輸送問題および割当問題の新しい解き方

伊　理　正　夫*

1. 輸送問題と割当問題

オペレーションズ・リサーチの重要な分野をなしている輸送型の問題というのは，

a) 定数 a_i, b_j, d_{ij},(皆$\geqq 0$; $i=1, \cdots, m$; $j=1, \cdots, n$)が与えられたとき，

b)

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i=1, \cdots, m), \\ &\sum_{i=1}^{m} xij = b_j \quad (j=1, \cdots, n), \\ &x_{ij} \geqq 0 \quad (i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, n) \end{aligned}\right\} \tag{1. 1}$$

という条件をみたす $n \times m$ 個の変数 x_{ij} の組で，

c)

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} = z \tag{1. 2}$$

を最小にするようなものを求めること，

という形で定式化されている．なお，(1・1)式より a_i, b_j は次の式をみたしていなければならないことになる．

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \left(= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \right). \tag{1. 1'}$$

具体的には，ある一つの物資に関して，a_i が m 個の生産地の中の第 i 番目のところの生産量，b_j が n 個の消費地の中の第 j 番目のところの消費量，d_{ij} が第 i 番目の生産地から第 j 番目の消費地にその物資の単位量を輸送するのに要する費用，x_{ij} が第 i 番目の生産地から第 j 番目の消費地へ輸送されるその物資の量とすれば，上の問題は，各生産地からは全生産量を運び出し，各消費地にはその全消費量を運び込むという輸送のし方の中で，輸送費の最も少いものはいかなる運び方であるか，というようになる．

この輸送型の問題については，どのオペレーションズ・リサーチの教科書にも説明されているが，これの解法としては，今までのところ，もっぱら“跳び石づたい法(stepping-stone method)”といわれるところの(改訂)シンプレックス法を輸送型の場合に直訳した方法がとられてきた[1)2)]．

“跳び石づたい法”は最初の実行可能解をどのように選ぶかによって最適解に到達するまでの手数が非常に異なるので，それの選び方がいろいろと工夫され，Houthakker 法などの相当効率のよい選び方が普及している．しかし，最初の実行可能解を改良しながら最適解に近ずいて行

* 東京大学工学部所属．昭和35年4月現在九州大学工学部．

くときにも，相当多くの手間を要するし，またその近ずき方にも種々の任意性があって，どれを選ぶかによって必要な手数にかなりの差が生ずる．更に悪いことには，問題に退化がおこる場合には，摂動法によってそれを避けなければならないことがおこる．そのために，同じ輸送型に属しはするがひどく退化している割当問題にこの方法を適用することはほとんど不可能に近い．

割当問題は，輸送型の問題で $n=m$ とし，すべての i, j に対して $a_i=b_j=1$ とおいたものとみなせる．実は変数 x_{ij} のとれる値は0か1のどちらかに限られるのであるが，この制限は，問題を跳び石づたい法などで，もし解いたとしたら自動的に満足されてしまうし，またこれを満足しない解から満足する解を求めることも容易である．一般に大きさ n の割当問題の基本解の中で0にならない変数の数は n 個でありこれは退化のない場合の数 $2n-1$ 個に比して遙かに小さく，退化の激しいことを示している．そこで，跳び石づたい法を適用することがほとんど不可能なため，H. W.Kuhn などによって考案された“ハンガリア法”という方法が割当問題を解くのに現在よく使われている．(この辺の事情については C. W. Churchmann 等の教科書[1] の第12章参照.) この方法は非常に巧妙ではあるが途中に人間の直観に頼った方が早い点がかなり多く，また費用行列 (d_{ij}) の書きかえを頻繁に行わなければならず，最適解への収束もそれ程速いとはいえない．

2. 新解法の背景

ハンガリア法が跳び石づたい法よりも種々の利点を割当問題に関してはもっているところから，ハンガリア法を輸送型問題全般に対しても使えるように一般化できるのではないかという着想にもとづいて，アメリカの RAND Corporation の L. R. Ford や D. R. Fulkerson 等によって新しい解法(彼等自身により“primal-dual algorithm”と呼ばれている)が考案された[3)4)]．この方法は $x_{ij} \leqq c_{ij}$ という容量制限のある場合にも使用できるものであるが，更に T. Fujisawa により極く一般的な接続をもった輸送路よりなる輸送回路の問題にも適用可能なように拡張された[5)]．(この種の拡張は Ford-Fulkerson 自身によってもなされた[6)7)]．なお，文献[8)] の第 12 章をも参照.) その起源よりして当然といえば当然のことながら，これらの方法を割当問題に適用した場合には，ハンガリア法を適用した場合とまったく同じ経過をたどって解に到達することになる．(但し，直観に頼らなくてもよいようにはなっている.)

著者は，現存のあらゆる種類の回路理論を含み，かつまた考えうる最も一般的な回路問題を扱うための一般理論を一般代数系理論と位相幾何学の援けをかりて建設しようとして研究を続けているが[9)10)]，その際，単位流量当りの費用と最大流量の制限(容量)という二つの性格を与えられている輸送路が任意の形に接続されて出来ている輸送回路上で，いろいろな型の線型計画的問題をとり扱うのに便利な方法を得た．この方法は，線型計画法の立場からだけみると，上記の Ford-Fulkerson-Fujisawa の方法の双対変数の定め方を改良したものと見なせるが，そもそもが位相幾何学的観点より出発しているものであるため，その他のいろいろの利点が附随しており，

また今後の検討によって更に便利な形に改良しうるのではないかと思われる.(たとえば，この方法を割当問題に適用した場合には,ハンガリア法よりずっと簡単な解法が得られる.第5節参照.)

