貨車輸送におけるダイヤの決定について

山　田　　　孜*

1.　序

貨車操車場において単純組成される貨車群(列車)を次駅に出発させるためのダイヤを決定する一つの方法を述べる．我々の方法を要約すれば，損失の二大要因である．

イ．牽引不足による損失

ロ．滞貨による損失

のある意味での和を最小にすることを目標としたものである．

註．出発前の点検による遅れや出発線のふくそう，着駅における受入れの都合等のダイヤへの影響は，我々の立場では，本質的なものではないと考え除いてある．

種々の困難を除くために次の仮定を設けることにした．

Ⅰ．一日の到着貨車両数は，その平均値のまわりに比較的よく集っている．

Ⅱ．ある車両が到着してから初めて出発する列車にその車両が連結できなくても，次の列車では必ず出発できるようにダイヤを計画することができる．

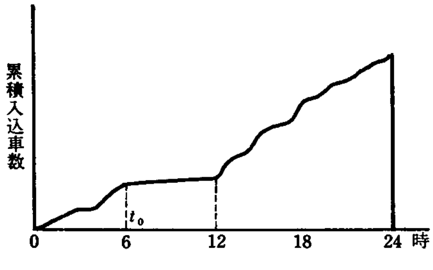
Ⅲ．出発ダイヤは 24 時間周期とする．

2.　一日の出発列車本数が固定できる場合

まづ入込車に特定の形の 24 時間週期があるため牽引不足を許しても翌日まで貨車を残さず，その日のうちに送ってしまう方がよい場合を対象とする．換言すれば 24 時間ごとに滞溜貨車数を零にするような方針をとるものとする．

（i）　時間の原点の移動

例えば右図のように一日の中のある期間で比較的長い間入込車がなくその期間以外での入込車がほぼ一様である場合は，入込車がない期間中の滞溜車輛が滞貨による損失として非常に大きく影響するので入車の休止期間の始まる時点 t_0 において一列車を出発させ，休止期間中の滞溜車数を0にすることが望ましい．



第 1 図　入車状況の一例

上のように滞溜車数を0にすべき点が少くとも一つ見つかるならば，その点を時間の原点と考

---

*　岐阜大学工学部　1959 年 12 月 1 日受理．

え，入込車数の累積をそこから数えることにする．(24 時間以内にそのような点がない場合は次節 §3 で取扱う．)

時間の原点の移動を行ったなら，入込車の累積数を時間パラメーターに関し週期 24 (時)をもつ確率過程とみなして $U(t)$ で表す．簡単のため $U(t)$ は，以下において，平均値函数 $\lambda(t)$ の Poisson 過程とする．

(ii) 一日の列車本数の決定

一列車の牽引定数を K 両とするとき

$$U(24)-Ks>0$$

となる確率を極めて小さくする s をとり，これを一日の列車本数とする．

(iii) 出発時刻の決定式

求める出発時刻を $t_1, t_2, t_3, \cdots, t_s$(但し $0<t_1<t_2<\cdots<t_s=24$)とする．記述を簡単にするため

$$U(t_k)=U_k \qquad (k=1,2,\cdots,s)$$

$$t_{k+1}-t_k=x_k \qquad (k=1,2,\cdots,s-1)$$

とおく．§1 で述べたことをもう一度繰返すが，一列車の最大牽引両数を K 両とすれば，t_1 までに K 両以上たまったときには，その過剰分は次の列車を待たねばならないが，それらの過剰分は必ず t_2 時発列車で出発できるものと仮定する．t_1 までに $2K$ 両以上溜る確率が大きいようでは最適出発時刻からは程遠いからである．$t_2, t_3, \cdots, t_{s-1}$ に関しても同様に仮定する．

時刻 t_k のまわりの損失を C_k としこれを，t_k で牽引定数不足(電報略号ケス不足)を生じた場合と生じなかった場合とに分けて表わそう．このためまず，時刻 t_k において乗り遅れる貨車両数を $H(t_k)=H_k$ で表すと

$$H_0=0,\ \ H_k=(U_k-U_{k-1}+H_{k-1}-K)^+$$

であり，$\{H_k\}_{k=1}^{\infty}$ は Markov 連鎖となり，t_{k+1} における状態 h_{k-1} から t_k における状態 h_k に移る transition probability $p(h_k, h_{k-1}, t_k, t_{k-1})=p(h_k, h_{k-1})$ は

$$\begin{aligned} &p(h_k, h_{k-1})=P(H_k=h_k|H_{k-1}=h_{k-1})=P((U_k-U_{k-1}+h_{k-1}-K)^+=h_k) \\ &p(h_1, 0)=P(U_1-K=h_1) \end{aligned} \tag{1}$$

で与えられる．この H_k を用いて C_k を表すと

$$C_k=\begin{cases} -a(U_k-U_{k-1}+H_{k-1}-K)+\displaystyle\int_{t_{k-1}}^{t_k}(U(t)-U_{k-1})dt & \textit{for } H_k=0 \\ x_k(U_k-U_{k-1}+H_{k-1}-K)+\displaystyle\int_{t_{k-1}}^{t_k}(U(t)-U_{k-1})dt & \textit{for } H_k>0 \end{cases} \tag{2}$$

但し，C_s においては $x_s=0$ とする．また a は「1 貨車ケス不足」による損失の推定値(定数)であり，それは問題の貨車を 1 両運ぶことによって得る収益 A に等しいとみなせる.*

従って時刻 t_k のまわりの損失の期待値は，

記号についての注意) Z^+ は Z の正部分を表す．$P(A|B)$，$P^z A$ は条件付確率 $E(X|Z=\zeta)$，$E^z X$ は条件付平均値を表す．

$$EC_k = EE^{H_{k-1}}C_k = \sum_{h=0}^{K-1} P(H_{k-1}=h)E(C_k|H_{k-1}=h)$$

$t>t_{k-1}$ とするとき $U(t)-U_{k-1}$ と H_{k-1} との独立性に注意して

$$E(C_k|H_{k-1}=h) = aE(U_k-U_{k-1}+h-K)^- + x_kE(U_k-U_{k-1}+h-K)^+$$
$$+E\int_{t_{k-1}}^{t_k} U(t)\,dt - x_{k-1}EU_{k-1}$$

を得るから

$$EC_k = \sum_{h=0}^{K-1} P(H_k=h)\{aE(U_k-U_{k-1}+h-K)^- + x_kE(U_k-U_{k-1}+h-K)\}$$
$$+E\int_{t_{k-1}}^{t_k} U(t)\,dt - x_{k-1}EU_{k-1} \tag{3}$$

ここに $P(H_{k-1}=h)$ は (1) により次のように表すことができる.

