文　献　抄　録

WHITE, H. AND CHRISTIE, L. S.: QUEUING WITH PREEMPTIVE PRIORITIES OR WITH BREAK-DOWN, *Jour. Oper. Res. Amer.*, **6**, *No. 1. pp 79—95, 1958.*

待ち合わせ理論には問題を規定する要素として数個の item が考えられているが，その中に，行列の処理の仕方がある．通常の待ち行列では，先着順にサービスを受けるのであるが，たとえば電話の至急扱いのように，ある種類のものに優先権を与える場合がある．この種の待ち合わせ，つまり priority のある queue は COBHAM〔JORSA, **2**, p. 70, 1954 及び JORSA, **3**, p. 547, 1955〕が最初に取扱った．彼の場合には，優先権の低いもののサービス中に優先権の高いものが到着しても，サービス中のものがサービスを受け終るまでは，優先権の高いものも列の先頭に並んで待つことになっている．それで，この種の priority を，特に head-of-the-line priority ともいう．ところで，いま紹介する論文では，優先権の高いものは，到着したとき同等以上の優先権者のいない限り，すぐにサービスを受け始めるという規則の priority を取扱う．この際，サービス中の，優先権の低い者は一旦サービスを中止して列の先頭に戻される．こういう priority の型を preemptive priority とよび，初めて提示したのが，この論文である．上の例の長距離電話のように人間がサービスを受ける場合であると，preemptive priority は，如何にも横車を押し過ぎ，現実離れのような感がないでもないが，機械を対象にして，その故障というような現象を考えるときには，この種のことが起ることも容易に想像されよう．

以下，主として優先権の高いものと低いものの2種類しかない場合の結果について紹介するので，前者を first class, 後者を second class とよんで話を進める．これは続く2つの論文紹介についても同じである．

さて，COBHAM による head-of-the-line priority の取扱いも，普通の待ち行列問題でやるように，差分微分方程式，更にはそれから導く連立一次方程式の system を作り，それをうまく解析しようというのであるが，この式は相当複雑になってくる．この論文でも同様の方法を採るが，微分方程式系は COBHAM の場合に較べれば，かなり簡単になる．つまり preemptive priority の方が，普通の head-of-the-line priority よりも式が簡単になるのであるが，これは次のことがらに基く．いま first class のものの n 単位，second class のものの m 単位が system の中にいるという状態を (n, m) で表わすことにする．head-of-the-line priority の場合には，(n, m) という状態を規定しただけでは窓口でサービス中のものの種類はきまらないのに対し，preemptive priority の場合には，$n \geq 1$ である限り，窓口でサービス中のものは first class のものであることがわかってしまうのである．

この論文ではまず，Poisson input, 指数分布型サービスとして，平衡状態における状態確率を implicit な形で求め，それから m の平均値と分散を explicit な形で計算している．

サービス分布として指数分布を仮定したが，second class のものだけをサービスする場合と，preemption の影響をうけた場合とでは，そのサービス率などが変ってくるかもしれない．このような点についての検討を3つの特別な場合について，かなりのページ数を費して論じ，これらの場合いずれも同じサービス率であることを述べているが，直観的には大凡想像されることでもあると思われる．

サービス施設が壊れると，サービスは直ちにストップする．そして修理時間が必要になる．これは修理時間をサービス時間とする優先権の高いものが到着したものとみなすことによって，preemptive priority の queue と全く同じモデルになる．なお，この場合には修理中のところへまた故障を起すというのも少しおかしいので，一旦修理中となれば重ねて故障は起らない(first class の到着はない)としてモデルを修正した方が適切であり，このときの m の平均値なども求めている．

最後に，COBHAM 等と同じ方法で，ある class (priority の種類は何種類でもよいとする)のものが系の中で費す平均時間も計算している．

(森村英典)

STEPHAN, F. F.: TWO QUEUES UNDER PREEMPTIVE PRIORITY WITH POISSON ARRIVAL AND SERVICE RATES, *Jour. Oper. Res. Amer.*, **6**, *No. 3, pp. 339—418, 1958*

この論文は，上に紹介した WHITE and CHRISTIE の論文の拡張であって，priority class を2種類に限定した場合に，上記論文より多くの結果を求めている．上記論文は steady state における平衡方程式を作り，これを順次解いて行くことを考えているのに対し，この論文では2次元の random walk の概念を使って，transition probability を超幾何函数で表わし，これを既知と考えて方程式を作ると，一次方程式系は非常に簡単化されるので，state probabilty も比較的簡単な形で求められる．この論文では priority の class を2種類に限定しており，標題の "Two Queues" というのもこの意味であるが，class の数がもっと大きいときでも，この手法は原理的には適用可能である．

first class のものの待ち行列の長さは second class のものの動向には無関係であるから通常の simple queue と全く同じことになり，取立てて論ずることは何もない．けれども second class のものの待ち行列は，first class の影響を受けるから，この長さについて論ずることは当然必要になる．上記の論文でその平均値と分散を求めたが，この論文では，その分布間の再帰関係を求め特に初めの3つの確率は explicit な形まで出している．また second class の行列がある長さ以上にならない確率も興味ある量なので，一応その explicit な表現を求めてはいるが，もちろん相当複雑である．モーメントについても，ここでは，factorial moment を求める方法で，一応すべての次数のモーメントを計算出来る形にし，特に4次までは，その explicit な形を求めている．

このように，行列の長さの分布やモーメントも一応計算出来る形にされているが，その explicit な形を求めるのには，かなり厄介な計算がなお必要である．そこでこの著者は少しでもこれらの計算が簡単になるような方法を，超幾何函数の性質を利用して案出している．

後半は second class のものの待ち時間に関するもので，その平均値は前記論文でも求めているが，ここでは(i, j)という state のときにやって来た second class のものの待ち時間の分布のモーメントを求め，更にそれを使って，steady state における待ち時間のモーメントを算出している．

以上紹介したように，前記論文よりも多くの結果を，しかも計算機などを用いれば数表を作ることもある程度可能と思われるような形で求めているが，これも出発点の方程式系をうまい方法を使って単純化することに成功したためであろう．　(森村英典)

OSBORNE, M. F. M.: BROWNIAN MOTION IN THE STOCK MARKET *Jour. Oper. Res. Soc. Amer.*, **7**, *No. 2 1959*

ニューヨーク株式市場における普通株の株価を調べてみると，その分布が対数正規型になっていることがわかる．また株価の変動を見ると，その比率の対数をとるとその分布は分散が期間に比例し，平均は0であるような正規分布になることがわかる．

このことから株価の対数値の変動は，ブラウン運動の模型によってガウス過程として表わすことができるであろう．そうしてこのことの説明は，ブラウン運動の場合と同じく株価を変動させる多くの互いに独立な原因が互いにぶつかり合うことによって生ずるということができるであろう．更に株価そのものでなく，株価の対数にその法則があてはまるのは，投資者が関心を持つのは，株価の変動の絶対額ではなく，その比率であるからだと説明されている．

結局，$P(t)$を株価とすると，

$$Y(\tau) = \log_e \frac{P(t+\tau)}{P_0(t)}$$

と定義するとき，

$$Y(\tau) = M(\tau) + S(\tau)$$

と2つの独立な部分(一般的な変動 $M(\tau)$ とその株式に固有の変動 $S(\tau)$)にわけられ，おのおのが，平均 0，分散 $\sigma^2{}_M\tau$ $\sigma_S{}^2\tau$ の正規分布に従うものとされる．

このことから導かれる一つの結論として，$\bar{P}$を株価の算術平均(加重平均でもよい)とすると，$\bar{P}$の平均値は，Yのバラッキの増加する結果として，時とともに上昇することがわかる．従って，Yの平均値は0であって，従って全体として上りも下りもしないのに，株の平均価格は上昇するという結果が生ずることになる．　(松谷泰行)

HEATHCOTE, C. R.: THE TIME-DEPENDENT PROBLEM FOR A QUEUE WITH PREEMPTIVE PRIORITIES, *Jour. Oper. Res. Amer.*, **7**, *No. 5. pp. 670—680, 1959*