この新解法を一般的な形で理論的裏づけと共に述べることは，紙面の関係から到底不可能であるので，ここではそれを特殊な場合，すなわち(1. 1)，(1. 2)で定義される輸送型の問題(Hitchcock 問題と呼ばれる)に限って，その計算方法だけを実用的見地より説明してみたい.

3. 計　　算　　法

3. 1. 手順の概略　シンプレックス法または跳び石づたい法では，まず(1. 1)を満足する変数の組から出発して，(1. 2)の z を段々と小さくして行くのであったが，この方法では，すべての $x_{ij}=0$ から出発して段々と x_{ij} を大きくして行き，最後に(1. 1)を満足させるようにする点，Houthakker 法などで(1. 1)を満足する解を見出すときの手順(一般的にいえばシンプレックス法で Phase I と呼ばれる部分)に似ている．但し，x_{ij} の大きくし方を工夫して，計算途中で得られる変数 x_{ij} の組が，(1. 1) の a_i, b_j のかわりにそれぞれ，

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=a'_i,\quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij}=b'_j \tag{3. 1}$$

をもつところの問題に対する最適解で常にあるようにしているので，x_{ij} を大きくして行って(1. 1)を満足するようになった時には，すでにその x_{ij} の組が与えられた問題に対する最適解になっているのである.

そのように x_{ij} を増して行くために，二種類の手順 $<V>$ と $<C>$ とを交互に繰り返して用いる.

$<V>$ では補助に用いる双対変数をその時の x_{ij} の値を考慮しつつ決定し，

$<C>$ ではその時の双対変数の値の指示するところに従って x_{ij} を増加させて行く.

3. 2. タブローの書き方　(1. 1)，(1. 2)で定義された問題は，まず，(3. 2)のような形の表で与えられる.

a_i \ b_j	b_1	b_2	----------	b_n
a_1	d_{11}	d_{12}	----------	d_{1n}
a_2	d_{21}	d_{22}	----------	d_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
a_m	d_{m1}	d_{m2}	----------	d_{mn}

← 各消費地の消費量

↑ 各生産地の生産量　　↑ 生産地より消費地への輸送費(単位量当り)

(3. 2)

この形のタブローから出発するのであるが,計算途中のタブローの形は一般に(3.3)のようになる.

	β_j	β_1	β_2	----------	β_n
α_i	$\overline{a}_1$ \ $\overline{b}_j$	$\overline{b}_1$	$\overline{b}_2$	----------	$\overline{b}_n$
α_1	$\overline{a}_1$	d_{11}/x_{11}	d_{11}/x_{11}	----------	d_{1n}/x_{1n}
α_2	$\overline{a}_2$	d_{21}/x_{21}	d_{22}/x_{22}	----------	d_{2n}/x_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
α_m	$\overline{a}_m$	d_{m1}/x_{m1}	d_{m2}/x_{m2}	----------	d_{mn}/x_{mn}
u	Δs				

(3. 3)

ここで

$$\left.\begin{aligned}
&x_{ij} = \text{その時の変数の値}\quad(\text{これらは}\ <C>\ \text{の段階で変えられる}),\\
&\overline{a_i} = a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\quad(\text{生産地での余剰}),\\
&\overline{b_j} = b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\quad(\text{消費地での不足}),\\
&\alpha_i,\ \beta_j = \text{補助に用いる双対変数}\quad(u,\ \Delta s\ \text{については後に説明する})
\end{aligned}\right\}\qquad(3.\ 4)$$

であるが，それぞれの定め方は以下に説明される．なお簡単のため

$d_{ij}/0$ のとき　(すなわち $x_{ij}=0$ に対しては)

$/0$ を省いて d_{ij} とだけ記すことにする．

すべての $x_{ij}=0$ の状態から出発するから，計算の始めには $\overline{a_i}=a_i$, $\overline{b_j}=b_j$ であり，(3. 3) の主な部分は(3. 1)と完全に一致する．

3. 3. <V> という手順　3. 1 節で述べたように，問題を解くために我々は二種類の手順 <V> と <C> とを交互に繰り返して用いるわけであるが，第 l 番目の <V>(これを $<V_l>$ とかく)は第 l—1 番目の <C>(すなわ $<C_{l-1}>$)ちが終った後に用いる．<V> で行うことは

(i)　双対変数 α_i, β_j と u との決定；

(ii)　○をつける作業；

の二つである．

(i)　双対変数 α_i, β_j と v との決定：——一つ前の <C> で定められた $\overline{a_i}$, $\overline{b_j}$, x_{ij} などはそのままとして，まず

$$\mathring{\beta}_j = \begin{cases} 0 & (\overline{b_j} > 0\ \text{なる}\ j\ \text{に対して}) \\ \infty & (\overline{b_j} = 0\ \text{なる}\ j\ \text{に対して}) \end{cases}\qquad(3.\ 5)$$

とおく．そして公式(3. 6)により $\overset{1}{\alpha}_i$, $\overset{2}{\beta}_j$, $\overset{3}{\alpha}_i$, $\overset{4}{\beta}_j$, …を逐次計算する．

$$\left.\begin{array}{l}\overset{2k+1}{\alpha_i} = \min\limits_{j=1,\cdots,n}(d_{ij}+\overset{2k}{\beta_j}) \quad (i=1,\cdots,m),\\ \overset{2k+2}{\beta_j} = \overset{2k}{\beta_j} \text{ と } \min\limits_{i=1,\cdots,m}(\overset{2k+1}{\alpha_i}+d'_{ij}) \text{の小さい方} \quad (j=1,\cdots,n),\\ \text{ここに，} d'_{ij} = \begin{cases}\infty & (x_{ij}=0 \text{ のとき}),\\ -d_{ij} & (x_{ij}>0 \text{ のとき}).\end{cases}\end{array}\right\} \tag{3. 6}$$

