ある動態的マクシミン発注政策とその一般化

春日井　　博*
加瀬谷　忠　美**

1. まえがき

当研究においては，前期からの繰越在庫量 (initial stock) を x とし，購入または返品等の調整によって生ずる在庫量 (starting stock) を y とし，需要量 z が実現したとき，その期間の利潤は x, y, z の函数 $P(x, y, z)$ であるとする．

経営者が合理性の判断基準をマクシミン原理(ミニマックス原理)に求めるとすれば，initial stock x にもとづいて合理的な発注政策で無限期間，継続する場合の利潤現価総計 $f(x)$ はつぎの函数方程式の解であることになる．

$$f(x) = Val\{P(x, y, z) + \alpha\phi(y - z)\}$$

$$\text{ただし}\quad \phi(\xi) = \begin{cases} f(\xi) & (\xi \geqq 0 \ \text{のとき}) \\ f(0) & (\xi \leqq 0 \ \text{のとき}) \end{cases}$$

ここに α は割引係数で，一般には $0 < \alpha < 1$ であり，特別の場合には $0 \leqq \alpha \leqq 1$ として考えられる．なお，この場合は在庫品の陳腐化については考慮の必要がないとするが，なんらかの事情によって次期への繰越量にもとづく保管費用のごときものがあれば，当然評価されて函数 P の中に考慮されているものとする．

さて，この問題は経営者と市場との多段ゲームであって，需要量 z は市場の strategy であるが．以下の考察では $0 \leqq z \leqq z_m$ の範囲に限定する．z_m は予測された需要量の上限であって，各期間を通じて不変と仮定する．ところで数理的観点からすれば市場の mixed strategy，すなわち需要量の確率分布を考察することは興味あることであるが．経営上の観点からすれば市場の strategy を pure strategy に限定することにも意味があると考える．

以下の考察では，ある函数 P を仮定した上で，この2つのアプローチを対比し，さらにそのあとで，かなり一般化した場合にこれら2つのアプローチの間に興味ある関連性があることを述べよう．なお，函数方程式による $D.P.$ の場合，無限期間の操業を前提とした極限的な解は理論的には興味深いが現実の問題としてはむしろ逐次近似の過程でえられる各段階での解の吟味も大切であろうと思われる．

2. 市場の strategy を pure strategy に限定した場合の例

＊　早稲田大学第一理工学部工業経営学科　　＊＊　早稲田大学．

最初に，市場の strategy を $0 \leqq z \leqq z_m$ の範囲の pure strategy に限定して考察する．一例として，

$$P(x, y, z) = \begin{cases} pz - a(y-x) - b(y-z) & (y \geqq z \text{ のとき}) \\ py - a(y-x) - c(z-y) & (y \leqq z \text{ のとき}) \end{cases}$$

すなわち

$$P(x, y, z) = \begin{cases} (p+b)z - (a+b)y + ax & (y \geqq z \text{ のとき}) \\ -cz + (p+c-a)y + ax & (y \leqq z \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする．p は販売価格，a は仕入価格，b は売残損費，c は品切れによって生ずる損失で（ただしいずれも1単位当り），仕入価格で返品可能というケースになる．（なお $p, a, b, c \geqq 0$ とする）

そこで，問題はこの函数 P にもとづいて

$$f_1(x) = \underset{y}{\mathrm{Max}}\ \underset{z}{\mathrm{Min}}\ P(x, y, z)$$

$$f_2(x) = \underset{y}{\mathrm{Max}}\ \underset{z}{\mathrm{Min}}\ \{P(x, y, z) + \alpha\phi_1(y-z\}$$

$$\text{ただし}\quad \phi_1(\xi) = \begin{cases} f_1(\xi) & (\xi \geqq 0 \text{ のとき}) \\ f_1(\xi) & (\xi \leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

から始めて順次

$$f_n(x) = \underset{y}{\mathrm{Max}}\ \underset{z}{\mathrm{Min}}\ \{P(x, y, z) + \alpha\phi_{n-1}(y-z)\}$$

$$\text{ただし}\quad \phi_{n-1}(\xi) = \begin{cases} f_{n-1}(\xi) & (\xi \geqq 0 \text{ のとき}) \\ f_{n-1}(0) & (\xi \leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を解くこととなる．

前記の函数 P の中のそれぞれの係数 p, a, b, c がそれ自体，非負であることと，$0 \leqq z \leqq z_m$ の範囲のみを考えることに着目すれば，これらはきわめて簡単に解くことができて，まず $f_1(x)$ については

$$y = \frac{cz_m}{p+b+c}$$

が最適で

$$f_1(x) = ax - \frac{(a+b)c}{p+b+c} \cdot z_m$$

となる．つぎに $f_2(x)$ については

$$y = \frac{cz_m}{p+b+c-\alpha a}$$

が最適で

$$f_2(x) = ax - \alpha\frac{(a+b)c}{p+b+c} \cdot z_m - \frac{\{a(1-\alpha)+b\}c}{p+b+c-\alpha a} \cdot z_m$$