前記2論文で扱ったのと同じ型の queue であるが，steady state ではなく，time-dependent な問題として扱おうという点が新しい．基本的仮定は前論文と同じで，やはり2種類の class のものを扱う．考え方は，WHITE and CHRISTIE と同じく，差分微分方程式系を作る．WHITE 等はこれを steady state の一次方程式系に導いてから解析したが，この論文は time-dependent case が目的だから，この差分微分方程式を解くことを考える．もちろん，そのままで解けるわけではなく，その Laplace 変換をとり，更にその generating function を作る．そうすると，これが，(0, 0)という state になる確率 $P_{00}(t)$ の Laplace 変換 $g_{00}(s)$ を含んだ形でとにかく表現出来る．この $g_{00}(s)$ もよく知られた方法で求められ，$\mu_1=\mu_2$(μ_i は i-th class のサービス率)とすれば，$p_{00}(t)$ は変形 Bessel 函数のはいった級数の和として表わされる．始めに h 個の second class のものがいたという条件のもとでの，時刻 t におけるその数の期待値も，$\mu_1=\mu_2$ の仮定のもとで得られている．また first class の入力密度 λ_1 を0とおいて，simple queue の場合に帰着させ，その結果が BAILEY (Jour. Roy. Stat. Soc., **B**, **16**, pp. 288—291, 1954) と一致することも確めている．

更に busy period, つまり窓口の塞っている時間の長さの分布を，non-priority queue の場合について考える．これは simple queue でもなく，それぞれの到着率もサービス率も異るような2種類の客が来て，窓口は1つという場合に当る．初期条件として，系の中に h 単位いるときの busy period の長さの平均値と分散は，比較的簡単な式で表わされる．また $\mu_1=\mu_2$ とすると，これは simple queue になるが，このときは busy period の長さの分布の密度函数が，変形 Bessel 函数で表わされる．

2種類の class についての preemptive queue は，simple queue の拡張の一方向ともみられるので，これら2つの型の queue の時間的生長のありさまを比較するのは興味あることだとこの著者は述べている．

なお N servers の場合の generating function の Laplace 変換は MOYAL との共著で Biometrika に書くこと，及び，ここで用いた方法は，formal には R 次元の preemptive priority の場合に適用出来るが，explicit な形の解はまだ得られていないということを付言している．(森村英典)

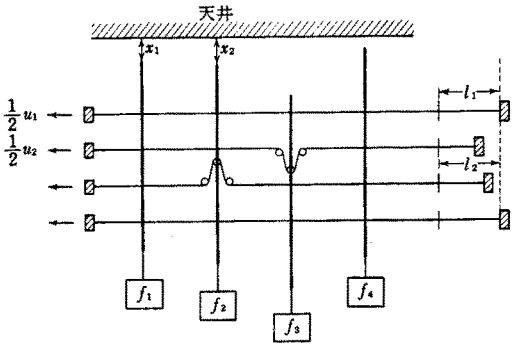
SINDEN, F. W.: MECHANISMS FOR LINEAR PROGRAMS. *Jour. Oper. Res. Soc. Amer.*, **7**, *No. 6, 1959*

$a_{ij}=\pm 1$ or 0 のとき，

$$x_i \geqq 0 (i=1\ m)$$

$$\sum a_{ij}x_i \leqq l_j (j=1\cdots\cdots n)$$

の条件の下で max $\sum f_i x_j$ を求める L. P. の問題を次のような，糸と棒からなるメカニズムによって解くことができる．(図参照)



m 本の棒がタテにおかれており，それに横に張った n 本のひもが，$a_{ij}=+1$ 或いは -1 に応じて図のように結びつけられている．($a_{ij}=0$ のところは結びつけられていない)それぞれの棒には f_i の重さのおもりがつるしてあり，またそれぞれのひもは l_j の長さだけ動き得るようになっている．更に上方には天井があって棒はそれより上に行くことはできないようになっている．このようなメカニズムが，安定した場合に棒と天井との距離を x_i とすると，それが上記の LP の解になっている．

更にここでそれぞれの糸にかかる張力を $u_j/2$ とすると，u_j は dual の問題

$$u_j \geqq 0$$

$$\sum a_{ij}u_j \geqq f_i$$

$$\sum l_i u_j = \min$$

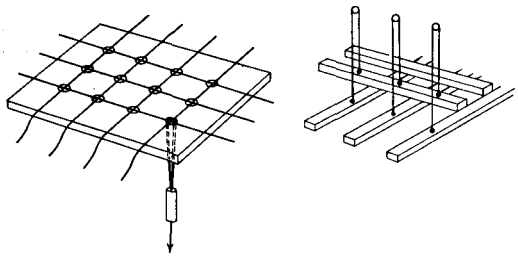
の解になっていることがわかる．そうしてこのことから dual の解の間の周知の関係がたちに認められる．

またここで下に棒をおき，その棒を段々下げて行

くことによって，primal-dual 法の意味が明白となる．

このようなメカニズムは，通信網の容量が不足している場合に増設すべき通信路の費用を最少にする問題に適用できる．

また輸送問題についてはもっと簡単なメカニズムが作られる．それには，供給地，および需要地に対応する $m+n$ 本の糸を，タテヨコに張り，それぞれの糸が需要量および供給量の条件に応じて動き得るようにしておく．そうして糸が交わる $m+n$ 個の点に(一定値—輸送費用)に等しいおもりを吊せば，そのおもりの下がった長さだけの量を対応する供給地から需要地へ運べばよいことになる．またこの dual 問題を考えると次のようなメカニズムができる．$m+n$ 本のそれぞれ需要量供給量に等しい重さの棒を $m+n$ 本の糸で全部が水平に保られるように，タテヨコに吊しておく．糸の長さが(一定値—費用)に等しくなるようにしとおけば，糸にかかる張力で輸送すべき量が，そうして棒の高さで dual 問題の解が示される．(図参照)



後者のメカニズムと同じようなものが実際に作られ，うまく動くことが示された．　(平館道子)

DANTZIG, G. & RAMSER, J.: THE TRUCK DISPATCHING PROBLEM

Manag. Sci. ***6*** *No. 1 1959*

一つの中心から n 個の場所へ，それぞれ q_i だけの貨物を配達する問題を考える．一台のトラックで運べる量を c とする．トラックは何台使ってもよいが，その動く距離の総和を最小になるようにする．

もし $\sum q_i \leqq c$ ならば，一台のトラックですべての点をまわって貨物を運べばよいから，問題は普通の traveling salesman problem に帰着する．

$\sum q_i > c$ のとき，q_i を大きさの順にならべて，$q_1 \leqq q_2 \leqq q_3 \leqq \cdots\cdots \leqq q_n$ とし，$\sum_{i=1}^{t} q_i \leqq c$ でかつ $\sum_{i=1}^{t+1} q_i > c$ となるような数 t をとれば，1台のトラックに t ケ所以上の配達をさせることはできない．そこで $N \simeq \log_2 t$ として，同じトラックで配達する量の組み合わせを次のような N 段階を経てきめて行く．

まづ，第一段階として，2つの量の合計が $\frac{1}{2^{N-1}}c$ を越えないようなものをまとめて組をつくる．そのようにできないものはそのまま残しておく．次に第二段階は第一段階で作られた組の中で，二組の合計が $\frac{1}{2^{N-2}}c$ を越えないものをまとめる．以下同様に進む．

各段階において，走行距離の合計が最少になるようにまとめて行く．それには，例えば第一段階では，

1) 発送所を p_0，配達すべき場所を p_i とする
2) p_i と p_j の距離を d_{ij} で表わす($d_{ij}=d_{ji}$)
3) $x_{ji}=x_{ij}=1$　p_i と p_j が組にされたとき，
$=0$　そうでないとき
$(i,j=1,2\cdots\cdots n)$
$x_{0i}=x_{i0}=1$　p_i が他のものと組にされない
$=0$　組にされたとき

とする．そうすると $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1.\ (i=1,2\cdots\cdots n)$

この条件の下で，走行距離合計は

$$\sum_{i=1}^{n} d_{0i} + \sum_{i}\sum_{j} d_{ij}x_{ij}$$

と表わされるから，第二項を最少にすればよい．この問題は L. P. の特殊の場合であるが，もし $x_{ij}=0,\ 1$ の代りに $0 \leqq x_{ij} \leqq 1$ とすれば普通の方法で解くことができる．そうでなくても salesman problem と似た方法で考えることができる．

第二段階ではこのようにして，第一段階で作られた組を $A_0A_1A_2\cdots\cdots$ として，A_i, A_j の組の間の距離を発送所から出発して A_i, A_j の点をまわって帰る最短距離で定義して，第一段階と同じように進めばよい．