$$P(H_{k-1}=h_k) = EP^{H_{k-1}}(H_k=h_k) = \sum_{h_{h-1}} P(H_{k-1}=h_{k-1}|H_{k-1}=h_{k-1})$$

帰納的に

$$= \sum_{h_{k-1}} p(h_k, h_{k-1}) \sum_{h_{k-2}} p(h_{k-1}, h_{k-2}) \cdots \sum_{h_1} p(h_2, h_1)p(h_1, 0) \tag{4}$$

以上をまとめて

$$EC = \alpha_1 a \sum_{k=1}^{s} \sum_{h=0}^{K-1} Q_{h_{k-1}} E(U_k-U_{k-1}+h-K)^- + \alpha_2 \sum_{k=1}^{s} x_k \sum_{h=0}^{K-1} Q_{h_{k-1}} E(U_k-U_{k-1}+h-K)^+$$
$$+\alpha_3\left(\int_0^{24} EU(t)\,dt - \sum_{i=1}^{s-1} x_i EU_i\right) \tag{5}$$

ここに　$Q_{h_k} = \sum_{h_{k-1}} p(h_k, h_{k-1}) \sum_{h_{k-2}} p(h_{k-1}, h_{k-2}) \cdots \sum_{h_1} p(h_2, h_1)p(h_1, 0)$

但し　$Q_{h_1} = p(h_1, 0) = P(U_1-50=h_1)$

$p(h_k, h_{k-1}) = P((U_k-U_{k-1}+h_{k-1}-K)^+ = h_k)\qquad k\geq 2$

この EC を最小にする $\{x_k\}$ を求めれば，最適出発時刻 $\{t_k\}$ が求まる.

注意 ($H_0=0$. 従って $Q_{h_0}=1$, 即ち $K=1$ のとき $\sum_h$ は $h=0$ の項だけとなる.)

---

* a の導入は，概念的には掴み易いが，いささか抽象的な嫌いがあるので，A を a の代りに用いてよいことを示しておく. C_k も絶対的な損失というより，むしろ最小にすべき目的函数として簡単化された本質的損失というべきものであり絶対的な損失額は時刻 t_k のまわりで次のように表される.

$$C_k' = \begin{cases} LT+A(K-G_k)+\triangle & for\ H_k=0 \\ LT+AK+x_kH_k+\triangle & for\ H_k>0 \end{cases}$$

ここに L は機関車の1時間当り走行経費を貨車時に換算したもので, T は問題の貨物列車の走行所要時間. 従って LT(貨車時)は列車の運転経費である. また, $H_k=(U_k-U_{k-1}+H_{k-1}+K)^+$, $G_k=(U_k-U_{k-1}+H_{k-1}-K)^-$, $\triangle = \int_{t_{k-1}}^{t_k}(U(t)-U_{k-1})\,dt$ である.

従って

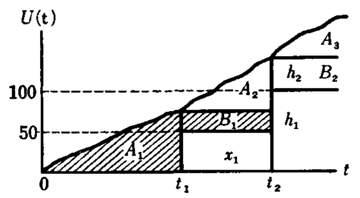
$$C_k' = LT+AK+C_k,\qquad A=a$$

である.

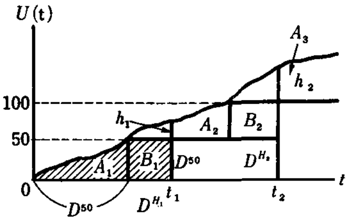
(5) 式の右辺の各項は夫々ケス不足による損失，乗り遅れによる滞貨損失および財源待ちによる損失を表してをり，係数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は夫々の項に対する加重(或は損失単位とでもいうべきもの)である．

t_1 時点で $H_1=h_1>0$ 即ち過剰貨車を生じた場合の損失は第2図の斜線の部分で表される．但し貨車の累積を縦にとり，横に時間をとってあり面積は単位貨車時で測られる．(5) 式はすべての実現可能な場合にわたって平均し，更に A_1 の部分には α_3, B_1 の部分には α_2 の加重がなされている．

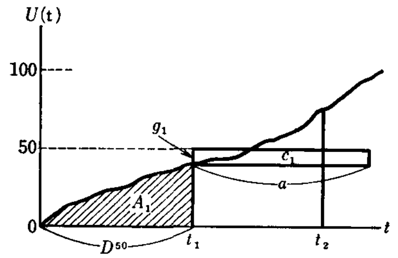
以下の文章では，我々は $\alpha_1=\alpha_2=1$, $\alpha_3=0$ の場合のみを扱っている．それは財源待ち(方向別にある数量となるまで貨車を滞溜させてをくこと)は乗り遅れより心理的に損失が小さいと考えたからである．即ち列車を待つ客を考えるとき，同じ列車を待つ仲間と待っている間の待ち時間 A_1 よりも，自分達だけ乗り残されたときの待ち時間 B_1 の方が遙かに長く感ずることからの



第 2 図



第 3 図 t_1時点のまわりの損失(U_1 50)



第 4 図 (t_1時点のまわりの損失(U_1 50)

類推で，後者に大きく加重したのである．要するに過剰分の乗り遅れ(乗り残りによる遅れ)の事実を強調したものである．しかし待ち時間の分類には，上のもの以外に種々の分け方があるであろう．

その第二の方法として，例えば第3図の如く分けて A_1 を財源待，B_1 をダイヤ待と呼んでよいであろう．この場合 B_1 に加重することは，客が満員になったのに列車を出さないというサービスの悪さによる損失を強調するものである．過剰分を生じた場合に対して待時間の二通りの分類の仕方をみたのであるが，他方 $H_1=0$ 即ちケス不足を生じたときは，第4図の示すごとく，B の部分がなくなるので二つの A は一致してしまう．云いかえれば，第4図において A_1 の部分は，t_1 時発列車を仲間と一諸に待っている客たちの待時間と考えてもよいし，或は満員になるまで待っている客たちの待時間と考えてもよいのである．上記二通りの損失計算法では損失が待ち時間の一次式であったが，さらに損失を例えば時間の二次式で表すことにより客の待ち疲れの様子を表すようにする第三の方法も考えられるであろう．

上記第二法を $U(t)$ が一様 poisson 過程に従うとき，即ち貨車到着の時間間隔 $D_1, D_2, \cdots$ が独立な指数分布(しかも同一平均値 $1/\lambda$ をもつ分布)に従うときについて述べる．簡単のため，原

点を適当にとることにすれば，最初の貨車が入る迄の時間 D_0 も $D_i(i=1,2,\cdots)$ と同一分布に従い，$\{D_i\}_{i=0}^{\infty}$ 全体が同一分布の独立変数列をなすとしてよい．