となる．また $f_3(x)$ については

$$y = \frac{cz_m}{p+b+c-\alpha a}$$

が最適で

$$f_3(x) = ax - \alpha^2 \frac{(a+b)c}{p+b+c} \cdot z_m - (1+\alpha) \frac{\{a(1-\alpha)+b\}c}{p+b+c-\alpha a} \cdot z_m$$

となる．以下同様に順次解くことができて，一般に $f_n(x)$ については

$$y = \frac{cz_m}{p+b+c-\alpha a}$$

が最適で

$$f_n(x) = ax - \alpha^{n-1} \cdot \frac{(a+b)c}{p+b+c} \cdot z_m - \frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha} \cdot \frac{\{a(1-\alpha)+b\}c}{p+b+c-\alpha a} \cdot z_m$$

となる．

ここで注目すべき点は，どの段階においても y の最適値が x と独立に定まっていることと，$n=2$ 以上の $f_n(x)$ において，それが一定していることであるが，これらの点については後でさらに吟味することとする．また，いま求まった $f_n(x)$ について見ると，$0<\alpha<1$ ならば $n \to \infty$ のとき

$$f(x) = ax - \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{\{a(1-\alpha)+b\}c}{p+b+c-\alpha a} \cdot z_m$$

に収束する．しかもこの極限は

$$f(x) = \underset{y}{\mathrm{Max}}\ \underset{z}{\mathrm{Min}} \{P(x, y, z) + \alpha\phi(y-z)\}$$

$$\text{ただし}\quad \phi(\xi) = \begin{cases} f(\xi) & (\xi \geqq 0 \text{ のとき}) \\ f(0) & (\xi \leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を満足することが容易に検算できる．

3. 市場の mixed strategy を考える場合

いま取扱った同じ函数 P について，市場の strategy を $0 \leqq z \leqq z_m$ の pure strategy に限定するのでなく，$0 \leqq z \leqq z_m$ の上の確率分布（すなわち mixed strategy）を考慮することとする．そこでは問題は

$$f_1(x) = \mathrm{Val}\, P(x, y, z)$$

$$f_2(x) = \mathrm{Val}\{P(x, y, z) + \alpha\phi_1(y-z)\}$$

$$\text{ただし}\quad \phi_1(\xi) = \begin{cases} f_1(\xi) & (\xi \geqq 0 \text{ のとき}) \\ f_1(0) & (\xi \leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

一般に

$$f_n(x) = \mathrm{Val}\{P(x, y, z) + \alpha\phi_{n-1}(y-z)\}$$

$$\text{ただし}\quad \phi_{n-1}(\xi) = \begin{cases} f_{n-1}(\xi) & (\xi \geqq 0 \text{ のとき}) \\ f_{n-1}(0) & (\xi \leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を順次解くこととなる.

市場の strategy は定義域 $0 \leqq z \leqq z_m$ の確率密度函数 $g(z)$ であると一応仮定しよう.（この仮定は便宜上のものであって，厳密には多少の修正を必要とするが，これについては後述する）.

ただし，従来の在庫管理の諸問題におけるミニマックス解法の例にしばしば見られるような分布型やパラメーターに関する仮定は，ここでは一切おかないとして考察を進める.

他方，経営者の strategy としては確率化された発註政策 (randomized ordering policy) を考える必要はなく，ある y の値（すなわち pure strategy）において，このゲームが均衡するものを仮定しよう.（この仮定の妥当性については後にあらためて論ずる）

まず，1 stage のみを考える $f_1(x)$ について述べるに，経営者が y_1，市場が密度函数 $g(z)$ という strategy をとったときの経営者の期待利潤を $E_1(y, g)$ とすれば，前に示した函数 P に対しては $E_1(y, g)$ の具体的な形はつぎのようになる.

$$
\begin{aligned}
E_1(y, g) &= \int_0^{y_0} \{(b+p)z - (a+b)y + ax\} g(z)\, dz \\
&\quad + \int_y^{z_m} \{-cz + (p+c-a)y + ax\} g(z)\, dz \\
&= (b+p)\int_0^y zg(z)\, dz - c\int_y^{z_m} zg(z)\, dz \\
&\quad - \{(a+b)y - ax\}\int_0^y g(z)\, dz + \{(p+c-a) + ax\}\int_y^{z_m} g(z)\, dz
\end{aligned}
$$

ここで $\int_y^{z_m} g(z)\, dz = 1 - \int_0^y g(z)\, dz$

に着目すれば

$$
\begin{aligned}
E_1(y, g) &= (b+p)\int_0^y zg(z)\, dz - c\int_y^{z_m} zg(z)\, dz \\
&\quad - (p+b+c)y\int_0^y g(z)\, dz + (p+c-a)y + ax
\end{aligned}
$$

となる.