このようにして第 N 段階まで進むことができる．

しかしこのようにして求めた解が真の最適解と一致するかどうかはわからない．

実際に $n=12$, $t=5$, $N=3$ の場合について数値計算が示されている．上記の方法で求めた解は距離合計が 294 になるのに，別に合計が 290 になる解があるので確かに最適解にはなっていない．しかし一般に最適解と甚しくへだたることはないであろうとのべられている．　(竹内　啓)

DANTZIG, G.: ON THE STATUS OF MULTISTAGE LINEAR PROGRAMMING PRBLEMS *Manag. Sci.* ***6*** *No. 1 1959*

何段階にもわたる計画を扱う場合には，第一期の output が次の期の inventory を形成し，第二期の output がまた次の期の inventory になるというようになっている結果，係数行列が特殊の形になる．このような場合にはそれに応じて特殊の解法を考えることができる．

例えば，次のような Multistage Leontief Model を考える．

$$
\begin{aligned}
&A_{11}X_1 &&= b^{(1)}\\
&A_{21}X_1 + A_{22}X_2 &&= b^{(2)}\\
&A_{31}X_1 + A_{32}X_2 + A_{33}X_3 &&= b^{(3)}\\
&A_{41}X_1 + A_{42}X_2 + A_{43}X_3 + A_{44}X_4 &&= b^{(4)}\\
&C^{(1)}X_1 + C^{(2)}X_2 + C^{(3)}X_3 + C^{(4)}X_4 &&= z \to min
\end{aligned}
$$

X_1 は第一期の activity の水準，X_2 は第二期の水準等を表わし，$C^{(j)}$ は費用を表わすベクトルとする．係数行列全体は Leontief 行列としての性質を持ち，かつ $b^{(i)} \geqq 0$ とする．

任意のベースに対応して，係数行列を，

$$
B = \begin{Bmatrix} B_{11} & & & \\ B_{21} & B_{22} & & \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{Bmatrix}
$$

$$
\gamma = (\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}\gamma^{(4)}\gamma^{(5)})
$$

と書く，そのとき，$\pi^{(4)} = \gamma^{(4)}B_{44}^{-1}$ とおいて，

$$
C^{(4)} - \pi^{(4)}A_{44}
$$

を計算したとき，このベクトルのすべての要素が負にならないならば，最後の期のベースのえらび方は最適である．もしそうでなければ，普通の方法によって最適なベースをえらび出す．次に最後の期の最適なベースをもとにして，

$$
\bar{C}^{(3)} = C^{(3)} - \pi_4 A_{43}, \qquad \pi^{(3)} = \bar{\gamma}^{(3)}B_{33}^{-1}
$$

とおき，

$$
\bar{C}^{(3)} - \pi^{(3)}A_{33}
$$

が非負となるように一期前の最適ベースを求める．このようにして全体を各期ごとに順に解いて行くことができる．

また別の種類の問題として，係数行列がいくつかのブロックに分けられ，それぞれが次のブロックとただ一つの変数のみを共有している場合には，各ブロックごとに他のブロックと共通の変数をパラメーターとして，parametric programming を適用して解いて行くことができる．

このような考え方は，multistage の問題ばかりでなく，一般に大きな LP を解くときにも応用することができる．非常に変数の多い LP の問題は，係数行列が上にのべたのと似たような特殊の型を示す場合が多い．しかしその場合には，全く上と同様に簡単な方法で解くことはできない．その点に関するいろいろな提案についての簡単な説明がなされている．

(関谷　章)

SADOWSKI, W.: A FEW REMARKS ON THE ASSORTMENT PROBLEM *Manag. Sci.* ***6*** *No 1. 1959*

鋼材の需要分布が与えられているとき，どのような品種の材を生産することによって最も鉄鋼を節約することができるかを考える．今重さ W の鋼材に対する需要の密度を $l(w)$ と表わす，$l(w) \geq 0$, $W_1 \leq w \leq W_2$ 今 n に種の鋼材を生産するものとし，その重さをそれぞれ $w_1 < w_2 < \cdots\cdots < w_n$ とする $(w_n = W_2)$ w の重さを必要とする需要は，それ以下の重さのもので満すことはできないから，w_{i-1} と w_i の間にある需要は，結局すべて w_i の鋼材によって満されることになり，そこにいくらかの無駄が生ずることになる．これを最少にすることを目的とする．

まづ必要とされる鉄鋼の総量は，$w_1 < w_2 < \cdots\cdots w_n$ を定めると

$$
\sum_{i=1}^{n} w_i \int_{wi-1}^{wi} l(w)\,dw
$$

と表わされるからこれを最小にするように w_i を定めればよい，

更に w_i の鋼材を作る機械を建設する費用を $c(w_j)$ とすると，結局

$$
\sum_{i=1}^{n} w_i \int_{wi-1}^{wi} l(w)\,dw + \sum_{i=1}^{n} c(w_i)
$$

を最少にするように $w_1 < \cdots\cdots < w_n$ および n を決めることになる．

この問題は，この式をで微分することによって形式的には解かれるが，しかしその方法は実際の計算には不適当である．

そこで dynamic programming を適用する．

$w_1 = a$, $w_2 = b$ とおく．

まづ $n = 1$ のときは $w_1 = b$ としなければならないことは明きらか．

$n = 2$ のとき，$w_2 = b$ だから $w_1 = y$, $a < y < b$

とすると $n=b$ のときとくらべて節約される費用は

$$\int_a^y bl(w)dw-\int_a^y yl(w)dw-c(w)=S(a,y)$$

となる．従って

$$f_1(a)=\max_{a<y<b} S(a,y)=S(a,y^*)$$

とすれば $y=y^*$ とするのが最適である．

以下同様に考えて，

$$\max_{a<y<b}\{S(a,y)+f_{i-1}(y)\}=f_i(a)\quad i=2,3\cdots$$

によって i 種類と生産するときの費用の節約の最大値を求めることができる，これによって最適の m も同時に求めることができる．

次に機械の capacity に限界があることを考慮すると次のように考えることができる，今度は需要は連続でなく n 個の点で発生するものとする．そのとき $t_{i,j}$ $(i\leqq j)$ を i 番目の点に対応する鋼材で i から j までの需要を全部満すようにしたときの総費用(機械の建設費＋鉄鋼の費用)とする．(点は重さの大きい方から順にならべてあるものとする)そうすると費用を最少にするには $t_{1i_1-1}+t_{i_1i_2-1}+t_{i_2,i_3-2}+\cdots\cdots t_{i_k,n}$ を最少にするような $i_1<i_2<\cdots\cdots i_k$ を定めればよいことになる．この問題は routing problem とよく似ており，再び D. P. によって解くことができる，

著者がポーランド中央計画統計学校(O. ランゲのいるところ)の所属となっているのが興味をひく．

(平館道子)

MC-NANGHTON, R.: SCHEDULING WITH DEADLINES AND LOSS FUNCTIONS

Manag. Sci. ***6*** *No. 1 1959*

普通 Scheduling の問題は仕事をなるべく早く仕上げることを判定基準として考えられている．ここでは仕事に一定の期日(deadline)があって，それを越すと仕事が無価値となるか，或いは少くとも損失が起るような場合を扱う．ここでは損失は一定期日(d 日後)までは 0，それを越すと時間に比例するものとする．

m 個の仕事があって，それぞれを完成するのに要する日数を a_i，期日後 x 日たつときの損失を p_ix とする．また $r_i=p_i/a_i$ とおく．

そのとき，一台の機械で仕事をする場合に，期限の来てしまった仕事は r_i の大きさの順にするのがよいことがわかる．更に，

定理．仕事を r_i の大きさの順に，一つづつ中断なしで(仕事を分けて一部づつすることが可能であっても，そうはしないで)することにしたとき，すべての仕事が期限前に終らないならば，そのような並べ方が最適である，

次に何台もの機械を使うことが許される場合を考える．この場合は期限前にすべての仕事を完成させるためには，仕事を分割して一部づつをいくつかの機械でする方がよいこともある(ただし同一の仕事の一部づつを同時に別々の機械ですることはできないものとする)しかし，

定理．もし $d_1=d_2=\cdots\cdots\cdots=d_m=0$ ならば，仕事を分割しないで行う場合だけを考えれば充分である．

ことが証明される．

最後に2台の機械で3つの仕事をする場合(ただし2つの機械の能力は等しくない)を論じている．

途中の考察は，得られた結果にくらべてかなり面倒である．

(関谷　章)