一つの貨車が入ってから r 両の貨車が入るまでの時間を D^r とすれば，分布を扱う限り

$$D_0+D_1+D_2+\cdots+D_{r-1}=D^r=D_{i+1}+D_{i+2}+\cdots+D_{i+r}$$

と考えて差支えない．そこで t_k のまわりの損失は

$$C_k=\begin{cases}\alpha_2 KD^{H_k}+\alpha_3\sum_{j=1}^{K-1} jD_j & \text{for } H_k>0\\ \alpha_1\alpha G_k+\alpha_3\sum_{j=1}^{K-1-G_k} jD_j & \text{for } H_k=0\end{cases} \tag{a}$$

$$\text{但し}\quad G_k=(U_k-U_{k-1}+H_{k-1}+K)^-,\qquad G_0=0$$

従って

$$\begin{aligned}EC_k&=\alpha_2 KE\{D^{H_k}I(H_k>0)\}+\alpha_3\sum_{j=1}^{K-1} jE\{D_jI(H_k>0)\}\\&\quad+\alpha_1 aE\{G_kI(H_k=0)\}+\alpha_3 E\left\{\sum_{j=1}^{K-1-G_k} jD_jI(H_k=0)\right\}\\&=\alpha_2\frac{K}{\lambda}EH_k+\alpha_3\frac{K(K-1)}{\lambda}P(H_k\neq 0)+\alpha_1 aEG_k\\&\quad+\alpha_3\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot\{VG_k+(EG_k)^2-(2K-1)EG_k+K(K-1)P(H_k=0)\}\\&=\alpha_1 aEG_k+\frac{\alpha_2 K}{\lambda}EH_k+\frac{\alpha_3}{\lambda}\{VG_k+(EG_k)^2-(2K-1)EG_k+K(K-1)\}\end{aligned} \tag{6}$$

但し $I(A)$ は事象 A の indicator で $I(A)=\begin{cases}1 & A \text{ が起ったとき}\\ 0 & A \text{ が起らなかったとき}\end{cases}$ で定義される確率変数である．また VG は G の分散である．

ついでに(5)式から貨車の総待時間が得られることを注意しておく．$C=C_1+C_2+\cdots+C_s$ において $a=0$ とおけばよい(α_1, α_2, α_3 は勿論1とする)．即ちダイヤ$\{t_k\}$に対する一貨車当りの待ち時間の期待値は

$$\frac{1}{EU(24)}\left\{\sum_{k=1}^{s}x_k\sum_{h=0}^{K=1}Q_{h_{k-1}}E(U_k-U_{k-1}-h-K)^+ +\int_0^{24}EU(t)dt-\sum_{i=1}^{s-1}x_iEU_i\right\}$$

である．特に $\{t_k\}$ が最適ダイヤならば，それは種々の損失を考えに入れての可能な最小値を与えている．(正確にはケス不足の損失および滞貨の損失に対する加重を考えに入れての可能な最小値といわねばならないが，それらは単純な待時間による損失以外の代表的なものであるから，「種々の」という上記のような云い方をしたものである．) $S_k=[H_k=0]$ とおき，その余事象を S_k' で表すことにする．t_k で S_k が起ることは，一種の拡張された再帰現象とみなすことができる．従って再帰方程式に類似した式が成り立ち (4) 式の代りにこれを用いて Q_{h_k} を算定することができる．

それを示すため $[H_k=h_k]$ なる事象を，t_k 以前に最期のケス不足がどの時点で生じたか(生じない場合は0時点で生じたとみなす)により分類すれば

$$
\begin{aligned}
[H_k=h_k]&=\sum_{j=1}^{k} S_{k-j}S'_{k-j+1}\cdots S'_{k-1}[H_k=h_k]\\
&=\sum_{j=1}^{k}[H_{k-j}=0, H_{kj+1}>0,\cdots,H_{k-1}>0,H_k=h_k]\\
&=\sum_{j=1}^{k}[H_{k-j}=0,\ U_{k-j+1}-U_{k-j}>K,\cdots,U_{k-1}U_{k-j}>K(j-2),\\
&\qquad U_k-U_{k-j}=K(j-1)+h_k]
\end{aligned}
\tag{6}
$$

従って

$$
P[H_k=h_k]=\sum_{j=1}^{k}P(H_k=0)P[U_{k-j+1}-U_{k-j}>K,\cdots,U_{k-1}-U_{k-j}>K(j-2),\ U_k-U_{k-j}=K(j-1)+h_k]
$$

が成立つ,

$$
S_\alpha^\beta(h_\alpha)=[U_{\alpha-\beta+1}-U_{\alpha-\beta}>K,\cdots,U_{\alpha-1}-U_{\alpha-\beta}>K(\beta-1),H_\alpha=h_\alpha]
$$

$$
P[S_\alpha^\beta(h_\alpha)]=g_{\alpha-\beta}^\beta,\quad P(S_k)=P(H_k=0)R_k,\quad Q_{h_k}=P(H_k=h_k)=P_k
$$

とおけば

$$
\boxed{P_k=\sum_{j=1}^{k}R_{k-j}g_{k-j}^{j}\qquad k=1,2,\cdots,\ 3}
\tag{7}
$$

但し, $P_k=P$ (k 番目の出発点で滞溜車が h_k となる)

$R_k=P$ (〃 〃 0となる)

$g_{k-j}^{j}=P$($(k-j)$ 番目の時点から $(k-1)$ 番目の出発時点まで常に滞溜車が存在し,且つ, k 番目の時点で滞溜車が h_k となる.)

特に $h_k=0$ のときの g_{k-j}^{j} を f_{k-j}^{j} とすれば

$$
\boxed{R_k=\sum_{j=1}^{k}R_{k-j}f_{k-j}^{j}\qquad k=1,2,3,\cdots 5}
\tag{7'}
$$

注意;この式は事象の間の関係 $S_\alpha=\sum_{\beta=1}^{\alpha}S_{\alpha-\beta}S_\alpha^\beta(0)$ に対応している.

f_{k-j}^{j} および g_{k-j}^{j} は過程 $U(t)$ の increment U_i-U_j の分布から求めることができる. f_{k-j}^{j} が求まれば (7′) から R_k が求まり,更に (7) 式により P_k が決定される.