これは忽ち(高々 $n+m$ 回の反復で)収束してしまう．すなわち，ある k らさきは $\overset{2k+1}{\alpha_i} = \overset{\infty}{\alpha_i}$, $\overset{2k}{\beta_j} = \overset{\infty}{\beta_j}$ となってしまう．そこで

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_i = \overset{\infty}{\alpha_i},\\ \beta_j = \overset{\infty}{\beta_j},\\ u = \min\limits_{i:\overline{a_i}>0}(\alpha_i)\end{array}\right\} \tag{3. 7}$$

とおけばよい．(3. 6)で用いる $\min(z_{ij}+y_j)$ という形の算法は，$\min\limits_j$ という記号を $\sum$ で，$+$ $\times$ をでおきかえると，丁度ベクトルと行列との掛算のときの算法と同じになることが分る．含まれている演算が $+$ と min であるから，この計算は著しく簡単に実行できる．

(ii) ○をつける作業：——(i)で定めた α_i, β_j, u に関して，

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_i = u \text{ となるような } i \text{ に対する } \overline{a_i},\\ \beta_j = 0 \text{ となるような } j \text{ に対する } \overline{b_j} \quad (\text{これは } 0 \text{ でない } \overline{b_j} \text{ といっても同じ}),\\ d_{ij} = \alpha_i - \beta_j \text{ となるような } d_{ij} \text{ または } d_{ij}/x_{ij}\end{array}\right\} \tag{3. 8}$$

に皆○をつける．この作業は，手順を分り易くするためにここで，説明するので実際にはすべての i, j について(3. 8)に従って○をつけるべきか否かを調べるよりも，この作業を省いてしまって，必要に応じて，ある $\overline{a_i}$, $\overline{b_j}$, d_{ij} などに○がつけられる筈であったかどうかを(3. 8)に従って調べた方が簡単なことが多い．また，

$x_{ij} > 0$, すなわち d_{ij}/x_{ij} という形をしたところには必ず○がつく

という規則も覚えていると便利である．

(i)と(ii)が終ったら，次は $<C>$ に移る．

3. 4. $<C>$ という手順 $<V_l>$(第 l 番目の $<V>$)が終ったら，次に $<C_l>$(第 l 番目の $<C>$)を始める．$<C>$でやることは，○のついた $\overline{a_i}$, $\overline{b_j}$, x_{ij} を(3. 4)を満足させつつ適当に変化させて，$\sum\overline{a_i} = \sum\overline{b_j}$ をできるだけ減少させることである．具体的にいえば，

(i) ○のついた $\overline{a_i}$ より水平に出発して

a) ○のついた d_{ij} の所では水平から垂直に曲ることができる；

b) (○のついた) d_{ij}/x_{ij} $(x_{ij}>0)$ の所では垂直から水平にも水平から垂直にも曲ることができる；

という規則に従って，次々とたどって，行って遂には○のついたに $\overline{b_j}$ 達する道を探す．

(ii) (i)で求められた道に沿って，同じ大きさの数を一番に，出発点の $\overline{a_i}$ と到着点の $\overline{b_j}$ と

垂直から水平に曲った点の x_{ij} から引き，水平から垂直に曲った点の x_{ij} へは加える．この加減はできるだけたくさんする．その大きさは，出発点の $\overline{a_i}$ と到着点の $\overline{b_j}$ と垂直から水平に曲った点の x_{ij} の中で最も小さいものに等しい．$\overline{a_i}$, $\overline{b_j}$ の中で0になったものがあったら，それについている○は取り除く．このような変更をうけた $\overline{a_i}$, $\overline{b_j}$, x_{ij} について，再び(i)に従って道探しをする．

(iii) ○のついた $\overline{a_i}$, $\overline{b_j}$ がなくなったり，また(i)でもう道がないことが分ったりしたら，$\sum\overline{a_i}=\sum\overline{b_j}$ の減少分を Δs とおいて次の $<V>$ に移る．(なお次節参照.)

$<V>$ に引き続いて行われる $<C>$ では上のような道は少くとも一本存在する．道の探し方はいろいろな方法が考えられるが，一般的に迷路問題のつもりで探しても実際に迷うことはほとんどない．水平から垂直に曲るときには $x_{ij}=0$(すなわち $/x_{ij}$ のない所)で○のついた所があれば，まずそこで曲るようにした方が手数が省ける．

3. 5. 計算の開始と終了 計算は $<V_1>$ から始めるわけであるが，そのためには最初

$$\left.\begin{aligned}&\overline{a_i}=a_i \quad (i=1,\cdots,m),\\&\overline{b_j}=b_j \quad (j=1,\cdots,n),\\&x_{ij}=0 \quad (i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)\end{aligned}\right\} \tag{3. 9}$$

とおいておけばよい．

それにつづく反復途上で注意すべきことは，$<C_l>$ での Δs (これを $\underset{l}{\Delta s}$ と記すことにする)は常に正であり，$<V_l>$ での u(これを $\underset{l}{u}$ と記すことにする)は l の増大と共に単調に増大して行く，ということである．(どの特定の α_i または β_j も $<V_l>$ の l が増すにつれて単調非減少である.)