CHARNES, A. & COOPER W.: CHANCE-CONSTRAINED PROGRAMMING

Manag. Sci. ***6*** *No. 1 1959*

例として次のような在庫問題を考える

$$\max E\sum_{j=1}^{n}\left\{P(S_j)S_j-(C_j+T_j)R_j-K_j\left(\frac{I_j-I_{j+1}}{2}\right)\right\}$$

を　$P_r\{I_i+R_j-S_j\geqq I_{\min}\}\geqq\alpha_j$

$P_r\{I_j+R_j-S_j\leqq I_{\max}\}\geqq\beta_j$

$R_j\geqq 0$

の条件の下で最大にすること，ただし，

$j=1,2\cdots\cdots N$ は時期を表わし

$I_j=$ 期首の在庫．　$R_j=$ 計画すべき生産量．

$S_j=$ 需要(これは既知の分布を持つ確率変数である．$S_1\cdots\cdots S_j$ は互いに独立)

$I_{\min}=$ 最低在庫水準　$I_{\max}=$ 在庫最大可能量

$K_j=$ 在庫費用

$C_j=$ 生産費　$T_j=$ 輸送費

$P_j(S_j)=$ 需要量の函数としての販売価格．

勿論ここで，$I_j=I_{j-1}+R_{j-1}-S_{j-1}$ である．

R_j は I_{j-1} および S_{j-1} $S_{j-2}\cdots\cdots$ 等によって決定されるものであるから S_j とは独立な確率変数となる．今 $A_j=I_j+R_j$ とおくと，A_j についても同

じことがいえる．A_j は decision rule によって決められるものであるが，まづ最初に最適 decision rule によって決められる A_j の確率分布はどのようになっていなければならないかを決める．A_j がとり得る状態を $a_{jr}(r=1\cdots\cdots k_i)$ とし．$\lambda_{jr}=P_r\{A_j=a_{jr}\}$ と定義する．そうすると

$$\sum_r \lambda_{jr}=1 \quad \lambda_{ij}\geqq 0$$

そうすると $R_j\geqq 0$ の条件も

$$P_r\{A_j\geqq A_{j-1}-S_{i-1}\ j=2,3\cdots\cdots\}=1$$

と表わすことができるから，すべての条件式および目的函数は λ_{jr} の線型式と表わされ従って問題は *L. P.* で解けることになる．

次にこのような確率分布を与えるような decision rule を求めなければならない．そこで例えば線型クラスに限って

$$A_j=\alpha_{j0}+\sum_{r=1}^{j=1}\alpha_{jr}S_r$$

という形の A_j でなるべく分布の形が最適なものに近くなるようにすることが考えられる．それにはモーメントを一致させるとか，あるいは両辺の特性函数がなるべく近く

$$\left(\text{例えば}\quad \int(\phi_{Aj}-\Pi\phi_S(\alpha_j,t))^2dt:\ \text{mni}\right)$$

なるように α_{jr} をえらべばよい．

この手法は上記のような特殊の例に限らず，広く確率の制限のある *L. P.* の問題に応用できる．

（竹内　啓）

FOSTER E. G.: A UNIFIED THEORY OF STOCK, STORAGG AND QUEUE CONTROL,

Oper. Res. Quart. ***10*** *No. 3 1959*

queuing, stock, storage 等の問題を根本的に同じ種類のものとし扱うことができることを，一つのモデルを用いて示している，

N 個の場所があって，それぞれは 0 か 1 の 2 つの状態のいずれかにあるものとする．これを変化させる input は 0 を 1 にかえる input(1—input) と，1 と 0 にかえる 0—input の 2 種類である．これについていくつかの場合を区別する．

1　input の発生が，0 と 1 との数が一定の条件を満す場合に限り，かつその場合は必ず生ずるとき，それは "triggered" であるといい．そうでないときには "untriggered" であるという．

2　input の結果として生ずる変化の数が状態によって制限されている場合には，それは "controlled" であるといい，そうでなければ "uncontrolled" であるという．

1-input が発生してから．実際に 0 の状態から 1 の状態への変化が起るまでの時間を 1-input time という，0-input time も同様に定義される，

0-input. 1-input, のそれぞれが "triggered" であるか否か．"controlled" であるか否か．のいろいろな組み合わせによって，いろいろな場合の model を考えることができる．

1　1-(0-)input は，1 個或いはそれ以上の場所が 0(1) の状態にある場合に "trigger" される場合，1-input time, 0-input time それぞれ τ_1, τ_0 とすれば，0 の状態にある場所は空いているものと考えれば，τ_1, τ_0 をそれぞれ inter-arrival time, service time とする finite queue のモデルになる．

2　input は trigger されていない．τ_0 は定数で τ_1 は確率変動とする，0-input の量は，今度変化が起るときの 1 の場所の数に等しい（すなわち，すべての 1 は 0 にもどされる）とすると，これは定期検査，一定水準(N) の stock control の system を表わすことになる．

なおこのほか多くの例があげられている．

このように考えると，直ちにわかるように，0 の状態と 1 の状態とは互いに dual の関係にある，従ってこのようなモデルに表現することによって，例えば，ある種の stock-mode が複数 servers の queuing model と dual であることがわかるであろう．このような dual な問題は数学的には互いに同等であるから．dual の関係を利用することが計算上便利であることも多い．

また以上にのべたような概念と用いて，いろいろな問題を体系的に分類することもできるようになる．

この論文の内容は概説的であって，具体的な計算は示されていない．

（竹内　啓）

GOULD. S.: A METHOD OF DEALING WITH CERTAIN NON-LINEAR ALLOCATION PROBLEMS USING THE TRANSPORTATION TECHNIQUE

Oper. Res. Ouart ***10*** *No. 3 1959*

何種類かの生産物をいくつかの工場で生産する場合，全費用を最少にする問題は，もし費用函数がすべて線型であるならば，simplex 法を用いて解く

ことができる．また費用函数が convex な場合にも simplex 法が適用できることは知られている．ここで一般の場合を考えている．

それぞれの工場が更にいくつかの department からなり，一つの生産物を生産するには，それぞれのdepartment で一定の capacity を要するものとしよう．そのときまず各工場の各 department ごとの費用函数を部分的に線型な(折れ線型の)函数で近似し，この近似費用函数と用いて費用を最少にすることを考える．

可能な配分全体の領域を，それぞれの内部ではすべての費用函数が線型になるような部分領域に分割する．その数はかなり大きくなるが，department 相互の関係などを考慮して減らすことができる．

次に各領域ごとに transportation の手法を用いて local optimum を求める．その際いくつかの点を考慮すると，その領域の中に local optimum が存在しない場合を判定することができる．即ち領域の境界条件にある程度無視して optimum を求め，それが境界の外に出る場合，どのような所に出ているかによって，その領域の中に local optimum (従って勿論全体の中での最適の点も)含まれているかどうかを判断することができるのである．

こうしてすべての領域についてしらべ，すべての local optimum を求めた後，それらを比較して最適点を求めるのである．

この方法は費用函数が concave でかつ capacity の上限が決められているような場合に用いられ，工場の数が少いならば有効である．

この方法は実際に3つの工場で 20 種類の生産物を生産する場合に適用された．各工場は7つの department からなっており，department ごとの費用函数は大部分2つの部分に分ければ充分線型と見なすことができた．

ここにはこの場合についての詳細は書かれていないが，数値例として，A, B, C の3工場で3種類の生産物を生産する場合が上げられている．それぞれの工場は原料加工部門と製造部門とからなり，それぞれの部門ごとに費用函数は大体2つの部分に分けられている．この例について計算の各段階が詳細に論ぜられ，21 の領域について考察した後，3つの local optimum を得，最後に最適点全部(一つではない)を求めている．筆者の得た印象ではその考察は，(数値計算が簡単なのに)かなり面倒なように思われる．

(竹内　啓)

HOGGATT, A. C.: 'AN EXPERIMENTAL BUSINESS GAME'

Behavioral Science **4** *(1959) No. 3 192—203*

競争状態における人間の行動を研究する一つの手段として，適当な game モデルを設定して実際に人間にやらせてみる．このような実験的研究は数学的な game theory の得た事実を験証し，再認し，またその発展方向を示唆したりするので重要である．今までに報告されている実験的研究の数は多くないが，この論文は企業 (industry) における寡占 (oligoply) モデルを扱っている．