さて，まず市場の例から考えて $\underset{g}{\mathrm{Min}}\ \mathrm{Max}\ E_1(y, g)$ を求めてみよう．そこで $\underset{y}{\mathrm{Max}}\ E_1(y, g)$ を求めるために g を所与と見なして $E_1(y, g)$ を y で微分すれば

$$
\frac{\partial}{\partial y} E_1(y, g) = -(p+b+c)\int_0^y g(z)\, dz + (p+c-a)
$$

となって

$$
\frac{\partial}{\partial y} E_1(y, g) = 0
$$

となる y の値は（実際には $p+b+c \neq 0$ であるので）

$$\int_0^y g(z)\,dz = \frac{p+c-a}{p+b+c}$$

なるような y の値であるということになる．かつ，このような y がそれぞれの $g(z)$ に対応して $\underset{y}{\mathrm{Max}}\ E_1(y, g)$ ならしめるものであることは直感的にも明らかだが，数学的には

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} E_1(y, g) < 0$$

なることが容易にわかるので証明される．そこで $g(z)$ に対してそのような y の値を便宜上 y_0 と示す．すなわち

$$\int_0^{y_0} g(z)\,dz = \frac{p+c-a}{p+b+c}$$

そうすると，$\underset{y}{Max}\ E_1(y, g) = E_1(y_0, g)$

であって，具体的にはつぎのような形になる．

$$\begin{aligned}\underset{y}{\mathrm{Max}}\, E_1(y, g) &= (b+p)\int_0^{y_0} zg(z)\,dz - c\int_{y_0}^{z_m} zg(z)\,dz \\ &\quad - (p+b+c)\,y_0\,\frac{p+c-a}{p+b+c} + (p+c-a)\,y_0 + ax \\ &= (b+p)\int_0^{y_0} zg(z)\,dz - c\int_{y_0}^{z_m} zg(z)\,dz + ax\end{aligned}$$

この式の値を最小にする密度函数 $g(z)$ を探すこととなるが，制約条件として

$$\int_0^{y_0} g(z)\,dz = \frac{p+c-a}{p+b+c}$$

を満足しなければならないことを忘れてはならない．ところが，ここでこの制約条件を考慮に入れて $\underset{y}{\mathrm{Max}}\, E_1(y, g)$ を見ると，市場の minimax strategy としての分布函数は，実は定義域 $0 \leqq z \leqq z_m$ の単純な確率密度函数ではなくて，$z=0$ および $z=z_m$ にジャンプを持つことが明らかとなってくる．（前に定義域 $0 \leqq z \leqq z_m$ の確率密度函数 $g(z)$ を仮定するのが一応の便宜的な仮定であると記したのはこの意味であって，この場合はこのままでも直ちに求める市場の minimax strategy は見出せるけれども，厳密にはつぎのように書き直す必要があろう．）

いま，分布函数 $G(z)$ が

$$\begin{cases} z=0 \text{ にて } \gamma \text{ なる値のジャンプをもつ} \\ z=z_m \text{ にて } \delta \text{ なる値のジャンプをもつ} \\ \varepsilon \leqq z \leqq z_m - \varepsilon \text{ にて連続な密度函数 } g(z) \end{cases}$$

という形をとるものとする．（ここに ε はきわめて小なる正数とする．）かつ，γ，δ は非負で

$$\gamma + \int_\varepsilon^{z_m-\varepsilon} g(z)\,dz + \delta = 1$$

である．このような分布函数に対しては

$$E_1(y, G) = \{-(a+b)\,y + ax\}\,\gamma + \int_\varepsilon^{y} (b+p)\,z - (a+b)\,y + ax\}\,g(z)\,dz$$

$$+\int_y^{z_m-\varepsilon}\{-cz+(p+c-a)\,y+ax\}\,g\,(z)\,dz+\{-cz_m+(p+c-a)\,y+ax\}\,\delta$$

$$=-(p+c+b)\,y\,\gamma+(b+p)\int_\varepsilon^y zg\,(z)\,dz-c\int_y^{z_m-\varepsilon}zg\,(z)\,dz$$

$$-(p+c+b)\,y\int_\varepsilon^y g\,(z)\,dz+\{(p+c-a)\,y+ax\}-cz_m\,\delta$$

となり

$$\frac{\partial}{\partial y}E_1(y,\,G)=-(p+c+b)\,\gamma-(p+c+b)\int_\varepsilon^y g\,(z)\,dz+(p+c-a)$$

となるので

$$\frac{\partial}{\partial y}E_1(y,G)=0$$

の解としては

$$\gamma+\int_\varepsilon^y g\,(z)\,dz=\frac{p+c-a}{p+c+b}$$

なる y ということになる．この場合にも前と同様にこの y の値が $G\,(z)$ に対して $\underset{y}{\mathrm{Max}}\ E_1(y,G)$ ならしめることは明らかである．このような y の値を y_0 と示すことにすれば

$$\begin{aligned}\underset{y}{Max}\ E_1\,(y,\,G)&=E_1\,(y_0,\,G)\\&=(b+p)\int_\varepsilon^{y_0}zg\,(z)\,dz-c\int_{y_0}^{z_m-\varepsilon}zg\,(z)\,dz\\&\quad-(p+c+b)\,y_0\frac{p+c-a}{p+c+b}+(p+c-a)\,y_0+ax-cz_m\delta\\&=(b+p)\int_\varepsilon^{y_0}zg\,(z)\,dz-c\int_{y_0}^{z_m-\varepsilon}zg\,(z)\,dz+ax-cz_m\delta\end{aligned}$$