また $<C_l>$ で○のついた $\overline{a_i}$ から○のついた $\overline{b_j}$ への道が二本以上あるかも知れないが，そのすべてを尽すのは面倒だという事態が起ったら(最初の一本は容易に求まる)$<C_l>$ を完全に遂行せずに，道を一本だけ探してそれに沿って $\overline{a_i}$, x_{ij}, $\overline{b_j}$ を加減しただけで，直ちに $<V_{l+1}>$ に移ってもよい．そのとき，もし $<C_l>$ の遂行が不完全であったら，次の $<V_{l+1}>$ での $\underset{l+1}{u}$ が $\underset{l}{u}$ に等しく得られるだけで，それから先に何らの悪影響も残さない．$\underset{l+1}{u}>\underset{l}{u}$ なら $<C_l>$ が完全に遂行されていたことになる．

計算の終了したことは，ある $<C>$ において，

$$\left.\begin{aligned}&\overline{a_1}=\overline{a_2}=\cdots=\overline{a_m}=0,\\&\overline{b_1}=\overline{b_2}=\cdots=\overline{b_n}=0\end{aligned}\right\} \tag{3. 10}$$

となったことによって示される．こうなったときの x_{ij} の組が最適解を与える．その時の z(最小値)は，もちろん，このようにして得られた x_{ij} から定義式 (1. 2) によって計算してもよいわけだが，もっと簡単には，

$$z=\sum_l \underset{l}{u}\underset{l}{\Delta s} \tag{3. 11}$$

によって求まる．また明らかに

$$\sum_{l} \underset{l}{\Delta s} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{3. 12}$$

である．

この方法によると，必要な繰り返しの数は(各 $<C>$ を完全に遂行する限り)問題が定まれば定ってしまう．つまり，何番目の $<C>$ で解に到達するかは，誰が何時やっても同じである．更には，$\underset{l}{u}$ と $\underset{l}{\Delta s}$ も問題について一意的に定っているのである．この点，跳び石づたい法などのシンプレックス法とは本質的な差がある．

4. 例　　題

4. 1. 例題 1. 前節で述べた計算法を具体的な例によってもう一度説明しよう．今，(4. 1)により与えられた問題を解いてみよう．

a_i \ b_j	8	9	10
12	1	3	4
15	2	6	8

$\uparrow$ d_{ij}

$$\begin{pmatrix} i=1,\ 2, \\ j=1,\ 2,\ 3, \end{pmatrix} \tag{4. 1}$$

(4. 1)の問題をこのまま解いても構わないが，「各行・各列の d_{ij} から，それぞれ一定の数を同時に差し引いて得られる数値を新しい d_{ij} としてもつ問題の最適解は，もとの問題の最適解と一致する」という，よく知られた定理を使って，できるだけ多くの減算をした後の問題を解く方が，この解法を手計算がやる場合には有利なので，そうしてみる．

まず，第1列の d_{ij} の最小値1を第1列のすべての d_{ij} より引き，第2列からは3を，第3列からは4を引く．すると，第1行の d_{ij} が皆0となるが，第2行からは更に1を引くことができる．このようにして，“変形された問題”(4. 2)が得られる．

a_i \ b_j	8	9	10	引いた数
12	0	0	0	0
15	0	2	3	1
引いた数	1	3	4	

(4. 2)

この問題の最適解は同時に(4. 1)の最適解であるが，それに対応する総費用 z は，変形された問題に対する方がもとの問題に対するものより

$$\begin{aligned} \Delta z &= \sum_{i=1}^{m} (\text{第}\,i\,\text{行から引いた数}) \times a_i + \sum_{j=1}^{n} (\text{第}\,j\,\text{行から引いた数}) \times b_j \\ &= (0\times12+1\times5) + (1\times8+3\times9+4\times10) = 90 \end{aligned} \tag{4. 3}$$

だけ少く出てくることも容易にわかる．

それでは(4. 2)を解こう．まず $<V_1>$ より始める．

<V_1>　$\overline{a_i}=a_i$, $\overline{b_j}=b_j$ が皆正であるから，(3. 5) により

$$\overset{0}{\beta}_1=\overset{0}{\beta}_2=\overset{0}{\beta}_3=0$$

となる．(3. 6)の第一式より

$$\overset{1}{\alpha}_1=0,\qquad \overset{1}{\alpha}_2=0$$

が直ちに知られる．今すべての i, j に対して $x_{ij}=0$ であるから(3. 6)の d'_{ij} は皆 ∞ であり (3. 6)の第二式より

$$\overset{2}{\beta}_1=\overset{2}{\beta}_2=\overset{2}{\beta}_3=0$$

が求まる．$\overset{2}{\beta}_j=\overset{0}{\beta}_j\,(j=1, 2, 3)$ であるから，(3. 6)式による反復はこれで収束したことになり，(3. 7)により

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\beta_1=\beta_2=\beta_3=u=0$$

が得られる．(3. 8)によって○は $\overline{a_i}$, $\overline{b_j}$ のすべてと，0なる d_{ij} すべてとにつけられる．このようにして，(4. 4)のタブローを得る．

	β_j	0	0	0
α_i	$\overline{a_i}$ \ $\overline{b_j}$	8	9	10
0	12	0	0	0
0	15	0	2	3
0	(8)			

(4. 4)

(点線と(8)については<C_1>参照)

<C_1>　(4. 4)のタブローの上で 3. 4 節に示された規則に従って x_{ij}, $\overline{a_i}$, $\overline{b_j}$ の加減をする．左上の隅から調べ始めて，右に，次いで下に進もう．○のついた $\overline{a_1}=12$ から水平に右へ出発するとすぐ○のついた $d_{11}=0$ にぶつかる；その上の $\overline{b_1}=8$ に○がついているからそこで上に曲る；これで，$\overline{a_1}=12\longrightarrow x_{11}=0(d_{11}=0$ の所$)\longrightarrow\overline{b_1}=8$ なる，(4. 4)に点線で示された，道が得られたから $\min(\overline{a_1}=12, \overline{b_1}=8)=8$ を $\overline{a_1}$ と $\overline{b_1}$ から引き x_{11} に加える(この加減量を(4. 4)の左下に(8)で示した)；その結果タブローは(4. 5)のようになる．