3箇の会社(firm)があって同じものを生産している．$X_i(t)$ を会社 i の第 t 期における生産量とすると，生産費用は

$$C_i[X_i(t)]=a_i+b_iX_i(t)+c_i[X_i(t)]^2$$
$$(a_i, b_i, c_i > 0\,;\ i=1,2,3)$$

で与えられる．各会社は自分の係数だけを知っていて，他の会社の係数は知らない(しかし2次函数なことは知っている)．各会社は生産しただけ売る．故に第 t 期における市場への供給量は

$$S(t)=X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)$$

である．このとき市場価格は

$$P(t)=100-0.5S(t)-0.3S(t-1)-0.2S(t-2) \qquad (*)$$

で与えられるものと仮定する．各会社は(*)式の形を知っている．ただし競争者の数は知らないとする．各会社は独立に(協力しないで)それぞれの各期の生産量 $X_i(t)$ をきめる．第 t 期における利益は i にとって

$$\pi_i[X_i(t); X_j(t), X_k(t)] \equiv P(t)X_i(t)-C_i[X_i(t)], \quad (i \neq j \neq k)$$

である．第 t 期($t=1,2,\cdots$)には各 i に

$$S(t-1), S(t-2), \cdots;\ P(t-1), P(t-2), \cdots;\ \pi_i[t-1], \pi_i[t-2],$$

の全部が，利用してよい情報として Umpire により知らされる．

この game モデルの特徴は① variable-sum 多段 game である，②非協力 game である，③各 player にとって相手の payoff 函数が不明，何人 game かさえも不明．

この寡占モデルについて．3人づつ3組の被実験者について実際に play をさせて見た結果を報告している．それによると．各 player の policy はいわゆる Cournot Behavior Assumption によって理論的に予知される平衡解に，不規則的な振動しながらかなり早く近づいてゆくことが見られる．

Cournot Behavior Assumption というのは，第 t 期において i は．相手の choices が直前期のそれら $X_j(t-1)$ と同じと考えて，その期の利益 π_i $[X_i(t); X_j(t-1), X_k(t-1)]$ を最大にするように行動する．というのである．

このモデルについて今後の考察の対象となるべき諸点を列挙すれば．Nash の非協力 game の理論，sequential decision-making における環境の非定常性(Flood の考察)，team と組織に関する Marschak の理論，さらには不確実事態のもとの decision-making の一般理論 (Coombs-Beardslee) などがあって．この論文は実験的にも理論的にも多くの面白い問題をふくんでいる．　(坂口　実)

BLYTH, C. R.: NOTE ON ESTIMATING INFORMATION

Ann. Math. Stat., ***30*** *(1959) 71—79*

k 個の値をとりうる確率変量 Y がある：

$$\mathrm{Prob}\{Y=a_i\}=p_i \quad (i=1,\cdots,k).$$

可能な値 a_i が必ずしも数値で表わされない場合(例えば $a_1=$ 緑，$a_2=$ 赤，$a_3=$ 白，…)もあるから，Y のちらばりを測るのに，Y の空間の metric に無関係な尺度が欲しい．Wiener-Shannon の尺度

$$H\equiv-\sum_{i=1}^{k}p_i\log_2 p_i$$

はそういう点で都合よいわけである．

Y の独立な繰返し観測値 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ が与えられて，これから H を推定するにはどうするか．値 a_i をとった回数を X_i とすると，$X_1,\cdots,X_k$ が $p_1,\cdots,p_k$ の充足統計量であるから，$f(X_1,\cdots,X_k)$ の形で best な推定量を求めればよい．H の最尤推定量は Miller-Madow (1954) により求められているが，n が小さいときはよくない．

> H の不偏推定量は存在しない．$p_1,\cdots,p_k$ の n 次以下の多項式に対してならば，その不偏推定量が存在する．

ということがわかるので，H の低 bias 推定量の中で best なものを探す．H を $(1/2,\cdots,1/2)$ のまわりに Taylor 展開してその第 n 近似をとれば

$$H_n\equiv 1-\frac{C}{2}\left\{(2-k)+\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}(1-2p_i)^{\alpha}/\alpha^{(2)}\right\}$$

ただし $C\equiv\log_2 e=1.44\cdots$,

$$\alpha^{(\nu)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\nu+1)$$

になる，これの *U. M. V.* (一様最小分散)不偏推定量は

$$Z_n\equiv 1-\frac{C}{2}\left\{(2-k)+\sum_{\alpha=2}^{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\alpha^{(2)}}\binom{\alpha}{\nu}(-2)^{\nu}X_i^{(\nu)}/n^{(\nu)}\right\}$$

である，何故なら p_i の *U. M. V.* 不偏推定量が $X_i^{(\nu)}/n^{(\nu)}$ だから．この Z_n を H の推定量として使おうというのである．

Z_n の bias と分散とが計算してある：

$$B_n\equiv EZ_n-H\equiv H_n-H=o(n^{-2}),$$

$$V_{ar}.Z_n\sim\frac{C^2}{n}\sum_i p_i(\log p_i-\sum p_i\log p_i)^2.$$

n が大きいとき最尤推定量，n が小さいとき minimax 推定量 ($k=2$, 平方誤差損失函数) と比較してある，さらに k が未知のときの扱いにもふれている．　(坂口　実)

BUEHLER, R. J.: SOME VALIDITY CRITERIA FOR STATISTICAL INFERENCES

Ann. Math. Stat. ***30*** *No. 4, 1959*

統計的推測の理論において，標本の観測値にもとづいた条件付推測 conditional inference を行うか，それとも条件付でない推測 unconditial inference をとるかは，根本的な問題点の一つであり，前者の立場をとる Fisher 派と，後者に立つ Neyman-Peasson 派の間には和解し難い対立が生じてしまっている．

この点に関連して，近年 Fisher の本をはじめ，*Joun. Roy. Stat. Soc.* AMS などにもいろいろな人の論文が出ているが，最も重大な点は直観的には尤もと思われる前者の立場が，後者の立場のようにきちんとした数学的定式化をすることができないところにあった．この論文は，その点の解決のための一つの興味ある試みである．

ここでは区間推定の場合がとり上げられている．今分散既知 ($\sigma^2=1$) の正規母集団の平均を推定するものとして，95%信頼区間を作ると，

$$\bar{x}-\frac{1.96}{\sqrt{n}}\leq\mu\leq\bar{x}+\frac{1.96}{\sqrt{n}}$$

となることはいうまでもない．ここでこの命題を A という記号で表わすと，

$$P(A)=0.95 \quad (=\alpha)$$

と書くことができる，ところ Neyman 派の立場に立つ教科書では，このことは上記の区間に μ の値がある確率が 95 % であるということを意味する

ものではないとくわしく注意してあるのが普通である．勿論それはそれとして正しいのであるが，しかし実際問題として，ある特定の信頼区間が得られた場合に，この信頼係数は 95 %でそれは確率とは違うものだといわれただけでは，その結果をどのように扱ってよいか困るであろう．実際問題としては信頼係数を確率と同じように扱うことが許されるのでなければ，区間推定は役に立たないであろう．このことはいいかえれば．「A が真である」ということに，$1-\alpha:\alpha$ の割合で賭けることが，丁度公平な賭けになっているということを意味するのでなければならない．

この点をもっと具体化して次のように表わす，P が確率変数 X の実現値 x にもとづいて一つの命題 A とその確率 α を宣言する，すなわち "$P(A)=\alpha$" とのべる．このことは P は $1-\alpha:\alpha$ の賭けにはいつでも応ずるということを意味する．これに対して Q もまた x にもとづいて賭けを挑むことができる，即ち $x\epsilon C^+$ なら A が真の方に．$x\epsilon C^-$ なら A が偽の方に賭けるものとする．$x\notin C\cup C^+$ なら賭けないものとする，

そうすると $P(A)=\alpha$ が信頼区間の意味で正しいということは，単に Q がつねに A が真の方か，或いは逆に偽の方に賭けるならば賭けが平等になるということを意味するに過ぎない．この場合でも，パラメーターの値が何でも，

$$P(A\mid C^+)\geqq\alpha+\varepsilon$$
$$P(A\mid C^-)\leqq\alpha-\varepsilon$$

となるような C^+ あるいは C^- が見出されるかもしれない．このときには Q はつねに有利な賭けをすることができることになる．

このような集合 C^+, C^- を relevant であるというそうすると "$P(A)=\alpha$" と宣言することが本当に合理的であるためには，relevant な集合が存在しないことが要求されるであろう．このような要求は修件付信頼区間に導びく．Neymen の最短信頼区間は必ずしもこの要求を満さない．

この論文には多くの例が上げられているが，その中の一つを上げよう．

観測値は (x, y) の二変数で，その分布は $y=0,1$. $p_p\{y=0\}=p_r\{y=1\}$ かつ $p_r(x\mid y=0)\sim N(\mu, 1)$ $p_r(x\mid y=1)\sim N(\mu,4)$ とする．

そうして μ を推定する問題を考える．このとき条件付信頼区間は

$$A\,;x-1.96\,\sigma_i\leqq\mu\leqq x+1.96\,\sigma_i$$
$$\sigma_i=1.\quad y=0\quad \text{のとき}$$
$$=2\qquad y=1$$

となる．これが直観的にも合理的と思われるのであるが，一方最短信頼区間は．

$$A'\,;x-c_i\sigma_i\leqq\mu\leqq x+c_i\sigma_i$$
$$c_0>1.96\quad c_1<1.96$$

という形になる．従って

$$P(A'\mid y=0)\fallingdotseq 0.97\quad P(A'\mid y=1)\fallingdotseq 0.93$$

となる．

なお relevant な集合が存在する場合，或いは存在しない場合の条件も論ぜられているが，決定的な結論は得られていないように思われる．(竹内　啓)

THOMPSON, S. P. AND ZIFFER, A. J.: THE WATCHDOG AND THE BURGLAR.