この式の値を制約条件

$$\gamma+\int_\varepsilon^{y_0}g(z)\,dz=\frac{p+c-a}{p+c+b}$$

$$\gamma+\int_\varepsilon^{z_m-\varepsilon}g\,(z)\,dz+\delta=1$$

のもとで最小化する γ, δ, $g\,(z)$ を求めれば，それが求める市場の minimax strategy である．それは明らかに

$$\begin{cases}\gamma=\dfrac{p+c-a}{p+b+c}\\[2mm]\delta=\dfrac{a+b}{p+b+c}\\[2mm]g\,(z)=0\ ; & (\text{すべての}\ \varepsilon\leqq z\leqq z_m-\varepsilon\ \text{に対して})\end{cases}$$

である．換言すれば市場の minimax strategy は

$$\begin{cases} z=0 & \text{に 確率} \ \dfrac{p+c-a}{p+c+b} \\ z=z_m & \text{に 確率} \ \dfrac{a+b}{p+b+c} \end{cases}$$

という2点分布であるということになる．この2点分布に対しては $y_0=0$ であるから

$$\underset{G}{\mathrm{Min}}\ \underset{y}{\mathrm{Max}}\ E_1(y,\ G)=ax-\frac{(a+b)\,c}{p+c+b}\cdot z_m$$

となる．

つぎに経営者側から考えよう．経営者のそれぞれの strategy としての y の値に対し，$\underset{G}{\mathrm{Min}}\ E_1(y,\ G)$ なる分布函数 $G(z)$ が，いまの考察を参照して

$$\begin{cases} z=0 & \text{にて} \ \gamma \ \text{なる値のジャンプを持つ} \\ z=z_m & \text{にて} \ \delta \ \text{なる値のジャンプを持つ} \\ \varepsilon\leqq z\leqq z_m-\varepsilon & \text{にて連続な密度函数} \ g(z) \end{cases}$$

という形をとると仮定する．$E_1(y,\ G)$ を変形して

$$\begin{aligned} &E_1(y,\ G) \\ &=-(p+c+b)\,y\left\{\gamma+\int_\varepsilon^y g(z)\,dz\right\}+(b+p)\int_\varepsilon^y zg(z)\,dz \\ &\quad -c\left\{z_m\delta+\int_y^{z_m-\varepsilon} zg(z)\,dz\right\}+\{(p+c-a)\,y+ax\} \end{aligned}$$

となるので，$E_1(y,\ G)$ は

$$\begin{cases} \left\{\gamma+\displaystyle\int_\varepsilon^y g(z)\,dz\right\} \text{の減少函数} \\ z=\displaystyle\int_\varepsilon^y zg(z)\,dz \quad \text{の増加函数} \\ \left\{z_m\delta+\displaystyle\int_y^{z_m-\varepsilon} zg(z)\,dz\right\} \text{の減少函数} \end{cases}$$

であることから，$\mathrm{Min}\ E_1(y,\ G)$ を考えることは再び2点分布の問題にもどる．そこでまず $\varepsilon\leqq z\leqq z_m-\varepsilon$ の全域にわたって $g(z)=0$ にしてしまい，$\gamma+\delta=1$ なる非負の数 γ と δ に考察を集中する．すなわち

$$\begin{aligned} E_1(y,\ G)&=-(p+c+b)\,y\gamma-cz_m\delta+\{(p+c-a)\,y+ax\} \\ &=\gamma\{cz_m-(p+c+b)\,y\}-cz_m+\{(p+c-a)\,y+ax\} \end{aligned}$$

このうちで，$-cz_m+(p+c-a)\,y+ax$ は目下の問題としての γ の決定に関係ない．γ については，

$$\begin{cases} cz_m-(p+c+b)\,y>0 & \text{ならば} \ \gamma=0 \\ cz_m-(p+c+b)\,y<0 & \text{ならば} \ \gamma=1 \\ cz_m-(p+c+b)\,y=0 & \text{ならば} \ 0\leqq\gamma\leqq1 \ \text{のいかなる値でも可} \end{cases}$$

となる．ところで，ここで考察の目的となっているのは，$\underset{y}{\mathrm{Max}}\ \underset{G}{\mathrm{Min}}\,E_1(y,\ G)$ なる y の値であ

るが，もちろん $p+c+b>p+c-a$ が実際上はいえるので，いかなる γ に対しても，

$$y=\frac{cz_m}{p+c+b}$$

なる y をとるのが経営者の maximin strategy ということになる．このとき

$$\begin{aligned}\underset{y}{\mathrm{Max}}\ \underset{G}{\mathrm{Min}}\ E_1(y,G)&=ax-cz_m+(p+c-a)\frac{cz_m}{p+b+c}\\&=ax-\frac{(a+b)c}{p+b+c}\cdot z_m\end{aligned}$$

