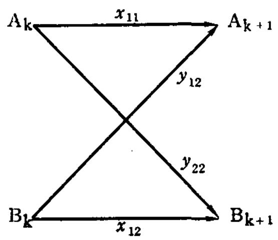
$$f_k(x, y)=\underset{R}{\mathrm{Max}}[f_{k+1}(x_{11}+y_{21}, x_{12}+y_{22})]$$

なる式で逐次計算出来る．

R は

$$x_{11}+x_{12}\leqq x, \quad y_{21}+y_{22}\leqq y$$
$$0\leqq x_{11}\leqq c_{11}, \quad 0\leqq x_{12}\leqq c_{12}$$
$$0\leqq y_{21}\leqq c_{21}, \quad 0\leqq y_{22}\leqq c_{22}$$

なる領域で，x_{ij}, y_{ij} は



なる各情報量である．$c_{ij}\ d_i$ は各情報路の容量である．

(柳井　浩)

WOLFE, P. THE SIMPLEX METHOD FOR QUADRATIC PROGRAMMING

Econometrica **27**, *3 (1959)*

Quadratic Programming に simplex mothod を応用して解くことは，これまでもいろいろと考えられてきたが，この方法は中でも簡単な方法であると思われる．

x ($n\times 1$　ベクトル)　b ($m\times 1$　ベクトル)

A ($m\times n$　行列)

p ($n\times 1$　ベクトル)

c ($n\times n$　positive semi-definite 行列)

λ (定数　$\lambda\geq 0$)

問題：$x\geq 0$　$Ax=b$ の条件の下で

$$f(\lambda, x)=\lambda px+1/2x'cx$$

を最小にする x を求めること．

ここでは λ を特定の値に固定した場合と，すべての λ について同時に解を求める問題とを同時に考える．前者を short form，後者を long form という．

計算の基礎になるのは次の定理である.

$x\geq 0$ $Ax=b$ とする. もし $v\geq 0$($n\times 1$ ベクトル) および u($m\times 1$ ベクトル)があって

$$v'x=0$$
$$Cx-v+A'v+\lambda p'=0$$

ならば, x は上記の問題の解になっている.

この定理は Kuhn-Tucker の一般定理の特殊な場合にすぎない. この定理は解の充分条件を具えるにすぎないが, 実はこのような条件を満足する解が常に存在することが示される.

そこでこのような等式を満す x, u, v を見つければよいわけであるが, それには問題を更に linear programming の形にして解く.

まず short form は次のように2段階に解く.

1. Initiation. z^1, z^2, w をそれぞれ n, n, m 次元のベクトルとして,

$$Ax \qquad\qquad +w=b$$
$$Cx-v+A'u+z^1-z^2=-\lambda p'$$
$$x, v, z', z^2, w\geq 0$$

の条件の下で, $v=0$. $u=0$ となるようにしながら,

$$\sum_i w_i$$

を最小にする. この値を0にしたときに残っている z^1, z^2 をあらためて Z と表わし, その係数行列を E として,

2. Recursion $Ax \qquad\qquad =b$

$$Cx-v+A'v+EZ=-\lambda p'$$
$$x, v, Z\geq 0$$

の条件の下で, $\sum Z_k$ を最小にする. $v'x=0$ の条件を保ちながら, base を変えて行って, $\sum Z=0$ となったときの x の値が解を与える.

long form の方は次のようにする.

1. Initiation まづ $\lambda=0$ として short form を行う. 次に

2. Recursion $Ax \qquad\qquad =b$

$$Cx-v+A'u+\mu p'+EZ=0$$

を上の解と $\mu=0, Z=0$, から出発して

$v'x=0$ となり, かつ Z_j は base に入らないようにしながら, $-\mu$ を最小にするように, 一つずつ base をかえて行く. そのときの μ の値が順次 $0=\mu_0<\mu_1<\mu_2<\cdots\mu_k$ と変わり, それに対応する x か $x_1, x_2, \cdots x_k$ となれば

$\mu_k\leq\lambda\leq\mu_{k+1}$ という範囲の λ に対する答は

$$x=\frac{\mu_{k+1}-\lambda}{\mu_{k+1}-\mu_k}x_k+\frac{\lambda-\mu_k}{\mu_{k+1}-\mu_k}x_{k+1}$$

で与えられる. (竹内 啓)

BELLMAN, R.: FUNCTIONAL EQUATIONS AND SUCCESSIVE APPROXIMATIONS IN LINEAR AND NONLINEAR PROGRAMMING *Naval Res. Logist. Quart.* **7** *(1960), 63～84*

この論文は, 古典解析学の二つの主要な道具——函数方程式と逐次近似法——のいろいろな多次元極値問題への応用について解説したものである.

最近の計算機械の進歩はこの種の, 10 年以前には数学では扱えない分野と考えられていた特殊な問題の解法に大いに貢献している. 問題を最も一般的な形で述べると

$$\begin{cases} F(x_1, \cdots, x_N)\equiv\sum_{j=1}^{N} g_j(x_j)=\max \\ \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x_j)\leqq c_i \quad (i=1, 2, \cdots, M) \\ x_j\geqq 0 \quad (j=1, \cdots, N) \end{cases} \qquad (*)$$

となる. 函数 g_j, a_{ij} がことごとく線型のときは LP であるわけで, x_j が連続変数で M, N が過大でないときには simplex 法が大変有用であることは誰でも知っている.

ところで, M が '小さい' ときには g_j, a_{ij} の函数形の如何を問わず, また変数が連続型・離散型のどちらであろうとも, DP の手法でこの問題が解けることは余り知られていない.

現在のところ問題(*)の一般的解はまだ与えられていないが, 永久にずっとそうだということはまずない. 拘束条件式の構造と系の発生的特徴とを利用したいろいろ特殊なくふうを考案すべきである. こういう努力は一般に数学者の興味はひかないが, 科学の発展の流れにそい, ビッコな数学にならないためには必要である.

まず g_j, a_{ij} が全部線型のとき, すなわち LP を DP で解く方法, 特に次元の縮小について述べてある. 次元縮小の一般的方法 —Lagrange 乗数法— は LP に限らず任意の場合に使える, その説明がある. それから F が二次形式, a_{ij} が皆線型の場合, すなわち quadratic programming について, およびさらにこれを拡張して g_j がみな concave な場合の DP 的扱い法が示されている. 最後に制御過程のある種の問題

$$\begin{cases} J[y]\equiv(x_N\cdot\alpha)=\max \\ x_{n+1}=A_n x_n+y_n, \quad x_0=c \\ B_n y_n\leqq C_n x_n, \quad y_n\geqq 0 \end{cases}$$

(行列記法による)を(*)の形に直しそれを DP で解くやり方をくわしく説明している. (坂口 実)