Naval Res. Logist Quart., **6** *(1959) 165—172*

これは工学のある種の問題に対して相当に重要かも知れないある対抗状態を game 論のモデルにしたのである．説明の便宜上，2人の player を番犬 (W) と泥棒 (B) にする．数学的には，二つの parameter をもつ行列 game の値がどう変るかの考察である．

B が W をみつけたとき (この確率を ρ とする) は支払行列が

$$W:\begin{array}{c} \quad\;\; B \\ \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}\end{array}$$

とする．行 (列) を支配する player が $W(B)$ である．第 1, 2, 3 行(列)はそれぞれ

"左，真直ぐ，右にとびかかる(とびのく)"

という strategy である，$0<\lambda<1$ は与えられた定数で泥棒にかすり傷をおわしたときのほうびというわけになる．

B が W をみつけなかったとき (この確率は $1-\rho$) は，B はいつも第2列をとるとする

以上の game を正規形，つまり支払行列でかけば

$$\rho\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}+(1-\rho)\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \rho+(1-\rho)\lambda & \lambda & (1-\rho)\lambda \\ \rho\lambda+(1-\rho) & 1 & \rho\lambda+(1-\rho) \\ (1-\rho)\lambda & \lambda & \rho+(1-\rho)\lambda \end{pmatrix}$$

となる．W の pure strategy は第 1,2,3 行のどれかをえらぶことである．B の pure strategy は W をみつけたときに，第 1, 2, 3 列のどれかをと

ることである．いうまでもいが，ρ, λ の値は両 player に既知とする．

この行列 game の解は ρ, λ の値が

(i) $\rho \leqq 1/2$

(ii) $\rho > 1/2,\ \lambda \geqq (2-3\rho)/(2-4\rho)$

(iii) $\rho > 1/2,\ \lambda < (2-3\rho)/(2-4\rho)$

のときで違う．最適の手は(iii)のときだけ一意的．最後に，この game を正方形の上の連続 game に extend した場合を説明している．　(坂口　実)

BELLMAN, R.: DYNAMIC PROGRAMMING AND STOCHASTIC CONTROL PROCESSES

Information and Control, 1 (1958) 228—239

微分方程式

$$dx/dt = g[x, r(t), v(t)], \qquad x(0) = c$$

で規定される物理系がある．c は初期位置，$r(t)$ は既知の分布法則をもった random forcing term, $v(t)$ は feedback 過程を通して制御できる forcing term とするとき

$$E\left[\int_0^T h(x-y,\ t)\,dG(t)\right] \quad (y, G \text{ は与えられた函数})$$

とか，あるいは

$$\text{Prob.}\{\max_{0\leqq t\leqq T} h(x-y, t) \geqq d\}$$

とかを最小にする問題を考える．

random ft をふくんだ変分問題では問題の定義自体が数学的に問題となるから，これをさけて discrete control process を考える．continuous process とその discrete approximation との関係は別の論文 (Ann. of Math. ***65***, *215—223*) でやってある．

例題で説明しよう：$u(t)$ が Van der Pol 方程式

$$u'' + \lambda(u^2-1)u' + u = r(t) + v(t),$$
$$u(0) = c_1,\ u'(0) = c_2$$

の解であるとき

$$E\left\{\int_0^T u^2 dt + |u(T)|\right\}$$

を最小にせよ．ただし強制項 $v(t)$ は

$$-b \leqq v(t) \leqq b \quad (0 \leqq t \leqq T) \qquad (*)$$

のように制御されねばならないとする．

$u' = w$ とおき，u, w についての連立一階微分方程式にしてから discrete process に直すと

$$\begin{cases} u_{k+1} - u_k = w_k\Delta, & u_0 = c_1 \\ w_{k+1} - w_k = (-\lambda(u_k^2-1)w_k - u_k \\ \qquad + r_k + v_k)\Delta, & w_0 = c_2 \end{cases}$$

$(k = 0, 1, \cdots, N-1)$ となる，ここで $\Delta = T/N$, 添字の k は $t = k\Delta$ におけるその函数の値を示す．そこで

$$f_a(c_1, c_2) \equiv \min_{-b\leqq v_a b, \cdots, v \leqq b_{N-1}} E\left\{\sum_{k=a}^{N-1} u_k^2\Delta + |u_N|\right\}$$

とおくと容易に

$$f_a(c_1, c_2) = \min_{-b\leqq v_a \leqq b} E\{c_1^2\Delta + f_{a+1}[c_1 + c_2\Delta, c_2 + (r_a + v_a - c_1 - \lambda c_2(c_1^2-1))\Delta]\}$$

$(a = 0, 1, \cdots, N-2;\ f_{N-1}(c_1, c_2) = c_1^2\Delta + |c_1 + c_2\Delta|)$

が得られる．あとはこの2変数函数の列を逐次に定めればよい．digital computer による計算法を説明してある，v_a に拘束条件(*)のあることがかえって手順を簡単にする．

次に同じ Van der Pol 方程式のもとで

$$\text{Prob.}\{\max_{0\leqq t\leqq T} |n(t)| \geqq d\} = \min$$

の問題を扱っているが．上と同様である．

(坂口　実)

HARTMANIS, J.: THE APPLICATION OF SOME BASIC INEQUALITIES FOR ENTROPY

Information and Control 2, 199—213 (1959)

LEWIS, P. M. Jr.: APPROXIMATING PROBABILITY DISTRIBUTIONS TO REDUCE STORAGE REQUIREMENTS

Information and Conrol 2, 214—225 (1959)

これらの論文は情報の有効な選択，貯蔵および processing に関する一般的研究の一部であると著者らは言っている．

はじめの論文．ergodic な情報源よりでる binary sequence がある．order n (sequence の長さ) までの確率分布しかわからないとすると，この情報源の統計的性質を完全に把握したことには，もちろんならない．そこで低い order の確率分布が高い order の確率分布に課する条件を調べようとする．

$p(x_1, \cdots, x_n)$ が与られたとき

$$\sum_{x_1} p(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) = p(x_2, \cdots, x_{n+1}),$$
$$\sum_{x_{n+1}} p(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) = p(x_1, \cdots, x_n)$$

のような $p(x_1, \cdots, x_{n+1})$ を，$p(x_1, \cdots, x_n)$ の一つの extension という．extension はもちろん無数にある．

［定理］ $p(x_1, \cdots, x_{n+1})$ を $p(x_1, \cdots, x_n)$ の一つの extension とすると，その entropy H_{n+1} について不等式

$$H_n \leqq H_{n+1} \leqq 2H_n - H_{n-1}$$

が成立する．右側不等式において等号の成立するのは $p(x_1, \cdots, x_{n+1})$ が 'free extension'：

$$p(x_{n+1} \mid x_1, \cdots, x_n) = p(x_{n+1} \mid x_2, \cdots, x_n), \quad n \geqq 2$$

$$p(x_2 \mid x_1) = p(x_2) \qquad n = 1$$

のとき，およびそのときに限る．

ゆえに $2H_n - (H_{n-1} + H_{n+1})\ (\geqq 0)$ が長さ $n+1$ の sequence での拘束条件による entropy loss を測る．高位の確率分布 $p(x_1, \cdots, x_{n+1})$ を知ることの重要性も測る．free extension ならばこれが 0 となる．