以上で本節を終るが最期のケス不足がどの時点で起ったかにより分類して C_k を表し, (5) 式を導く方法を示しておく.

t_1 のまわりの損失;

$$
C_1=\begin{cases}-a(U_1-K) & \textit{for } S_1,\\ x_1(U_1-K) & \textit{for } S_1'.\end{cases}
$$

t_2 のまわりの損失:

$$
C_2=\begin{cases}-a(U_2-U_1-K) & \textit{for } S_1S_2,\\ x_2(U_2-U_1-K) & \textit{for } S_1S_2',\\ -a(U_2-2K) & \textit{for } S_1'S_2,\\ x_2(U_2-2K) & \textit{for } S_1'S_2'.\end{cases}
$$

一般に $k=1,2,\cdots,s$ に対して

$$C_k=\begin{cases} -a(U_k-U_{k-1}-K) & \text{for } S_{k-1}S_k, \\ x_k(U_k-U_{k-1}-K) & \text{for } S_{k-1}S'_k, \\ -a(U_k-U_{k-2}-2K) & \text{for } S_{k-2}S'_{k-1}S_k, \\ x_k(U_k-U_{k-2}-2K) & \text{for } S_{k-2}S_{k-2}S'_{k-1}S'_k, \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ -a(U_k-U_{k-j}-jK) & \text{for } S_{k-j}S'_{k-j+1}\cdots S'_{k-1}S_k, \\ x_k(U_k-U_{k-j}-jK) & \text{for } S_{k-j}S'_{k-j+1}\cdots S'_{k-1}S'_k \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ -a(U_k-k\cdot K) & \text{for } S_1'S_2'\cdots S'_{k-1}S_k, \\ x_k(U_k-k\cdot K) & \text{for } S_1'S_2'\cdots S'_{k-1}S'_k. \end{cases}$$

但し C_s においては $x_s=0$

従って平均損失函数 EC は次式で表される.

$$\begin{aligned} EC=&\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\{-aE(U_k-U_{k-j}-jK)I(S_{k-j}S'_{k-j+1}\cdots S'_{k-1}S_k) \\ &+x_kE(U_k-U_{k-j}-jK)I(S_{k-j}S'_{k-j+1}\cdots S'_{k-1}S_k')\} \\ =&\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\{aE(U_k-U_{k-j}-jK)^-I(S_{k-j}S'_{k-j+1}\cdots S'_{k-1}) \\ &+x_kE(U_k-U_{k-j}-jK)^+I(S_{k-j}S'_{k-j+1}\cdots S'_{k-1})\} \end{aligned} \tag{5'}$$

但し $S_0=\Omega$(全事象), $x_s=0$ とする.

上式において $S_{k-j}S'_{k-j+1}\cdots S'_{k-1}$ は, t_{k-j} でケス不足が起ってから t_{k-1} まではケス不足を生じないこと(これを標語的に最期のケス不足が $(K-j)$ 番目の出発時点で起るという)を表しており, $U_{k-1}-U_{k-j}-(j-1)\cdot K$ はそのとき t_{k-1} 時点への前からの繰越し車数を表すものであることに注意して t_{k-1} への繰越し車数 h について事象を分類し直せば

$$\begin{aligned} EC=&\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\sum_{h=0}^{K-1}P\begin{pmatrix}\text{最後のケス不足が } t_{k-j} \text{ で起り, 且つ} \\ t_{k-1} \text{ 時点への繰越車数が } h \text{ となる.}\end{pmatrix}\{aE(U_k-U_{k-1}+h-K)^-+ \\ &+x_kE(U_k-U_{k-1}+h-K)^+\} \\ =&\sum_{k=1}^{s}\sum_{h=0}^{K-1}P\begin{pmatrix}t_k \text{ 時点への繰越} \\ \text{車数が } h \text{ である}\end{pmatrix}\{aE(U_k-U_{k-1}+h-K)^-+x_k(U_k-U_{k-1}+h-K)^+\} \end{aligned} \tag{5''}$$

これは (5) 式 $(\alpha_1=\alpha_2=1,\ a_3=0)$ にほかならない.

(iv) 数値解について

特に $U(t)$ が $U_0=U(\tau_0)=0$ なる $[\tau_0, 24]$ での一様 Poisson 過程の場合を考える. この場合時間の原点を更に τ_0 に移動しておけば前項 (5) 式 $(\alpha_1=\alpha_2=1,\ \alpha_3=0)$ は

$$t_0=0<t_1<t_2<\cdots<t_s=24-\tau_0$$

に対して次のように表される.

$$EC_k=\sum_{h=0}^{K-1}P(H_{k-1}=h_{k-1})\left\{(a+x_k)\sum_{l>K-h_{k-1}}(l-K+h_{k-1})\frac{[\lambda x_{k-1}]^l}{l!}e^{-\lambda x_{k-1}}-a(\lambda x_k-K+h_{k-1})\right\}$$

ここに

$$P(H_k=h)=\sum_{h_{k-1}}p(h,h_{k-1})\sum_{h_{k-1}}p(h_{k-1},h_{k-2})\cdots\sum_{h_1}p(h_2,h_1)p(h_1,0)$$

$$p(h_k,h_{k-1})=\begin{cases}\dfrac{(\lambda x_{k-1})^{h_k-h_{k-1}+-K-\lambda x_{k-1}}}{(h_k-h_{k-1}+K)!} & for\ h_k\neq 0\\ \displaystyle\sum_{\alpha=0}^{K-h_{k-1}}\frac{(\lambda x_{k-1})^{\alpha}e^{-\lambda x_{k-1}}}{\alpha!} & for\ h_k=0\end{cases}$$

このとき λx_k は相当大きいので Poisson 分布を正規分布で近似しておく.

$$\Phi(t)=\int_{-\infty}^{t}\varphi(t)dt,\quad \varphi(t)=\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}},\qquad y_k^h=\frac{\lambda x_{k-1}+h-K}{\sqrt{\lambda x_{k-1}}}$$

とおくことにより

$$EC_k=\sum_h Q_h\{(a+x_k)\sqrt{\lambda x_{k-1}}(\varphi(y_y^h)+y_k^h\cdot\Phi(y_y^h))-a(\lambda x_{k-1}-K+h)\}$$

或は

$$\boxed{EC_k=\sum_{h_{h-1}}Q_{h_{k-1}}\{x_k\Psi_k^{h_{k-1}}+a\beta_k^{h_{k-1}}\}\qquad k=1,2,\cdots,s}\tag{8}$$

但し, $\Psi_k^{h_k}=\sqrt{\lambda x_{k-1}}\{\varphi(y_h^h)+y_k^h\Phi(y_k^h)\}$, $\beta_k^h=\sqrt{\lambda x_{k-1}}\{\varphi(y_k^h)-y_k^h\Phi(-y_k^h)\}$

$$Q_{h_{k-1}}=\sum_{h\alpha_{-1}}p(h,h_{\alpha-1})\sum_{h\alpha_{-1}}p(h_{\alpha-1},h_{\alpha-2})\cdots\sum_{h_1}p(h_2,h_1)p(h_1,0)$$

$$p(h_\alpha,h_{\alpha-1})=\Phi(y_\alpha^{h_{\alpha-1}-h_{\alpha-1}})-\Phi(y_\alpha^{h_{\alpha-1}-h_\alpha})$$

注意. ここに $Q_{h_{k-1}}$ は Poisson 分布の場合の式を使った方がよいかもしれない.

$$\beta_k^h=\Psi_k^h(-y_k^h)=\Psi_k^h(y_k^h)-\sqrt{\lambda x_{k-1}}\,y_k^h \text{ 或は } \Psi_k^h=\sqrt{\lambda x_{k-1}}\,y_k^h+\beta_k^h$$

因みに　$\beta_k^h=E(U_k-U_{k-1}+H_{k-1}-K)^+$, $\Psi_k^h=E(U_k-U_{k-1}+H_{k-1}-K)^-$.