$\overline{a_i}$ \ $\overline{b_j}$	0	9	10
4	0/8	0	0
15	0	2	3
(4)			

(4. 5)

$\overline{a_1}=4$ にはまだ○がついているから，そこから右に出発する；最初にぶっかる○には /8 がつい

ているから，一応とばして他に / がなくて○のついている所があるかどうかを探して行くと，次の $d_{12}=0$ がみつかる；その上の $b_2=9$ に○がついているからそえで上に曲る；これでに点線で示した道とそれに沿って加減すべき量 4((4. 5)の左下に付記した)が定まる；その結果タブローは(4. 6)となる．

$\overline{a_i}$ \ $\overline{b_j}$	0	5	10
0	0/8	0/4	0
15	0	2	3
(8)			

(4. 6)

(4. 6)のタブローでは $\overline{a_1}$ はすでに0で従って○も除かれている；そこで○のついた $\overline{a_2}=15$ より右に向けて出発する；$d_{21}=0$ に○がついているからそこで上向きは曲る；$\overline{b_1}$ は0で○がないから，その列で○がついて / のある所を探すと $d_{11}/x_{11}=0/8$ がみつかる；そこで水平に曲って第1行を左から横に探して行くと，$d_{12}/x_{12}=0/4$ には○はついているが / があるから一応とばして，○のついている $d_{13}=0$ を見出す；そこで垂直に向きを変えて○のついた $\overline{b_3}=10$ に到着する((4. 6)の点線参照)；加減できる量は，出発点の $\overline{a_2}=15$, 到着点の $\overline{b_3}=10$ および途中で垂直から水平に曲った点の $x_{11}=8$ の中で最も小さいものの値，すなわち8である；その8を $\overline{a_2}$, x_{11}, $\overline{b_3}$ から引き，水平から垂直に曲った所の $x_{21}=0$, $x_{13}=0$ に加えて，(4. 7)のタブローを得る．

$\overline{a_i}$ \ $\overline{b_j}$	0	5	2
0	0	0/4	0/8
7	0/8	2	3

(4. 7)

(4. 7)では○のついた $\overline{a_i}$ は $\overline{a_2}=7$ だけであるから，そこから右に出発する；第2行では○のついた所は $d_{12}/x_{12}=0/8$ だけであるから，そこで上に曲る；$\overline{b_1}=0$ だから第1列で / のある所を(d_{12}/x_{12} は除いて)探すと，みつからない；そこでもうこれ以上道を求めることはできないことが分った．そこで $<C_1>$ が終了したことになる．$<C_1>$ を通じて $\sum x_{ij}$ の増加，すなわち $\sum \overline{a_i}=\sum \overline{b_j}$ の減少は $8+4+8=20$ である．以上の過程は(4. 4)のタブローの上で，同時に実行可能で，結局 $<V_1>$ と $<C_1>$ とまとめて(4. 8)のように書くことができる．

	β_j	0	0	0		
α_i	$\overline{a_i}$ \ $\overline{b_j}$	8	4 9	10 8	$(\overset{1}{\alpha}_i)$ =	$(\overset{3}{\alpha}_i)$ =
0	8 12 4	0	0	0	0	$(\overset{1}{\alpha}_i)$ = (α_i)
0	8 15	0	2	3	0	
0	20					

$$\begin{cases} (\overset{0}{\beta}_j) = [\ 0 \quad 0 \quad 0\ ] \\ (\overset{2}{\beta}_j) = (\overset{0}{\beta}_j) = (\beta_j) \end{cases} \qquad (4.\ 8)$$

$<V_2\ \&\ C_1>$ (4. 7) あるいは (4. 8) のタブローから始めて，$<V>$ と $<C>$ とを再び繰り返す．(4. 8) にならって表わすと (4. 9) のようになる．

	β_j	2	0	0		
α_i	$\overline{a_i}$ \ $\overline{b_j}$	0	5	2	$(\overset{1}{\alpha}_i)$ =	$(\overset{3}{\alpha}_i)$ =
0	0	0	0/4	0/8	0	$(\overset{1}{\alpha}_i)$ = (α_i)
2	5 7 2	0/8	2	3	2	
2	7					

$$\begin{aligned} (\overset{0}{\beta}_j) &= [\ \infty \quad 0 \quad 0\ ] \\ (\overset{2}{\beta}_j) &= [\ 2 \quad 0 \quad 0\ ] \\ (\overset{4}{\beta}_j) &= (\overset{2}{\beta}_j) = (\beta_j) \end{aligned} \qquad (4.\ 9)$$

α_i, β_j, u の決定と○のつけ方は 3. 3 節に述べたことで明らかであろう．$<C_2>$ としては，まず $\overline{a_2}=7$ より出発して右に行くと，第2行で○のついているのは $d_{22}=2$ だけであるから，そこで上に曲るより他ない；$\overline{b_2}=5$ だから，道 $\overline{a_2}\longrightarrow x_{22}\longrightarrow\overline{b_2}$ に沿って5だけ加減できる；すると $\overline{a_2}=2$ になってまだ○がついているから．再び $d_{22}/x_{22}=2/5$ (x_{22} はこのとき5に増加している；○がついている所は第2行ではここしかない) の所で上に曲る；今度は $\overline{b_2}=0$ だから○がついて / のある $d_{12}/x_{12}=0/4$ で水平に向きを変える；第1行には他に○のついているのは $d_{13}/x_{13}=0/8$ しかないから，そこで上に向きをかえると $\overline{b_3}=2$ に到達する；この $\overline{a_2}\longrightarrow x_{22}\longrightarrow x_{12}\longrightarrow x_{13}\longrightarrow\overline{b_3}$ に沿っては2まで加減できる；その結果 $\overline{a_2}=\overline{b_3}=0$ となり，結局 $\overline{a_i}$, $\overline{b_j}$ は皆0となってしまう．そこで計算は終了したことになる．$<C_2>$ が終了したとき，タブロー

の主な部分がどんな形になっているかは，(4. 9)より直ちに求まる((4. 10)).