つぎの論文．高位の確率分布を測定することの面倒さは，位数につき指数的に増大する．この論文は，低位の component distubutions をもってその部分情報をうまく利用して，もとの高位の確率分布を近似することを考える．

与えられた一つの確率分布の product approximation というのは，それより低位の数個の確率の積であって，それら低位確率のどれかの (consecutive) extension になっているものである．例えば $P(x_1, x_2, x_3)$ の product approximations は

$$P(x_1)P(x_2)P(x_3),\ P(x_1, x_2)P(x_3),$$
$$P(x_1, x_2)P(x_3 \mid x_1)$$

などを含めて全部で 10 個ある．例えば $P(x_1, x_2)P(x_2, x_3)$ は product approximation ではない．

［定理］ $P_a, P_b, \cdots, P_n$ を低位確率とし

$$P' = P_a P_b \cdots P_n$$

を，ある高位確率分布の一つの product approximation とする．$P_a, P_b, \cdots$ の consecutive extensions 全体をそれぞれ $E[P_a]$，$E[P_b]$ などとかく．すると P' は $E[P_a] \frown E[P_b] \frown \cdots \frown E[P_n]$ の中で entropy 最大のものである．

真の高位確率分布を P として，これと $P' = P_a P_b \cdots P_n$ との closeness をば

$$\sum P \log(P/P') = H(P_a) + H(P_b) + \cdots + H(P_n) - H(P)$$

ただし $H(P_a) \equiv -\sum P_a \log P_a$,

$$H(P) \equiv -\sum P \log P \text{ など}$$

で測る．低位確率 $P_a, P_b, \cdots$ などを適当にえらんで $H(P_a) + H(P_b) + \cdots + H(P_n)$ が最小になるようにすれば，真の高位確率分布 P を実際に知ることなしに，best approximation が得られる．数値例が示されている．　（坂口　実）

BEARDWOOD, J. HALTON, J. & HAMMERSLEY, J.: THE SHORTEST PATH THROUGH MANY POINTS

Proc. Camb. Phil. Soc. ***55***. *part 4 1959.*

n 個の点を結ぶ最短のルートを求める問題は salesman traveling problem であるが，ここではその最短距離自体が n が大きいとき漸近的に一定の法則に促うことを示す．これによって，実際に求めたルートが最短のものでなくても，どの程度までよいかを判断することができるわけである．しかしこのことを別にしても，結果自体甚だ面白い．

まず n 個の点の集合を $\boldsymbol{P}^n$ と表わす．これらの点は k 次元ユークリッド空間の有界部分集合 c に属するものとする．c の closure を $\bar{c}$ で表わすとする．（一般の salesman problem では点の間の距離は必ずしも空間の直線距離とは一致しないから，点がユークリッド空間に属するとは必ずしもいえないことに注意）

そのとき．$\boldsymbol{P}^n$ の点を結ぶ最短ルートの長さを $l(\boldsymbol{P}^n)$ で表わすと，次の結果が得られる．

$$\limsup_{n \to \infty} n^{-(k-1)/k} l(\boldsymbol{P}^n) \leqslant \alpha_k k^{1/2} [\mu(\bar{c})]^{1/k}$$

ただし，ここで α_k は k のみによって定まる定数　$\mu(\bar{c})$ はルベック測度を表わす．

更により強い結果として，もし $\boldsymbol{P}^n$ の点が c の上の一様分布に従ってランダムにとられたものとすると，

$$P_r\{\lim_{n \to \infty} n^{-(k-1)/k} l\ \boldsymbol{P}^n) = \beta_k k^{1/2} [\mu(c)]^{1/k}\} = 1$$

となって $l(\boldsymbol{P}^n)$ は強収斂する．

ここで，α_k, β_k が c には全く無関係であるところが面白い．その値は正確には求められていないが，

$$0.44 \leqslant \beta_2 \leqslant 0.65 \qquad 0.76 \leqslant \alpha_2 \leqslant 1.18$$
$$0.37 \leqslant \beta_3 \leqslant 0.62 \qquad 0.82 \leqslant \alpha_3 \leqslant 1.37$$
$$0.34 \leqslant \beta_4 \leqslant 0.56 \qquad \beta_4 \leqslant \alpha_4 \leqslant 1.32$$

にあることが示されている．

β_2 については Monte Carlo 法によって求めた近似値は $\beta_2 \fallingdotseq 0.52$ であった．

点の分布が一様でないときには，density を p とすれば，$\mu(c)$ の代りに

$$\int_c p^{(k-1)/k} d\mu$$

を用いればよい，

この式をアメリカの 48 州の首府をめぐりの例の問題にあてはめてみると，道路の長さを道線距離に改めた上で，最短距離は

$$l \fallingdotseq 0.53(2nV)^{1/2}$$

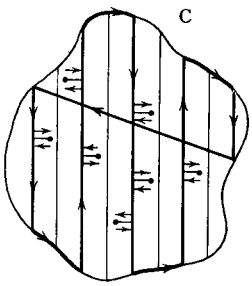
$n=49$ ワシントンを加える.

$V=U.S.A$ の面積

で与えられるはずである.

この式から得られる値は 9100 マイルとなるが, Dantzig の解は(直線距離にすると) 10,070 マイルとなる. この差は首府の存在地が一様に分布しているとは見なされないところから来るものである.(ただし原論文では, 一様分布でないとすると計算値はもっと小さくなるといっているが, これは誤りと思われる. 問題は density の形でなく, 点の分布が互いに独立でない——一つの州からは一つの点しかえらばれないから——ことにある. このことは当然ルートの長さを大きくするはずである.)

有限の n については $E(l(\boldsymbol{P}^n))$ の下限が得られている. そうしてそれによって Mahalonis の予想 "$k=2$ のとき $E(l(\boldsymbol{P}^n))=\mu(c)^{1/2}(n^{1/2}-n^{-1/2})$" は誤りであったことが示される.



証明は甚だ面倒であるので, ここに紹介できないが, 最初の命題の $k=2$ の場合だけを示すと, 領域 c を次のような帯状の地域にわけた後, 図のようなコースを考えると, その長さが一定の限界を越えないから, 更にはばを n が増大するにつれて 0 に近づけて行けば

$\lim_{n\to\infty} \mathrm{isup}\, p\, n^{-1/2}\, l(\boldsymbol{P}^n)$ が存在することがわかる,

確率分布を入れた場合の証明は, 全体を m 個の部分領域に分割したときの, それぞれの部分に属する点を結ぶルートの長さの合計と, 全体のルートの長さとの関係を利用し導かれる. その際大数の強法則が直接使えないので, 証明がかなり面倒になっている. (竹内 啓)

GOLDMAN, A.: CAPACITY REQUIREMENT OF A MAIL SORTING DEVICE II

Jour. Res. Nat. Bur. Stand. 63 B No. 2 1959

次のような自動的郵便分類機構を考える. 入って来る手紙は r ケ所の宛先のいずれかに向けられているものとし, k 通の手紙が入るたびに, 今ある手紙を全部しらべて, その中で最も多数の手紙が向けられている所がどこかを見, そこに宛てられている手紙だけを全部とり出す.

このような操作を行うときに, 手紙があふれてしまわないためにはこの機構の容量 c の大きさがどれだけなければならないかを考える.

そうすると, つねにあふれないためには,

$$rk-(r-1)\leq c$$

が必要であることが示される.

また少くとも容量一杯になることが有り得るためには, $c\leq rk$ でなければならない. 従って容量を rk より大きくすることは無駄であることがわかる.

また入って来る手紙がある宛先に向けられている確率が一定でかつ互いに独立とすれば, 最初の条件の如何にかわらず, たまる手紙の数が $rk-(r-1)$ を越えることは有限回しか起らない.(無限に起る確率は 0 である)

最初の 2 つの命題は. 組み合わせ論的に考えて行くことによって証明される.(ただしその一部は同名の論文 I の方にあるので, ここでは省かれている)

最後の命題は, 機構の中にある手紙の分布が Markov chain をなすことを用い, $rk-(r-1)$ 通以上の手紙があるような状態は transient であることを示すことによって証明される. (竹内 啓)

CONTRIBUTIONS TO THE THEORY OF GAMES IV.

Ann. Math. Study. vol 40 1959

前号につづいてIVの方の紹介をしよう.