Q_h を計算して (8) 式の和 EC_k を最小にする $\{t_k\}$ を求めることができる. $\alpha_3\neq 0$ の場合には, EC は $\alpha_3\lambda\left(12\times 24-\sum_{i=1}^{s-1}x_it_i\right)$ だけ増加する.

入車が以上の如き一様 Poisson 過程のとき, 我々の式は近距離列車は乗り遅れ滞貨による損失のみに関係しケス不足による項は殆ど影響しないことを示している. 実際の数値解を行うことによって, a が小さいときには, a の関係する項は EC に比し極めて小さいが, その程度が求められる. 逆に a が充分大きいときには, a の関係項の大小が EC の大小を支配する. しかしこれらは1日の貨車の輛数とも密接に関係するので詳しいことは個々の例についてしかいえない. 数値解についての詳細は国鉄岐阜工事局 OR 研究報告(昭 34)を参照せられたい.

(v)　一つの近似式

(iii)で導入した過剰車両数 $H(t_k)=H_k$ は

$$H_k=(U_k-U_{k-1}+H_{k-1}K)^+,\quad H_0=0$$

とかけたので牽引不足車両数を

$$G_k=(U_k-U_{k-1}+H_{k-1}-K)^-,\quad G_0=0$$

とおけば，時点 t_k のまわりでの損失は

$$EC_k=x_kEH_k+aEG_k \qquad (\text{但し}\alpha_3=0) \tag{9}$$

とかける．過程 $U(t)$ が一様 Poisson とときには

$$EH_k=\sum_{h_{k-1}}Q_{h_{k-1}}\Psi_k^{h_{k-1}},\qquad EG_k=\sum_{h_k}Q_{h_{k-1}}\beta_k^{h_{k-1}}$$

となるので，これを (1) 式に代入すれば前項 (iv) の (8) 式を得るわけである．しかし (10) 式の計算は相当面倒なので次の方法により損失を簡単に表すことにした．

$H_0=0$ から出発して $H_1, H_2, \cdots H_s$ のある種の推定値 $h_1, h_2, \cdots h_s$(但し定数)を求め，これを (9) 式に入れて得られる次式を損失函数とみなす．

$$\begin{aligned}\hat{c}_k&=E(C_k|H_0=0, H_1=\hat{h}_1, \cdots, H_k=\hat{h}_k)\\&=E(C_k|H_{k-1}=\hat{h}_{k-1},\ H_k=\hat{h}_k)\\&=x_k\hat{h}_k+aE(C_k|H_{k-1}=\hat{h}_{k-1})\end{aligned} \tag{11}$$

ところが上の命題は，(11)式をみればわかるように，各時点 t_k での H_k の推定値の定義の仕方をも自動的に決めていることになる．即ち上の方法は H_k の推定値 $\hat{h}_k$ を

$$\hat{h}_k=E(H_k|H_{k-1}=h_{k-1}),\ \hat{h}_0=0,\ \hat{h}_1=\Psi_1^0=E(H_1|H_0=0) \tag{12}$$

で逐次定義することを暗に意味していたわけである．次に $U(t)$ が一様 Poisson 過程のとき H_k の H_{k-1} による条件付確率 $E^{H_{k-1}}H$ の性質を調べておく．$U(t)$が一様 Poisson 過程ならば，任意の値 h_{k-1} に対し

$$E(H_k|H_{k-1}=h_{k-1})=\sum_{h_k}h_kp(h_k,h_{k-1})=\sum_{h_k}h_k\frac{e^{-\lambda x_k}(\lambda x_{k-1})^{h_k-h_{k-1}+K}}{(h_k-h_{k-1}+K)!}$$

或は正規分布で近似して

$$\begin{aligned}E(H_k|H_{k-1}=h_{k-1})&=\int_0^\infty x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda x_{k-1}}}\cdot e^{-\frac{(x-h_{k-1}+K-\lambda x_{k-1})^2}{2\lambda x_{k-1}}}dx\\&=\lambda x_{k-1}+h_{k-1}-K+\sqrt{\lambda x_{k-1}}\{\varphi(y_k^{h_{k-1}})-y_k^{h_{k-1}})\}\\&=\sqrt{\lambda x_{k-1}}y_k^{h_{k-1}}+\beta_k^h\end{aligned} \tag{13}$$

但し
$$\beta_k^h=\lambda x_{k-1}\{\varphi(y_k^h)-y_k^h\Phi(-y_k^h)\},\quad y_k^h=\frac{\lambda x_{k-1}+h-K}{\sqrt{\lambda x_{k-1}}} \tag{14}$$

$y\geq 0$ ならば

$$\begin{aligned}\frac{\beta_k^h}{\sqrt{\lambda x_{k-1}}}&=\varphi(y_k)-y_k\Phi(-y_k)\\&=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{y_k^2}{2}}-y_k\int_{-\infty}^{-y_k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\geq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y_k^2}{2}}+\int_{-8}^{-y_k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=0\end{aligned}$$

且つ，$y_k \leqslant 0$ のときは明かに $\beta_k^h \geqslant 0$ であるから，常に $\beta_k^h \geq 0$ であることがわかる．従って $\lambda x_{k-1} \geq K$ ならば任意の h_{k-1} に対し

$$E(H_k|H_{k-1}) \geq h_{k-1} \tag{15}$$

即ち

$$\boxed{\lambda x_{k-1} \geq K \quad \text{ならば} \quad E^{H_{k-1}} H_k \geq H_{k-1}} \tag{15'}$$

$$(E^{H_{k-1}} H_k - H_{k-1} = \lambda x_{k-1} - K)$$

これらの不等式は H_k に対する semi-martingale property とよばれる．($\lambda x_{k-1} = K$ のときは martingale である)．

(13) 式で $h_{k-1} = \hat{h}_{k-1}$ とすれば (12) 式により

$$\hat{h}_k = \sqrt{\lambda x_{k-1}}\, y_k^{\hat{h}_{k-1}} + \beta_k^{\hat{h}_{k-1}}$$