0	0/2	0/10
0/8	2/7	3

(4. 10)

この / の下の数字だけに注目すれば(/ のない所は /0 を意味するものとして)求める x_{ij} の最適解が得られる．このときの，この問題に対する費用は公式(3. 11)により

$$0 \times 20 + 2 \times 7 = 14$$

であるが，もとの問題に対しては(4. 4)だけの補正をして

$$14 + 90 = 104$$

となる．

4. 2. 例題 2. 少し複雑な例題を扱ってみよう．与えられた問題を(4. 11)とする．第1行，第2行，第3行，第4行より，それぞれ 3, 5, 2, 5, を減じ，更に第3列，第5列より 1, 2 を減じると(4. 12)となる．

a_i \ b_j	3	3	6	2	1	2
3	5	3	7	3	8	5
4	5	6	12	5	7	11
2	2	8	3	4	8	2
8	9	6	10	5	10	9

(4. 11)

a_i \ b_j	3	3	6	2	1	2	
3	2	0	3	0	3	2	(−3)
4	0	1	6	0	0	6	(−5)
2	0	6	0	2	4	0	(−2)
8	4	1	4	0	3	4	(−5)
			(−1)		(−2)		

(4. 12)

この変形の総費用に対する影響は(4. 3)にならって計算すると，

$$(3 \times 3 + 5 \times 4 + 2 \times 2 + 5 \times 8) + (1 \times 6 + 2 \times 1) = 81 \qquad (4.\ 13)$$

の減となる．以下，前節にならって，各手順について必要な記号と数字をすべて書き並べてみる．但し，$<V>$ で○をつけることはせず，$<C>$ で道を探すときに，ある d_{ij} に○がついていた筈かどうかを(3. 8)によりためし乍ら進む．

$<V_1\ \&\ C_1>$ (4. 14)

	β_j	0	0	0	0	0	0	$\overset{1}{(\alpha_i)}$	$\overset{3}{(\alpha_i)}$
α_i	$\overline{a_i}$ \ $\overline{b_j}$	3	3	6	2	1	2	‖	‖
0	3	2	0	3	0	3	2	0	$\overset{1}{(\alpha_i)}$ ‖ (α_i)
0	3 / 1 4	0	1	6	0	0	6	0	
0	2	0	6	0	2	4	0	0	
0	2 8	4	1	4	0	3	4	0	
0	11								

$$(\overset{0}{\beta}_j) = [\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\ ]$$

$$(\overset{2}{\beta}_j) = (\overset{0}{\beta}_j) = (\beta_j)$$

ここで道は右下から探し始めた.

$<V_2\ \&\ C_2>$ (4. 15)

	β_j	3	2	0	3	3	0	$\overset{1}{(\alpha_i)}$	$\overset{3}{(\alpha_i)}$	$\overset{5}{(\alpha_i)}$	$\overset{7}{(\alpha_i)}$
α_i	$\overline{a_i}$ \ $\overline{b_j}$	0	0	6 2	0	0	0	‖	‖	‖	‖
2	0	2	0/3	3	0	3	2	3	2	2	$\overset{5}{(\alpha_i)}$ ‖ (α_i)
3	0	0/3	1	6	0	0/1	6	6	4	3	
0	0	0	6	0	2	4	0/2	0	0	0	
3	2 / 6	4	1	4	0/2	3	4	4	4	3	
3	2										

$$(\overset{0}{\beta}_j) = [\ \infty \quad \infty \quad 0 \quad \infty \quad \infty \quad \infty\ ]$$

$$(\overset{2}{\beta}_j) = [\ 6 \quad 3 \quad 0 \quad 4 \quad 6 \quad 0\ ]$$

$$(\overset{4}{\beta}_j) = [\ 4 \quad 2 \quad 0 \quad 4 \quad 4 \quad 0\ ]$$

$$(\overset{6}{\beta}_j) = [\ 3 \quad 2 \quad 0 \quad 3 \quad 3 \quad 0\ ]$$

$$(\overset{8}{\beta}_j) = (\overset{6}{\beta}_j) = (\beta_j)$$

$<V_3\ \&\ C_3>$

	β_j	4	3	0	4	4	1	$\overset{1}{(\alpha_i)}$	$\overset{3}{(\alpha_i)}$	$\overset{5}{(\alpha_i)}$
α_i	$\overline{a_i}$ \ $\overline{b_j}$	0	0	4	0	0	0	‖	‖	‖
3	0	2	0/1	3	0	3	2/2	3	3	$\overset{3}{(\alpha_i)}$
4	0	0/3	1	6	0	0/1	6	6	4	‖ (α_i)
0	0	0	6	0/2	2	4	0	0	0	
4	4	4	1/2	4	0/2	3	4	4	4	
4	4									

$$\overset{0}{(\beta_j)} = [\ \infty \quad \infty \quad 0 \quad \infty \quad \infty \quad \infty\ ]$$
$$\overset{2}{(\beta_j)} = [\ 6 \quad 3 \quad 0 \quad 4 \quad 6 \quad 1\ ]$$
$$\overset{4}{(\beta_j)} = [\ 4 \quad 3 \quad 0 \quad 4 \quad 4 \quad 1\ ]$$
$$\overset{6}{(\beta_j)} = \overset{4}{(\beta_j)} = (\beta_j)$$