1. On the theory of games of strategy, John von Neumann. 最初に Neumann の古典的な論文の翻訳がのっている. 原論文は "Zur Theorie der Gesellschatsspiele" という標題で 1928 年の Math. Annalen に出たゲーム理論の出発点を劃するものである. 内容は, ゲームの normalized form, zero-sun 2-person game のミニマツクス定理. zero-sum 3-person game. および一般の n-person game の特性函数の定義までに及んでいる. まだ n-person game の "solution" の概念は導入されていない, ミニマツクス定理の証明は, mixed strategy を $\xi=(\xi_1\,\xi_2\cdots\xi_N)$, $\eta(\eta_1\,\eta_2\cdots\eta_N)$ とするとき. 一つ一つの $\xi_i\,\xi_i$ について.

$$\max_{\xi_i}\min_{\eta_j} M(\xi,\eta)=\min_{\eta_j}\max_{\xi_i} M(\xi,\eta)$$

を示して行くという方法によっている.

2. Countably infinitely many person games, Kalish G. K. & Nering, E. D. プレイヤーの数を可附番無限にする. とノイマンの solution の存在しない例が作られることを示している.

3. Solutions to general non-zero-sum games, Gillies, D. B. この論文は Neumann の solution の概念を，Neumann の考え方の線に沿いながら拡張して論じたものである．まず特性函数 v，およびそれによる domination の概念が普通に定義された後，n 次元ユークッド空間の任意の部分集合 P について．その部分集合 K が P-stable であるとは．1) K に属する点は互いに他を dominate しない．2) K に属しない P の点はすべて K のいずれかの点で dominate されることであると定義される．これはいうまでもなく solution の拡張になっている．そうすると，P を次のような4つの集合にとったときの，stable set の間に密接な関係があることが示される，

$$E=\{\alpha \mid \sum \alpha_i = M\},\ \bar{E}=\{\alpha \mid \sum \alpha_i \leqq M\}$$
$$A=\{\alpha \mid \sum \alpha_i = M \quad \alpha_i \geqq v(i)\},$$
$$\bar{A}=\{\alpha \mid \sum \alpha_i \leqq M \quad \alpha_i \geqq v(i)\}$$

更に stable set (従って勿論 solution) に関する限り特性函数の superadditivity は仮定として入れても入れなくても同じであることが示される．

次に solution の存在定理として，semi-simple game と呼ばれるものは必ず解を持つこと，また unique solution を持つゲームのクラスの存在が示される．

最後に m-person game から m + 1-person game と構成して行く pyramid game の概念を用いて，m + 1-person game とそれの一部をなす m-person game の解の関係を論じている．

4. A solution containing an arbitrary closed component, Shapley, L. S. $n \geqq 4$ のときの n-person simple game が任意の n-3 次元集合をふくむ解をつねに持つことを示している．

5. Symmetric zero-sun n-person game, Gelbaum, B. R. $v(s)$ が s のふくむ player の数によってのみ定まるような game は一定の条件の下で，symmetric な解を持つこと，およびこのような条件を持つ game が存在することを論じている．

6. Symmetric solutions for general-sum symmetric 4-person game, Nering E. D. 標題にあるようなゲームについて，三通りの symmetric solution を与えている．

7. The four person game—finite solutions on the face of the cube, Mills, W. H. Neumann の立方体の表面にあるようなゲーム，(それは次のような条件を意味する：ある一つの組 (i, j) について $v(i, j)=2$. そうしてすべての i について $v(i)=-1$,) について，有限個の点からなる解をすべて確定する．

8. The solutions of a symmetric market game, Shapley, L. S. 買い手のグループ M と，売り手のグループ N からなるような市場を考える売り手は一単位のみを持ち，買い手も一単位のみを需要するとする．そうすると

$$v(S)=\min(|S \cap M|,\ |S \cap N|)$$

と表わされる($|X|$ は X にふくまれる player の数を示す)このとき，すべての解を定めることができる．

9. Generalized quota solutions of n-person games, Kalisch, G. K. Shapley が前に (Contributions II で)定義した quota の概念を拡張して，

$$\sum_{i \varepsilon s} \omega_i = v(S)$$

がすべての $|S|=m$ であるような S に対して成立する場合の，解の形を論じている．

10. Five-person constant-sum extreme game, Gurk, H. M. five person の場合 extreme (その特性函数が他のゲームの特性函数の線形結合として表わされているという意味で) なゲームは simple game に限らないことを示し，かつ extreme であるための必要充分条件，およびその解を求めている．

11. Extreme games with three values, Griesmer, J. H. 特性函数の取り得る値が 1, $\frac{1}{s}$, 0 の三つのうちのどれかに限られるような extreme game の存在と，その解とを論ずる．

12. Self-Policing propeities of certain imputation sets, Vickery W. Neumann の定義した解の中で，それに属する imputation が，もしそれをくずして他のに imputation 移ると，更に必ずその解の中に属する他の imputation に移ることによって，最初に imputation をくづしした者が損をまねくような性質を持っているものは，そうでない場合にくらべて，安定性が強いと考えることができる．このような解は strong solution と呼ばれる．majority game におけるこのような解．および non homogeneous majority game, ある種の zero sum 4 person game においてはこのような解が存在しないことが示されている．

13. Simple solutions, Gurk, H. M. and Isbell, J. R. simple solution とは，一つのベクトル $\{x_i\}$ と，player の集合の集合 $\{S\}$ があって，$\{\alpha_i\}$ $\alpha_i = x_i\ i \varepsilon S = 0\ i \varepsilon S$ となるようなベクトルの集合が解となっているものという．このような解の満すべき条件を論じ，更に simple game についてこのよう

な解を調べている．

14. Edgeworth market game, Shubik M. 1 財をそれぞれ a_i 持っている M 人と．2 財をそれぞれ b_i 持っている N 人とがいる市場で，それぞれの人の 1 財 x，2 財を持つことから生ずる効用が $\Psi(x, y)$ で表わされる場合を game として定式化し，その解を求める．

15. A note on the article "Some experimental n-person game". Luce, R. D. Kalisch et al の実験("Decision process" にある)の結果を著者の Ψ-stability (coalition の変化に制限をつけたときの安定な解の条件)の基準によって吟味し，結果が理論にあっていることをのべている．

16, Acceptable points in general cooperative n-person games, Aumann, R. J. 同じ game を何度もくり返えす super game を考え，そこで協同して strategy を mix なることを許して，均衡解(配分のベクトル)を考える．すべての 2-person game はこのような解(strong equilibrium point)を持つが，3-person になると持たない場合もある．このような解の性質を論じている．

17. A Bargaining model for the cooperative n-person game, Harsanyi, J. C. Nash の 2-person bargaining における arbitration の概念を n-person に拡張する．もし no trade point が定まれば，均衡点は Nash の場合と同じようにして定まることがすぐ示される．しかし n-person の場合は一部の協議が成立しなくても，他の部分の取り引は成立するから，no trade point は唯一に定まらない．そこで n 人のあらゆる組み合わせを考え，それぞれの間で取引が全体として均衡するような解を求めることを提案している．

18, Absolute games, Isbell, J. R. 各々の player が比較可能ではあるが．直接 transfer することはできないような絶対効用を持ち，game の payoff がその効用で表わされている場合の解を arbitration scheme の考え方から論じている．そうして two player および three player の場合の解の存在を示している．

19. A New approach to n-person games, Kemeney, J, C, Neumann の解の多義性を回避するために，まづ個々の coalition については，あらかじめその配分が定まっていると仮定する．そうすると各 player の望む coalition は決まるから，多くの場合成立すべき coalition が定まることになる．という考え方の簡単な説明．

最後に前号でものべたように，文献リストがのっているが，そこにはゲームの理論だけでなく，広く統計的決定理論，*L. P.* 等の関係の論文も多く収められており，またわが国の学者の論文もかなり見られる．

(竹内　啓)

海外交換雑誌

本学会に交換雑誌として送られて来たのは下記のとおりです．なお，お読みになりたい方は本学会事務所までお越し下さい．また，御希望の方には実費でリプリント致します．貸出しは致しません．

1. REVUE FRANÇAISE DE RECHERCHE OPERATIONNELLE
   3e ANNEE No. 12
   — REVUE FRANCAISE DE RECHERCHE OPERATIONNELLE
   92, Rue Bonaparte DUNOD
   Editeur. PARIS-6

2. SANKHYA
   THE INDIAN JOURNAL OF STATISTICS
   VOLUME 21, PARTS 1～2
   〃 20, 〃 3～4
   — STATISTICAL PUBLISHING SOCIETY
   CALCUTTA

3. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ИЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
   ТОМ IV Выпуск 4
   — АКАДЕМИЯ НАУК СССР