とかけるので前項(iv)によりこの場合の $\hat{h}_k$ は $\Psi_k^{\hat{h}_{k-1}}$ に等しい．

$$\boxed{\hat{h}_k = \Psi_k^{\hat{h}_{k-1}}, \qquad \hat{h}_1 = \Psi_0^1}$$

このとき

$$\begin{aligned}
E(G_k|H_{k-1} = \hat{h}_{k-1}) &= E(U_k - U_{k-1} + \hat{h}_{k-1} - K)_- \\
&= E(U_k - U_{k-1} + \hat{h}_{k-1} - K)^+ - E(U_k - U_{k-1} + \hat{h}_{k-1} - K) \\
&= h_k - (\lambda x_{k-1} + \hat{h}_{k-1} - K) \\
&= \Psi_k^{\hat{h}_k} - \sqrt{\lambda x_{k-1}}\, y_k^{\hat{h}_{k-1}} = \beta_k^{\hat{h}_{k-1}}
\end{aligned}$$

とかけるので，$U(t)$ が一様 Poisson 過程のとき (11) 式は

$$\boxed{\hat{c}_k = x_k \hat{h}_k + a\beta_k^{\hat{h}_{k-1}}} \tag{17}$$

となる．なお (16) 式は $\Psi_k^{\hat{h}_{k-1}} = T_{\lambda x_{k-1}} \hat{h}_{k-1}$, $\hat{h}_k = T_{\lambda_{k-1}} T_{\lambda_{k-2}} \cdots T_{\lambda x_1} \hat{h}_0, \hat{h}_0 = 0$ とかくことにより同様な操作 T の K 回繰返しで h_k を求めることができることを示している．次に $\hat{h}_k$ と $\beta_k^{\hat{h}_{k-1}}$ との表をかかげておく．

$\beta_k^{\hat{h}_{k-1}}$ の 表

$\hat{h}_{k-1}$ \ λx_{k-1}	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
0	35	30	25	20	15	10	5.7	2.8	1.1	0.3	0.1
5	30	25	20	15	10	5.5	2.7	1.1	0.3	0.1	
10	25	20	15	10	5.4	2.5	1.0	0.3	0.1		
15	20	15	10	5.4	2.4	0.8	0.2				
20	15	10	5.4	2.2	0.7	0.1					
25	10	5.3	2.0	0.5	0.1						
30	5.2	1.8	0.4	0.1							
35	1.5	0.3									
40	0.2										

$\hat{h}_k$ の 表

$\hat{h}_{k-1}$ \ λx_{k-1}	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
0	0	0	0	0	0	0.1	1.0	2.8	6.4	10	15	20
5	0	0	0	0	0.1	0.8	2.7	6.0	10	15	20	25
10	0	0	0	0.1	0.7	2.5	5.7	10	15	20	25	30
15	0	0	0	0.5	2.4	5.5	10	15	20	25	30	35
20	0	0	0.4	2.2	5.4	10	15	20	25	30	35	40
25	0	0.4	2.0	5.4	10	15	20	25	30	35	40	45
30	0.3	1.8	5.4	10	15	20	25	30	35	40	45	50
35	1.5	5.3	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
40	5.3	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
45	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
50	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70

注意：$\hat{h}_{k-1}$ および λx_{k-1} の中間の値に対しては，直線または曲線で補間すればよい.

3. N 日間の出発列車本数が固定できる場合

前述の方法 (§2) においては，一日の出発列車本数を決定してから，その出発時刻を求めた. 今度は一日の出発列車本数を固定できない場合について述べる. 即ち§2 では出発列車本数を多めにとり，翌日までの滞貨を防止してあるが，その方法を乱用するとケス不足による損失が不当に大きくなり，たとえそれに対し臨機の処置をとったとしても，長期間のうちにはその損失が累積して意外に大きくなる恐れがある. §2 の方法は，入込車に特定の 24 時間周期があるために多少のケス不足を許しても，1 日毎に貨車を回転する方がよい場合を対象としたのであった. しかしその方法はまた，入込車数が短期間(例えば 2,3 日)のうちに大きく変動するのでそれらの短期間毎に出発列車本数を大巾に変えなければならない場合にも有効であることを注意しておく.

§2 で取扱った特定の形の一日周期があったり，短期の激しい変動がある場合と著しい対照をなす入込車数の型として，長期にわたり入車がほぼ一様である場合が重要である. 長期間(例えば約 10～50 日)にわたり入車がほぼ一様であることが予測された場合には，当然長期的な損失を考慮したダイヤの設定方法が要求される.

我々の方法は，今度の場合もまず列車本数を定めるのであるが，ある適当な期間 (10～50 日) の間の列車本数を定めるところが前と異る. その期間のある一日をみるとダイヤに一本の運休 (ウヤ)の有無の二つの場合がおこるのである. しかし，今度の方法が前の方法(§2)と異る著しい点は，本節では初期値を 0 にすべき理由がない点である. そこで我々の目的函数を初期値 $U(0)=w$ の函数と考えて，この最適値をも見出さねばならない.

(i) 時間の原点

入車が一様なので時間の原点はどこにとっても同じことである. 最適ダイヤの実施時点を原点とする. $U(0)=w$ とおくと w は保有量である.

(ii) 列車本数

一日にたまる貨車の累積数 $U(24)$ の平均を何倍かすれば K(牽引定数)の倍数になる. 即ち N

日間の累積入車数の平均が $K \cdot M$ になったとする．式でかけば

$$N \cdot EU(24) = K \cdot M$$

そのとき $M = SN - \alpha (0 \leqq \alpha < s)$ なる s と α とが一意にきまる．一日の列車本数を s 本とし，N 日間に α 本のウヤとすることにする．但しウヤは一日一本以内とするので上のことを云い換えれば，N 日間のうち α 日は $(s-1)$ 本列車を出し $(N-\alpha)$ 日は s 本列車を出すことになる．

(iii) 出発ダイヤの決定式

以上のように，考えている N 日間の出発時点を，$t_1, t_2, \cdots t_M$ としたとき $U(0) = w$ とする他は，前節と全く同じ式で損失を表し，$w, \{t_k\}$ を動かすことにより損失を最小にすればよい．$t_1, t_2, \cdots, t_M$ が一日周期をもつという制限は全く前の方法に差支えは生じない．

4. 列車運休および増発について

前節までに我々は最適ダイヤの決定方法を述べたが，それは損失の平均値を最小にしたのであるから，実際にそれを適用した場合，極めて確率の小さい場合として，一つの出発時間間隔内に貨車が全く生じないような現象が起るかもしれない．(事故や災害を除いてもの話である．事故や災害に対する対策は重要であるが，我々の場合は初めから regular 問題をな場合に限っている．)