となる．しかるに，ここで

$$\underset{y}{\mathrm{Max}}\ \underset{G}{\mathrm{Min}}\ E_1(y,G)=\underset{G}{\mathrm{Min}}\ \underset{y}{\mathrm{Max}}\ E_1(y,G)$$

が成立したので，最適解が求まっていることが証明された．すなわち，市場の mixed strategy を考えても $f_1(x)$ において

$$y=\frac{cz_m}{p+c+b}$$

が最適であって

$$f_1(x)=ax-\frac{(a+b)c}{p+b+c}\cdot z_m$$

つぎに $f_2(x)$ については

$$f_2(x)=Val\{P(x,y,z)+\alpha\phi_1(y-z)\}$$

$$\text{ただし}\quad \phi_1(\xi)=\begin{cases}f_1(\xi) & (\xi\geqq 0\ \text{のとき})\\ f_1(0) & (\xi\leqq 0\ \text{のとき})\end{cases}$$

にいま求まった $f_1(x)$ を $P(x,y,z)$ の具体的な式とともに代入すれば，経営者に対する利潤ペイオフ (Profit payoff) 函数はつぎのようになる．

$y\geqq z$ のとき：

$$(b+p-\alpha a)z-\{b+(1-\alpha)a\}y+ax-\alpha\frac{(a+b)c}{p+c+b}\cdot z_m$$

$y\leqq z$ のとき：

$$-cz+(p+c-a)y+ax-\alpha\frac{(a+b)c}{p+c+b}z_m$$

この2つの式において

$$ax-\alpha\frac{(a+b)c}{p+c+b}z_m$$

の項は考察の対象とする必要はなく，その他の項，すなわち，

$$(b+p-\alpha a)z-\{b+(1-\alpha)a\}y \qquad (y\geqq z\ \text{のとき})$$

$$-cz+(p+c-a)y \qquad (y\leqq z\ \text{のとき})$$

をペイオフ函数とするゲームを考えて，そのゲームの値に $ax-a(a+b)cz_m/(p+c+b)$ を加えれば $f_2(x)$ であるといえる．

経営者が y，市場が $G(z)$ という strategy をとったときの経営者にとっての期待利潤を $E_2(y, G)$ とする．上記のことから

$$E_2(y, G) = E_2'(y, G) + ax - \alpha \frac{(a+b)c}{p+c+b} z_m$$

なる $E_2'(y, G)$ を考える．前の考察にならって $G(z)$が

$$\begin{cases} z=0 \text{ にて} & \gamma \text{ なる値のジャンプをもつ} \\ z=z_m \text{ にて} & \delta \text{ なる値のジャンプをもつ} \\ \varepsilon \leqq z \leqq z_m - \varepsilon & \text{にて連続な密度函数 } g(z) \end{cases}$$

という形をとるものと仮定し，(ここに ε は極めて小なる数)．かつ，γ, δ は非負で

$$\gamma + \int_{\varepsilon}^{z_m-\varepsilon} g(z)\,dz + \delta = 1$$

であるとする．そのときには

$$\begin{aligned} E_2'(y, G) = &-\{b+(1-\alpha)a\}y\gamma + \\ &\int_{\varepsilon}^{y} [(b+p-\alpha a)z - \{b+(1-\alpha)a\}y]g(z)\,dz + \\ &\int_{y}^{z_m-\varepsilon} [-cz + (p+c-a)y]g(z)\,dz + \{-cz_m + (p+c-a)y\}\delta \\ &= -(p+c-b-\alpha a)y\gamma + (b+p-\alpha a)\int_{\varepsilon}^{y} zg(z)\,dz - c\int_{y}^{z_m-\varepsilon} zg(z)\,dz - \\ &(p+b+c-\alpha a)y\int_{\varepsilon}^{y} g(z)\,dz + (p+c-a)y - cz_m\delta \end{aligned}$$

となる．まず，$\underset{G}{\mathrm{Min}}\ \underset{y}{\mathrm{Max}}\ E_2'(y, G)$ から求めよう．

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} E_2'(y, G) = &-(p+b+c-\alpha a)\gamma - (p+b+c-\alpha a)\int_{\varepsilon}^{y} g(z)\,dz \\ &+ (p+c-a) \end{aligned}$$

となるので

$$\frac{\partial}{\partial y} E_2'(y, G) = 0$$

なる y は $p+b+c-\alpha a > 0$ ならば

$$\gamma + \int_{\varepsilon}^{y} g(z)\,dz = \frac{p+c-a}{p+b+c-\alpha a}$$

なる y の値となる．この y の値が $\underset{y}{\mathrm{Max}}\ E_2'(y, G)$ なる y であることは明らかであって，いまこれを y_0 とあらわすことにすると，

$$\begin{aligned} \underset{y}{\mathrm{Max}}\ E_2'(y, G) &= E_2'(y_0, G) \\ &= (p+b-\alpha a)\int_{\varepsilon}^{y_0} zg(z)\,dz - c\int_{y_0}^{z_m-\varepsilon} zg(z)\,dz - cz_m\delta \end{aligned}$$

