文　献　抄　録

JACKSON, J. R.: NETWORKS OF WAITING LINES, *Jour. Oper. Res. Soc. Amer.*, 5, *No. 4, 1957, pp. 518～521*

たとえば百貨店のように，多くの売場があって，各売場には数人の店員がおり，客は店外から直接ある売場にもやってくるし，他の売場で用をすませてからその売場に来ることもあるというような，いわゆる network 上に service station がある場合の待ち合わせを考える．この network 上を，ある特定のパターンに従って客が流れる場合は，tandem とか series とか呼ばれる方式の待ち合わせ問題であるが，そうではなくて全くでたらめに流れる場合を論ずるわけである．こういう型の問題は，設計とか荷積とか scheduling とかに関して起るであろう．

外部からそのサービス系にはいってくる客はポアソン到着であり，各売場 (department) でのサービスは指数サービスとする．Burke (Oper. Res. Vol. 4, p. 699, 1956) が示したように，このときの output の流れは，やはりポアソンである．このことを基礎にして解析をする．仮定をもっとはっきり書くと，

1. 売場の数は M 個．第 m 売場には n_m 人の店員がいる．

2. 店外から第 m 売場に来る客は，平均到着率 λ_m のポアソン到着．

3. 第 m 売場のサービスは平均サービス率 μ_m の指数サービス．

4. 第 m 売場のサービスを受け終った客は確率 θ_{km} で，第 k 売場に行く．彼が第 m 売場でサービスを完全に受け終り店外に出て行くという確率は，従って，$1-\Sigma_k\theta_{km}$ である．

店内，店外を問わず，とにかく第 m 売場に到着する客の平均到着率 Γ_m は，平衡状態においては

$$\Gamma_m=\lambda_m+\Sigma_k\theta_{mk}\Gamma_k$$

であるが，これが普通の待ち合わせ理論における λ の役割を演ずる．

第 m 売場でサービス中の客と待っている客とを合わせた人数を k_m で表わすこととし，「サービス系の状態」をベクトル $(k_1, k_2,\cdots, k_M)$ で表わす．この k_m はもちろん時間の函数であるが，平衡状態においては定数になり，次の定理が成立つ．

定理．$P_k{}^m\,(m=1, 2,\cdots, M;\ k=0, 1, 2,\cdots)$ を

$$P_k{}^m=\begin{cases}P_o{}^m(\Gamma_m/\mu_m)^k/k\,! & (0\leqq k\leqq n_m)\\ P_o{}^m(\Gamma_m/\mu_m)^k/n_m\,!\,(n_m)^{k-n_m} & (k\geqq n_m)\end{cases}$$

で定義する．ただし $P_o{}^m$ は $\Sigma_k P_k{}^m=1$ となるように定める．そうすると，このサービス系の平衡状態の分布は $\Gamma_m<\mu_m n_m$ がすべての m について成立つときに得られ，

$$P(k_1, k_2,\cdots, k_M)=P_{k_1}{}^1P_{k_2}{}^2\cdots P_{k_M}{}^M$$

となる．

この結果は当然予想されるものではあろう．なお，原論文では百貨店を例にとらず，機械工場として話を進めていることを，一言お断りしておく．

(森村英典)

BARRER, D. Y.: QUEUING WITH IMPATIENT CUSTOMERS AND INDIFFERENT CLERKS, *Jour. Oper. Res. Soc. Amer.*, 5, *No. 5, 1957, pp. 644～649*

サービスを受けようとして窓口にやって来たとき，窓口が塞がっているために立ち去る場合がよくある．たとえば昼休みの時間に頭を刈ろうとして理髪店に来た客は，すぐ始められればよいが，もし椅子が全部塞がっていればあきらめて帰ってしまうであろう．もう少し一般な型としては，待つことは待つが，待つ時間が一定以上になれば帰るという場合がある．こういうことは腐敗しやすい食品の処理などの問題としても生じてくるし，軍事上の問題にも多い．途中で立ち去る客のある場合の queue の問題は P. Morse, T. Kawata, K. Udagawa and G. Nakamura などの研究があるが，これらは客の立ち去る確率を与えるというやり方であって，ある時間(τ_o に固定)以上はすべて帰るという discipline をとっている点が，この論文の特徴と云えよう．