逆いにえば，我々の理論は損失を大にするような場合の確率をできるだけ小さくするように出発時刻をきめたのであって*，損失を大にする場合を除去したのではない．

また，前節までに使用した「運休」という言葉はあまり適切ではなかった．というのは，前節では $U(t)$ の形からみて，ダイヤの決定と同時に運休列車(或は本数の少い方の日を基準にすれば臨時増発列車(臨貨))がきまってしまうので，本当に臨機の処置としての運休や増発ではなかったのである．本節では真の意味での運休と増発とを考える．その意味で前節までは運休をみとめない場合というべきである．

貨車発生の状況によっては最適ダイヤにもかかわらず，上にのべたような損失の大きい場合が起る確率が必ずしも小さくならない．また，序のⅡで云っていることは，任意の区間 $[t_k, t_{k+1}]$ における相当大きい可能性もあるであろう発生貨車数を上からおさえたことを意味しているが，一方下限を 0 から引上げる配慮は何ら払われていないから公正を欠くの感を免れない．

列車の運休と増発とを考えに入れることにより，損失を大にする場合の発生するのを防げば，上に述べたすっきりしない点が多少とも除かれるのではないか，或はより明確に摑めるのではないかと考えて，我々は §1 序の仮定 Ⅱ のかわりに，次の仮定をした．

Ⅳ. 一つの出発間隔 $[t_{k-1}, t_k]$ での発生貨車数 $U_k - U_{k-1} + H_{k-1}$ の値に応じて列車の t_k 時に

---

*平均値を小さくしただけで，それができるとはいえないが，正規分布をはじめ，そのようにできる分布が多い．いちいち断らなかったが，我々の取扱っている確率変数の分布はすべて §1 序の仮定 (I) のごとく，平均値のまわりによく集っているような分布に限っていたのである．本節では，この制限を少しゆるめるのが目的である．

おける運休および増発の決定をなし得る．(具体的な規則は以下に述べる．)

V．一つの出発間隔での発生車数はつねに $3K$ より小さくできる．(即ち $Z_k=U_k-U_{k-1}+H_{k-1}<2K$ とす．)

VI．t_k 時刻発に対する増発列車は同じ t_k 時に発生させるものとする．(それは可能であるものとする．)

注．Vにおける判定式 $Z_k=U_k-U_{k-1}+H_{k-1}$ の値は出発時刻 t_k ではじめてわかるので少し遅すぎるであろう．運休或は増発という行為の決定から行動までの時間 δ をとするとと実際にわかるのは Z_k ではなく，$Z(t_k-\delta)$ なのである．何らかの意味で $Z(t_k-\delta)$ から Z_k を推定する方法が与えられること，或は δ を小さくする方法をこうじなければならない．それについては後の機会に考えたい．

Z_k と H_k との関係は前節までは $(Z_k-K)^+=H_k$ であったが，本節では，t_k 時の出発列車が状況により 0,1,2 本の三通りに分れるので，このようにはかけない．即ち t_k 時刻の乗り遅れ車両数 H_k の定義式 $H_k=(U_k-U_{k-1}+H_{k-1}+K)^+$ はもはや成り立たないことに注意しておく．

これらの仮定の下にVによれば，つづけて二回増発することはない．

運休増発は次の規則により行う．

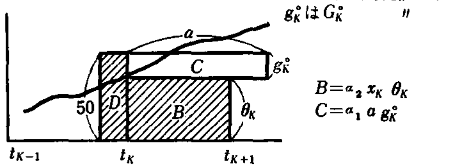
(1) $Z_k-K\leqq 0$ の場合．

$$\alpha_2 x_k Z_k+D<\alpha_1 a G_k^0 \quad ならば運休．$$

上の不等式が成立たなければ(ケス不足でも)予定通り一列車出す．(第5図参照)

但し D は運休手続の費用，

$$G_k^0=K-Z_k$$



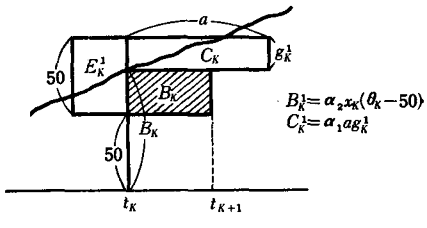
第 5 図 ($Z_K-50<0$の場合)

(2) $0<Z_k-K\leqq K$ の場合．

$\alpha_2 x_k(Z_k-K)-E_k^1<\alpha_1 a G_k^1$ ならば予定通り一列車出す．さもなければ一列車増発する．(第6図参照)

但し E は増発手続の費用，

$$G_k^1=2K-Z_k$$



第 6 図 ($0\leqq Z_K-50<50$の場合)

(3) $K<Z_k-K\leqq 2K$ の場合．

$\alpha_2 K x_k-E_k^1<0$ ならば予定通り，さもなければ列車を増発するが，その本数は次のようにきめる．(第7,8図参照)

$\alpha_2 x_k(Z_k-2K)-E_k^2<\alpha_1 a G_k^2$ ならば一列車増発

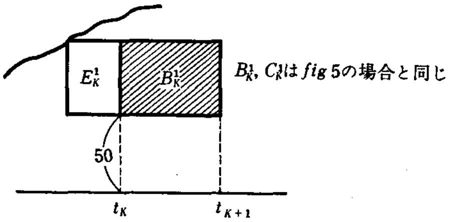
〃 $\leqq$ 〃 ならば二列車増発

但し，E_k^1 は第一次増発手続の費用，

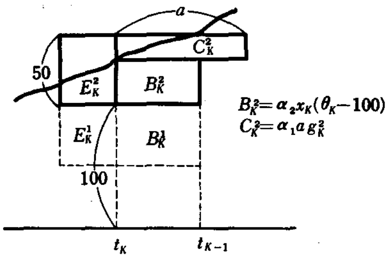
E_k^2 は第二次増発手続の費用，

$G_k^2=3K-Z_k$．

同様に $2K<z_k-K$ の場合にも進むことができるが，前述のごとく仮定 V「$Z_k\leqq 3K$」を設けて



第 7 図 ($50\leqq Z_k-50<100$の場合)



第 8 図 ($50\leqq Z_K-50<100$の場合)

この辺で打切っておくのである．

以上から t_k のまわりの損失は次のようになる．

$$C_k=\begin{cases}\alpha_2x_kZ_k+D+\alpha_3R & for\ Z_k-K\leqq 0,\ \alpha_2x_kZ_k+D<\alpha_1aG_k^0,\\ \alpha_1aG_k^0+\alpha_3R & for\ \ //\ ,\ \ //\ \geqq\ //\ ,\\ \alpha_2x_k(Z_k-K)+\alpha_3R & for\ 0<Z_k-K\leqq K,\ \alpha_2x_k(Z_k-K)-E_k^1<\alpha_1aG_k^1,\\ \alpha_1aG_k^1+E_k^1+\alpha_3R & for\ \ //\ ,\ \ //\ \geqq\ //\ ,\\ \alpha_2x_k(Z_k-K)+\alpha_3R & for\ K<Z_k-K\leqq 2K,\ \alpha_2Kx_k-E_k^2<0,\\ \alpha_2x_k(Z_k-2K)+E_k^1+\alpha_3R & for\ \ //\ ,\ \ //\ \geqq 0,\\ & \qquad \alpha_2x_k(Z_k-2K)-E_k^2<\alpha_1aG_k^2,\\ \alpha_1aG_k^2+E_k^1+E_k^2+\alpha_3R & for\ \ //\ ,\ \ //\ \geqq 0,\\ & \qquad //\ \geqq\ //\ .\end{cases}$$