この $\underset{y}{\mathrm{Max}}\ E_2'(y, G)$ を制約条件

$$\gamma+\int_{\varepsilon}^{z_m-\varepsilon} g(z)\,dz+\delta=1$$

$$\gamma+\int_{\varepsilon}^{y_0} g(z)\,dz=\frac{p+ca}{p+b+c-\alpha a}$$

のもとで最小にする γ, δ, $g(z)$ を求めることを考えると

$$\begin{cases}\gamma=\dfrac{p+b-a}{p+b+c-\alpha a}\\ \gamma=\dfrac{b+(1-\alpha)a}{p+b+c-\alpha a}\\ g(z)=0 \qquad (\varepsilon\leqq z\leqq z_m \text{ に対し})\end{cases}$$

となることが明らかとなる．

$$\underset{G}{\mathrm{Min}}\ \underset{y}{\mathrm{Max}}\ E_2'(y,G)=-cz_m+\frac{(p+c-a)cz_m}{p+b+c-\alpha a}=-\frac{\{b+(1-\alpha)a\}c}{p+b+c-\alpha a}z_m$$

よって

$$\underset{G}{\mathrm{Min}}\ \underset{y}{\mathrm{Max}}\ E_2(y,G)=ax-\alpha\frac{(a+b)cz_m}{p+b+c}-\frac{\{b+(1-\alpha)a\}cz_m}{p+b+c-\alpha a}$$

つぎに経営者側から，$\underset{y}{\mathrm{Max}}\ \underset{G}{\mathrm{Min}}\ E_2(y,G)$ を考える．それには $\underset{y}{\mathrm{Max}}\ \underset{G}{\mathrm{Min}}\ E_2'(y,G)$ を求める必要があるが，まず $\underset{G}{\mathrm{Min}}\ E_2'(y,G)$ を考えると

$$E_2'(y,G)=-(p+b+c-\alpha a)y\left\{\gamma+\int_{\varepsilon}^{y}g(z)\,dz\right\}+(b+p-\alpha a)\int_{\varepsilon}^{y}zg(z)\,dz$$

$$-c\left\{z_m\delta+\int_{y}^{z_m-\varepsilon}zg(z)\,dz\right\}+(p+c-a)y$$

であるから，$E_2'(y,G)$ は

$$\begin{cases}\gamma+\displaystyle\int_{\varepsilon}^{y}g(z)\,dz & \text{の減少函数}\\ \displaystyle\int_{\varepsilon}^{y}zg(z)\,dz & \text{の増加函数}\\ z_m\delta+\displaystyle\int_{y}^{z_m-\varepsilon}zg(z)\,dz & \text{の減少函数}\end{cases}$$

ということがわかる．これから，ふたたび $z=0$ と $z=z_m$ の2点分布を考えることになり，そこで $g(z)=0$ としてしまうと問題は

$$E_2'(y,G)=-(p+b+c-\alpha a)y\gamma-cz_m\delta+(p+c-a)y$$

を最小にする γ, δ の決定ということに帰するが，ここに γ, $\delta\geqq 0$ で，かつ $\gamma+\delta=1$ を必要とするから，このことは

$$E_2'(y,G)=\gamma\{(p+b+c-\alpha a)y+cz_m\}+(p+c-a)y-cz_m$$

を最小にする γ（ただし $0\leqq\gamma\leqq 1$）を決定する問題に帰着する．しかしながら，こうして $\underset{G}{\mathrm{Min}}\ E_2'(y,G)$ を求めるだけでなく，実は $\underset{y}{\mathrm{Max}}\ \underset{G}{\mathrm{Min}}\ E_2'(y,G)$ を解くのが本来の目的であったが，これも同時に明らかとなって

$$-(p+b+c-\alpha a)y+cz_m>0 \quad なら \quad \gamma=0$$

$$-(p+b+c-\alpha a)y+cz_m<0 \quad なら \quad \gamma=1$$

が $\underset{G}{\mathrm{Min}}\ E_2'(y, G)$ ならしめる解であり

$$-(p+b+c-\alpha a)y+cz_m=0$$

ならば，$0 \leqq \gamma \leqq 1$ のいかなる γ をとっても同じということになる反面，経営者にとっては $\underset{y}{\mathrm{Max}}\ \underset{G}{\mathrm{Min}}\ E_2'(y, G)$ なる値は

$$y=\frac{cz_m}{p+b+c-\alpha a}$$

ということになる．(ただし実際上，$p+b+c-\alpha a>0$ と考えておく)

$$\underset{y}{\mathrm{Max}}\ \underset{G}{\mathrm{Min}}\ E_2(y, G)$$

$$=\underset{y}{\mathrm{Max}}\ \underset{G}{\mathrm{Min}}\ E_2'(y, G)+ax-\alpha\frac{(a+b)cz_m}{p+b+c}$$

$$=ax-\alpha\frac{(a+b)cz_m}{p+b+c}-\frac{\{b+(1-\alpha)a\}cz_m}{p+b+c-\alpha a}$$