(4. 16)

これで $\overline{a_i}$, $\overline{b_j}$ がすべて0になったから計算は終了したことになる．最適解は(4. 16)により (x_{43} を0から4に変更して)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{4. 17}$$

となり，そのときの総費用は(3. 11)に(4. 13)の補正をして

$$(0 \times 11 + 3 \times 2 + 4 \times 4) + 81 = 22 + 81 = 103$$

となる．

5. 割当問題への応用例

第1節で触れたように割当問題は「$x_{ij} = 0$ または 1」という条件の加った輸送問題とみなせるが，この附加条件を無視して今まで説明してきた方法を適用すると，附加条件は自動的に満足されてしまうことが分る．そこで Churchmann 等の教科書[1] に出ている 10×10 の割当問題を例として解いてみよう．その前に注意しておかねばならぬことは，新しい方法で解くとき，第3節で述べた一般規則の適用は割当問題に対しては極端に簡単になるということである．それは割当問題を解く計算の途上では，

- $\overline{a_i}$, $\overline{b_j}$ は常に0か1かのどちらかの値しかとらない；
- x_{ij} は0か1かのどちらかの値しかとらず，しかもどの行(および列)にも $x_{ij} = 1$ は高々1

個しかない；

○のついた $\overline{a_i}(=1)$ から○のついた $\overline{b_j}(=1)$ への道がみつかれば，それに沿って加減すべき量は常に1であり，その際，道に沿ってすべての1が0になり，すべて0の1がになる．

等々の性質があるからであるが，これらは自動的に行われる簡単化であるから，特に留意する必要はない．

(5. 1)が解こうとする問題である．

a_i \ b_j	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	4.1	4.1	7.9	8.3	2.6	8.7	7.1	9.9	2.2	9.4
1	4.6	6.1	4.5	0.9	4.8	6.4	8.8	6.2	0	0.2
1	9.7	3.6	5.3	0.9	7.6	2.7	3.5	7.9	4.0	7.0
1	2.0	6.5	2.3	5.7	7.4	1.6	2.4	9.7	5.0	1.9
1	2.1	1.4	5.0	5.2	1.7	4.7	2.8	6.7	6.3	0.5
1	1.7	7.8	3.0	0	1.5	1.0	8.0	6.8	3.0	9.1
1	9.1	5.3	0.3	6.4	6.6	3.9	9.8	1.6	2.4	8.1
1	4.9	1.7	7.7	5.7	7.9	4.0	9.5	0.8	4.8	2.0
1	2.9	8.8	1.8	5.9	6.6	6.2	8.8	0.7	0.3	2.6
1	8.4	7.4	0.6	2.6	6.0	7.7	3.7	9.9	0.2	7.9

(5. 1)

この問題に前と同様にして

$$\tilde{d}_{ij} = d_{ij} - \min_{i_1}(d_{i_1 j}) - \min_{j_1}\{d_{ij_1} - \min_{i_1}(d_{i_1 j_1})\} \qquad (5.\ 2)$$

という変形を施した後の問題を解こう．上の変形を受けると(5. 1)は(5. 3)のようになる．

a_i \ b_j	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1.3	1.6	6.5	7.2	0	6.6	3.6	8.1	1.1	8.1
1	2.9	4.7	4.2	0.9	3.3	5.4	6.4	5.5	0	0
1	7.1	1.3	4.1	0	5.2	0.9	0.2	6.3	3.1	5.9
1	0.3	5.1	2.0	5.7	5.9	0.6	0	9.0	5.0	1.7
1	0.4	0	4.7	5.2	0.2	3.7	0.4	6.0	6.3	0.3
1	0	6.4	2.7	0	0	0	5.6	6.1	3.0	8.9
1	7.4	3.9	0	6.4	5.1	2.9	7.4	0.9	2.4	7.9
1	3.1	0.2	7.3	5.6	6.3	2.9	7.0	0	4.7	1.7
1	1.2	7.4	1.5	5.9	5.1	5.2	6.4	0	0.3	2.4
1	6.5	5.8	0.1	2.4	4.3	6.5	1.1	9.0	0	7.5

(5. 3)

これを次のようにして計算して

$<V_1\ \&\ C_1>$

	β_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
α_i	$\bar{a}_i \backslash \bar{b}_j$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1.3	1.6	6.5	7.2	0	6.6	3.6	8.1	1.1	8.1
0	1	2.9	4.7	4.2	0.9	3.3	5.4	6.4	5.5	0	0
0	1	7.1	1.3	4.1	0	5.2	0.9	0.2	6.3	3.1	5.9
0	1	0.3	5.1	2.0	5.7	5.9	0.6	0	9.0	5.0	1.7
0	1	0.4	0	4.7	5.2	0.2	3.7	0.4	6.0	6.3	0.3
0	1	0	6.4	2.7	0	0	0	5.6	6.1	3.0	8.9
0	1	7.4	3.9	0	6.4	5.1	2.9	7.4	0.9	2.4	7.9
0	1	3.1	0.2	7.3	5.6	6.3	2.9	7.0	0	4.7	1.7
0	1	1.2	7.4	1.5	5.9	5.1	5.2	6.4	0	0.3	2.4
0	1	6.5	5.8	0.1	2.4	4.3	6.5	1.1	9.0	0	7.5
0	9										

(5. 4)

$<V_2\ \&\ C_2>$ (5. 5)