但し $R=\int_{t_{k-1}}^{t_k}(U(t)-U_{k-1})dt$ であり，α_1, α_2, および α_3 は §3 (3) と同じ意味での加重係数である．

従って $$E(C_k|Z_k\leqq K)=E\,\mathrm{Min}(\alpha_2x_kZ_k+D,\alpha_1a(K-Z_k))+\alpha_3E(R|Z_k\leqq K),$$

$$E(C_k|K<C_k\leqq 2K)=E\,\mathrm{Min}(\alpha_2x_k(Z_k-K),\alpha_1a(2K-Z_k)+E_k^1)+\alpha_3E(R|K<Z_k\leqq 2K),$$

$$E(c_k|2K<Z_k\leqq 3K)=\begin{cases}E\alpha_2x_k(Z_k-K)+\alpha_3E(R|2K<Z_k\leqq 3K) & for\ x_k<\dfrac{E_k^1}{\alpha_2K},\\ E\,\mathrm{Min}(\alpha_2x_k(Z_k-2K)+E_k^1,\alpha_1a(3K-Z_k)+E_k^1+E_k^2) & \\ \quad +\alpha_3E(R|2K<Z_k\leqq 3K) & for\ x_k\geqq\dfrac{E_k^1}{\alpha_2K}.\end{cases}$$

以上三式を加えたものが EC_k である．即ち

$$\boxed{\begin{aligned}EC_k=&E\,\mathrm{Min}\{\alpha_2x_xZ_k+D,\alpha_1a(K-Z_k)\}+E\,\mathrm{Min}\{\alpha_2(x_k-K),\alpha_1a(2K-Z_k)+E_k^1\}\\ &+\alpha_3ER+\begin{cases}E\alpha_2x_k(Z_k-K) & for\ x_k<\dfrac{E_k^1}{\alpha_2K},\\ E\,\mathrm{Min}\{\alpha_2x_k(Z_k-2K)+E_k^1,\ \alpha_1a(3K-Z_k) & \\ \quad +E_k^1+E_k^2 & for\ //\ \geqq\ //\ .\end{cases}\end{aligned}}\qquad(19)$$

或は

$$
\begin{aligned}
EC_k = & \sum_{\xi_k=0}^{K} p(Z_k=\xi_k)\mathrm{Min}\{\alpha_2 x_k \xi_k + D, \alpha_1 a(K-\xi_k)\} + \\
& + \sum_{\xi_k=K+1}^{2K} p(Z_k=\xi_k)\mathrm{Min}\{\alpha_2 x_k(\xi_k-K), \alpha_1 a(2K-\xi_k)+E_k^1\} \\
& + \sum_{\xi_k=2K+1}^{3K} p(Z_k=\xi_k)Q(\xi_k) + \alpha_3\left\{\int_{t_{k-1}}^{t_k} EU(t)dt - x_{k-1}EU_{k-1}\right\}, \qquad (20) \\
Q(\xi_k) = & \begin{cases} \alpha_2 x_k(\xi_k-K) & \text{for } x_k < \dfrac{E_k^1}{\alpha_2 E}, \\ \mathrm{Min}\{\alpha_2 x_k(\xi_k-2K)+E_k^1, \alpha_1 a(3K-\xi_k)+E_k^1+E_k^2\} & \text{for } \text{〃} \geqslant \text{〃} . \end{cases}
\end{aligned}
$$

ここに

$$P(Z_k=\xi_k|H_{k-1}=h_{k-1}) = P(U_k - U_{k-1} + h_{k-1} = \xi_k) \qquad (21)$$

であり,

$$
H_k = \begin{cases}
Z_k & \text{for } 0 \leqslant Z_k \leqslant K, \alpha_2 x_k Z_k + D < \alpha_1 a G_k^0, \\
0 & \text{for } \text{〃} \quad , \quad \text{〃} \quad \geqslant \text{〃} , \\
Z_k - K & \text{for } K \leqslant Z_k \leqslant 2K, \alpha_2 x_k(Z_k-K) < E_k^1 + \alpha_1 a G_k^1, \\
0 & \text{for } \text{〃} \quad , \quad \text{〃} \quad \geqslant \text{〃} , \\
Z_k - K & \text{for } 2K < Z_k \leqslant 3K, \alpha_2 K x_k < E_k^1, \\
Z_k - 2K & \text{for } \text{〃} \quad , \text{〃} \geqslant \text{〃}, \ \alpha_2 x_k(Z_k-2K) - E_k^1 < \alpha_1 a G_k^2, \\
0 & \text{for } \text{〃} \quad , \text{〃} \geqslant \text{〃}, \quad \text{〃} \quad \geqslant \text{〃} .
\end{cases}
$$

から $P(H_{k-1}=h_{k-1}|Z_{k-1}=\zeta_{k-1})$ が表現できるので,

$$
\begin{aligned}
q(\zeta_k, \zeta_{k-1}) &= P(Z_k=\zeta_k|Z_{k-1}=\zeta_{k-1}) \\
&= \sum_{h_{k-1}} P(Z_k=\zeta_k|H_{k-1}=h_{k-1}, Z_{k-1}=\zeta_{k-1})P(H_{k-1}=h_{k-1}|Z_{k-1}=\zeta_{k-1}) \\
&= \sum_{h_{k-1}} P(U_k - U_{k-1} + h_{k-1} = \zeta_k)P(H_{k-1}=h_{k-1}|Z_{k-1}=\zeta_{k-1})
\end{aligned}
$$

が求められる. よって (20) 式における係数は

$$P(Z_k=\zeta_k) = \sum_{\zeta_{k-1}} q(\zeta_k, \zeta_{k-1}) \sum_{\zeta_{k-2}} q(\zeta_{k-1}, \zeta_{k-2}) \cdots \sum_{\zeta_1} q(\zeta_2, \zeta_1) q(\zeta_2, 0) \qquad (22)$$

によって定まる.

(20) 式で与えられる EC_k の和を最小にする $\{t_k\}$ が最適ダイヤである.

本稿をおえるに当り直接御教示を賜った国鉄岐阜工事局 OR グループの諸先輩並びに同僚全員に対し感謝の意を表します.