よって

$$\underset{y}{\mathrm{Max}}\ \underset{G}{\mathrm{Min}}\ E_2(y, G)=\underset{G}{\mathrm{Min}}\ \underset{y}{\mathrm{Max}}\ E_2(y, G)$$

が成立し，$f_2(x)$ を考えたときの最適解が

$$y=\frac{cz_m}{p+b+c-\alpha a}$$

かつ

$$f_2(x)=ax-\alpha\frac{(a+b)cz_m}{p+b+c}-\frac{\{b(1-\alpha)a\}cz_m}{p+b+c-\alpha a}$$

が判明した．

以下同様に，$n=3$ 以上の $f_n(x)$ についても順次解いて行けるが，特に注目すべきことは，$n=3$ 以上の $f_n(x)$ を考えるときのペイオフ函数の具体的な形において，この場合は y および z に関する項が $f_2(x)$ について考えたときのものとまったく同一の形をとることであり，このことから，経営者にとっても市場にとっても最も合理的な strategy は $f_2(x)$ で考えたものと同一の形に確定してしまう．すなわち $n=2$ 以上の $f_n(x)$ を考えるとき n の大きさに関係なく

$$y=\frac{cz_m}{p+b+c-\alpha a}$$

が経営者の maximin strategy となる．

このようにして，いまの例では市場の mixed strategy を考慮しても前節に示した市場の strategy を pure strategy に限定した場合の解と同一になることが明らかとなった．その他にも，以上に示した通りこの特定のモデルには興味深い性質がいろいろ見られるが，つぎにこれら

の点に関して，やや一般的に考察してみることとする．

4. 若干の一般化

まず，$f_1(x) = Val\,P(x, y, z)$ という 1 stage の場合を考える．

一般に在庫問題は需要量に対する在庫量のタイミングのゲームである．したがって，需要量に等しい在庫量を保有する場合が最も有利で，過大在庫量，過少在庫量でも不利はまぬがれえない．

したがって，いかなる x, y, z に対しても，1期の利潤函数 $P(x, y, z)$ が y の凹函数になるという場合がかなりあると考えられる．しかし，単に y の凹函数というだけでなくて，考察の対象となるいかなる $x, z,$ に対しても利潤函数 $P(x, y, z)$ が y の厳密な凹函数であれば，あえて確率化された発註政策を考える必要はなく，$\underset{y}{\mathrm{Max}}\ \underset{z}{\mathrm{Min}}\ P(x, y, z)$ を解けばよいということができよう．このことは零和2人ゲーム（特に無限ゲーム，すなわち連続ゲーム）において minimizing player のコントロールする変数のいかなる値に対してもペイオフ函数が maximizing player のコントロールする変数の厳密な凹函数なるときに maximin strategy は pure strategy の中に存在するという定理から導かれる結論である[(1)(2)]．

しかし，$P(x, y, z)$ が必ずしもこの条件を満たすとは限らない．事実，前述において取扱った例における $P(x, y, z)$ は，y の厳密な凹函数ではない．しかしながら，「厳密な」凹函数ではないまでも凸函数になる部分がないならば，（すなわち直線的な部分があっても）ほぼこれに準ずる場合がある．

ただしその場合，maximin strategy が唯一ではなくなる可能性があるということはいえる．前節までにおいて取扱った例においても，前節で求めた y の最適値のほかに，それと同等に良い mixed strategy が存在する．ただ，経営上の観点からいって，確率化された発註政策を考えなくとも足りる場合は，確率化されない発註政策を採用するべきであろう．

つぎに，これらの考察にもとづいて経営者は $\underset{y}{\mathrm{Max}}\ \underset{z}{\mathrm{Min}}\ P(x, y, z)$ を考えれば足りるということになったとして，

$$P(x, y, z) = \begin{cases} P_A(x, y, z) & (y \geqq z \quad \text{のとき}) \\ P_B(x, y, z) & (y \leqq z \quad \text{のとき}) \end{cases}$$

とすると，きわめて一般の場合に

$$\underset{z}{\mathrm{Min}}\ P_A(x, y, z) = P_A(x, y, 0)$$

$$\underset{z}{\mathrm{Min}}\ P_B(x, y, z) = P_B(x, y, z_m)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} P_A(x, y, z) < 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} P_B(x, y, z_m) > 0$$

となることが考えられ $\underset{y}{\mathrm{Max}}\ \underset{z}{\mathrm{Min}}\ P(x, y, z)$ を解くことは

$$P_A(x, y, 0) = P_B(x, y, z_m)$$

を解くことに帰着する．このことは最適発註量を迅速に判断する一つの規準として有益であろうと思われるが，さらにこの場合において $P_A(x, y, 0)$ および $P_B(x, y, z_m)$ の中の x に関する項がまったく同一であるようなケースには上記の等式において，それが相殺されるので，最適な starting stock が initial stock から独立になる．