	β_j	0	0.4	1.5	0.5	1.3	0	0.3	0.6	1.4	1.4				
α_i	$\bar{a}_i \backslash \bar{b}_j$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	$\overset{1}{(\alpha_i)}$	$\overset{3}{(\alpha_i)}$	$\overset{5}{(\alpha_i)}$	$\overset{7}{(\alpha_i)}$
												$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$
1.3	0	1.3	1.6	6.5	7.2	0/1	6.6	3.6	8.1	1.1	8.1	6.6	1.3	1.3	1.3
1.4	0	2.9	4.7	4.2	0.9	3.3	5.4	6.4	5.5	0	0/1	5.4	1.8	1.7	1.4
0.5	0	7.1	1.3	4.1	0/1	5.2	0.9	0.2	6.3	3.1	5.9	0.9	0.8	0.5	0.5
0.3	0	0.3	5.1	2.0	5.7	5.9	0.6	0/1	9.0	5.0	1.7	0.6	0.3	0.3	0.3
0.4	0	0.4	0/1	4.7	5.2	0.2	3.7	0.4	6.0	6.3	0.3	3.7	0.4	0.4	0.4
0	0	0/1	6.4	2.7	0	0	0	5.6	6.1	3.0	8.9	0	0	0	0
1.5	0	7.4	3.9	0/1	6.4	5.1	2.9	7.4	0.9	2.4	7.9	2.9	2.9	2.9	1.5
0.6	0	3.1	0.2	7.3	5.6	6.3	2.9	7.0	0/1	4.7	1.7	2.9	2.9	0.6	0.6
0.6	1	1.2	7.4	1.5	5.9	5.1	5.2	6.4	0	0.3	2.4	5.2	1.2	1.2	0.6
1.4	0	6.5	5.8	0.1	2.4	4.3	6.5	1.1	9.0	0/1	7.5	6.5	1.7	1.4	1.4
															$\parallel$
															$\overset{10}{(\alpha_i)}$
															$\parallel$
															(α_i)

$$
\begin{aligned}
(\overset{0}{\beta}_j) &= [\ \infty\ \ \infty\ \ \infty\ \ \infty\ \ \infty\ \ 0\ \ \infty\ \ \infty\ \ \infty\ \ \infty\ ] \\
(\overset{2}{\beta}_j) &= [\ 0\ \ 3.7\ \ 2.9\ \ 0.9\ \ 6.6\ \ 0\ \ 0.6\ \ 2.9\ \ 6.5\ \ 5.4\ ] \\
(\overset{4}{\beta}_j) &= [\ 0\ \ 0.4\ \ 2.9\ \ 0.8\ \ 1.3\ \ 0\ \ 0.3\ \ 2.9\ \ 1.7\ \ 1.8\ ] \\
(\overset{6}{\beta}_j) &= [\ 0\ \ 0.4\ \ 2.9\ \ 0.5\ \ 1.3\ \ 0\ \ 0.3\ \ 0.6\ \ 1.4\ \ 1.7\ ] \\
(\overset{8}{\beta}_j) &= [\ 0\ \ 0.4\ \ 1.5\ \ 0.5\ \ 1.3\ \ 0\ \ 0.3\ \ 0.6\ \ 1.4\ \ 1.4\ ] = (\overset{10}{\beta}_j) = (\beta_j)
\end{aligned}
$$

(5. 6)の最適割当を得る.

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\qquad (5.\ 6)
$$

ところで同じ問題を従来の"ハンガリア法"で解くには，(5. 3)への変形後，その行列の0要素すべてを蔽いかつ最も少い数の線(縦線および横線)というのをひき，その線上にない要素の中で最小のものを探し，その値を線上にない要素から引いて線の交点上の要素に足して行列を変形し，こうして得られた行列の0要素すべてを蔽って最も少い数の線をひく，という操作を繰り返し，その線の最小数が行列の次数(今の場合 10)に等しくなるまで続けるのであるが，Churchmann 等の実例[1]においては，(5. 3)から出発して，この繰り返しを3回必要としている．新しい解法では，実質的には(5. 5)の計算一遍ですんでしまっている．

6. 文　献

1) Churchmann, C. W., Ackoff, R. A., and Arnoff, E. L., *Introduction to Operations Research*, John Wiley & Sons, New York, 1957.(邦訳：森口繁一監訳，オペレーションズ・リサーチ入門，紀伊國屋書店，東京，1958.（下巻))

2) Sasieni, M., Yaspan, A., and Friedman, L., *Operations Research——Methods and Problems*, John Wiley & Sons, New York, 1959.

3) Ford, L. R., Jr., and Fulkerson, D. R., "A Simple Algorithm for Finding Maximal Network Flows and an Application to the Hitchcock problem," *Canadian Journal of Mathematics*, **9**,(1957), pp. 210～218.

4) Ford, L. R., Jr., and Fulkerson, D. R., "A Primal-Dual Algorithm for the Capacitated Hitchcock Problem," *Naval Research Logistic Quarterly*, **4**, 1,(1957), pp. 49～54.

5) Fujisawa, T., "A Computational Method for the Transportation Problem on a Network," *J. Opns. Res. Soc. Japan*, **1**, 4,(1958), pp. 157～147.

6) Ford, L. R., Jr., and Fulkerson, D. R., "Constructing Maximal Dynamic Flows from Static Flows," *Operations Research*, **6**, 3,(1958) pp. 419～433.

7) Fulkerson, D. R., "Increasing the Capacity of a Network: The Parametric Budget Problem," *Management Science*, **5**, 4,(1959), pp. 472～483.

8) 国沢清典(編), リニヤ・プログラミング, 日刊工業新聞社, 東京, 1959.

9) Iri, M., "Algebraic and Topological Theory of the Problems of Transportation Networks with the Help of Electric Circuit Models," *RAAG Research Notes*, Ser. 3, 13, (1959).

10) Iri, M., *On the Basic Theory of General Information on Networks and its Applications*, 東京大学大学院数物系研究科提出学位論文, 1960.