つぎに，動態的な場合に移る．$f_n(x)$ の中の定数項 C_n を除いた函数を $F_n(x)$ とする．すなわち $f_n(x) = F_n(x) + C_n$ とする．（ここに $n = 1, 2 \cdots\cdots$）．

$$f_{n+1}(x) = Val\{P(x, y, z) + \alpha\phi_n(y - z)\}$$

$$\text{ただし}\quad \phi_n(\xi) = \begin{cases} f_n(\xi) & (\xi \geqq 0 \text{ のとき}) \\ f_n(0) & (\xi \leqq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

はつぎのように書き直せる．

$$f_{n+1}(x)\ Val[P(x, y, z) + \alpha F_n\{\mathrm{Max}(y - z, 0)\}] + \alpha C_n$$

さらに $P(x, y, z) + \alpha F_n\{\mathrm{Max}\ (y - z, 0)\} = \Gamma_{n+1}(x, y, z)$

とすると

$$f_{n1+}(x) = Val\,\Gamma_{n+1}(x, y, z) + \alpha C_n$$

この Γ_{n+1} について，いま静態的な場合について吟味した $P(x, y, z)$ のような性質があれば，当然それに準ずる．さらに，Γ_n と Γ_{n+1} とがまったく同一の形になれば，$f_n(x)$ を考えたときの経営者および市場の最適 strategy と $f_{n+1}(x)$ を考えたときのそれとが同一になることもいうまでもない．（ただ $f_n(x)$, $f_{n+1}(x)$ の値のみは異なる）．また特に

$$P(x, y, z) = K(x) + M(y, z)$$

という形をとる特別な場合には，最適の strategy は $n = 2$ 以上の $f_n(x)$ を考えるとき一定となり，かつ，いかなる n においても最適 starting stock が initial stock から独立になることが容易に明らかとなる．

なお，本論文では具体例としては，仕入価格で返品が可能で，しかも発註のさい発註量に無関係な経費というようなものの存在しないという，ごく特別なケースによったのであるが，そうでない場合の基本的な計算法を若干付言する．

経営者の strategy としては pure strategy のみを考えてよいとすれば，まず，返品不能のときは，$y = x$ のままでの security level $s(x)$ を考える．ここで

$$x < x^* \text{ なら } \frac{d}{dx}s(x) > 0$$

$$x > x^* \text{ なら } \frac{d}{dx}s(x) < 0$$

$$\mathrm{Max}\ s(x) = s(x^*)$$

なる x^* の存在を仮定してもあまり一般性を失わないであろう．

仕入量 η に対し，仕入費用が $r(\eta)$ であるとすれば，initial stock x に対する真の security level $S(x)$ は

$$S(x)=\begin{cases} s(x) & (x \geqq x^* \text{ のとき}) \\ \underset{y \geqq x}{\mathrm{Max}}\,[s(y)-r(y-x)] & (x < x^* \text{ のとき}) \end{cases}$$

発註量は $\underset{y \geqq x}{\mathrm{Max}}\,[s(y)-r(y-x)]$ によって判断する．

同様にして，返品（または処分）が可能であるが，その量 ζ に対して損失 $u(\zeta)$ がかかるときは，initial stock x にもとづく真の security level $S(x)$ は

$$S(x)=\begin{cases} \underset{y \leqq x}{\mathrm{Max}}\,[s(y)-u(x-y)] & (x > x^* \text{ のとき}) \\ s(x) & (x = x^* \text{ のとき}) \\ \underset{y \geqq x}{\mathrm{Max}}\,[s(y)-r(y-x)] & (x < x^* \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって判断すればよいと考えられる．

参 考 文 献

1. Bohnenblust, H. F., S. Karlin, and L. S. Shapley, "Games with Continuous, Convex Payoff", *Contributions to the Theory of Games* (Vol. I), Princeton University Press, 1950.
2. Mckinsey, J, C, C, *Introduction to the Theory of Games*, Mc-Graw-Hill Book Co., 1952.
3. Dvoretzky, A., J. Kiefer and J. Walfowitz, "The Inventory Problem" (I)(II), *Econometrica*, 1952.
4. Karlin, S., "Reduction of Certain Classes of Games to Integral Equaton", *Contributions to the Theory of Games* (Vol, II), Princeton University Press, 1953.
5. Bellman, R., *An Introduction to the Theory of Dynamic Programming*, The RAND Corporation, 1953.
6. Belllman, R., *Dynamic Programming*, Princeton University Press, 1957.
7. Arrow, K. J. S. Karlin and H. Scarf, *A Study in the Mathematical Theory of Inventories and Production*, Stanford University Press, 1958
8. 春日井博および加瀬谷忠美「在庫量問題を例とした不確定モデル考察」経営科学，Vol, 2, No. 2, 1958.