もう1つの重要な仮定は，客が random 順位でサービスを受けるという点である．この discipline を採用することによって，時刻 t で queue の中にちょうど n 人の客がいるとき $t+h$ までに1人の客が立ち去る確率は，$C_n(\tau_o, t)h+o(h)$ という形に書けることが証明される．この性質に基づいて，普通の微分方程式系が作られる(もちろん，input, output はともに指数型として)．

この論文の目標は平衡状態における servival

rate(Q), すなわち, (立ち去った人数)/(到着した人数)を求めることであり, その explicit な表示も得られているし, 平衡状態における行列の長さの分布も $C_n(\tau_0, t)$ の $t\to\infty$ の極限値を用いて表現されている. しかし, Q の表示は相当複雑なので Monte Calro 法によって求めた数値をグラフに作っている(変数は τ_0 として). (森村英典)

BARRER, D. Y.: QUEUING WITH IMPATIENT CUSTOMERS AND ORDERED SERVICE, *Jour. Oper. Res. Soc. Amer.*, 5, *No. 5, 1957, pp. 650～656*

前論文に引続き, 基本的な考え方は同じであるが, 若干型の異なった問題を論ずる. 主な違いは, 第一には先着順サービスであり, 第二には立ち去り方の規定である. 第一の点については, 前論文の紹介の際触れたように, ランダム順位の方が取扱いが容易であるが, 先着順としても, ポアソン到着, 指数サービスであれば, 微分方程式系を立てることは可能である. 第二の点については, ここでは次の2つの型を考える.

第1モデル 待ち時間が τ_0 にならないうちにサービスを受け始めたならば, サービス時間と待ち時間の和が τ_0 を超えても超えなくても, とにかくサービスを受ける.

第2モデル 待ち時間とサービス時間との和が τ_0 を超えるならば, たとえサービス中でも, 中止して立ち去る.

更に, この論文では第1モデルについては窓口の数を s 個にしている($s\geqq 1$).

この論文での主な努力は, いまの場合に, 前論文での $C_n(\tau_0, t)$ に当たる量がどう表現されるかを調べることであって, 最終目標は, 前論文同様, 平衡状態における servival rate Q を求めることに向けられている.

Q の表示は, しかし, 前論文の場合よりもやや簡単になり, 特に第2モデルの場合には相当簡単な形で得られている. なお, 前論文では, 平衡状態における行列の長さの分布を求めたが, ここでは P_0 だけしか求めていない. また, 前論文のランダム順位の場合と比較するため $\lambda\tau_0$ に対する λ/μ の値を Q を parameter としてグラフに画いてある.

(森村英典)

WARE, THOMAS, M.: AN EXECUTIVE VIEWPOINT, *Jour. Oper. Res. Soc. Amer.*, 7 *No. 1. 1959*

これは, International Minerals and Chemical Corp. の会長である Ware が昼食会で行なった講演である. 彼はまず自分が OR に理解を持っていることを強調したのち, 経営幹部の立場からの OR に対する見方をのべる.

まず OR の効用について. 本来特定の分野については素人である OR マンが, 長年の経験のある人々よりも, 問題をよりよく解くことができるというのはなぜであるか? しかも実際に OR マンは組織の内部のものであるよりは, 外部のものである方がよい. それはなぜか.

第一によい OR マンというものは複雑な問題に直面した幹部に対して, 特定の分野の知識によって彼を助けるよりはむしろ科学的な態度, 論理的な思考, 専門家として懐疑的な態度をとるようにさせるのである.

第二にすべての組織は社会的な体制であるから, いろいろな慣習や, 勢力関係やが存在し, 内部の人はそれにとらわれていることが多い. 外部の OR マンはこのような因習を破ることができる. また彼は組織の中に入り込んでいないので, その意見は客観的なものとして信用される. また外部の OR マンを入れることは社会学上での文明の混交により生ずるとされている刺激と同じような刺激を与える.

次にそれでは OR が有用なものであるにかかわらずもっと発展しなかったのはなぜか.

第一にそれはいまだに多くの実業家にとっては新しく珍奇なものと考えられているためである. OR の何であるかが知られていないことについては, OR 専門家に大きな責任がある.

第二にそれは経費がかかるものと思われているためである. その経費は経常費として, 従って, それ自体でペイするものでなければならないものとして扱われているが, それは研究開発の費用と同じく投資として扱われねばならない.

第三にそして重大なことは, これまでの OR の仕事の多くがよくない仕事であったことである. OR の仕事の出発点は特定のテクニックではなく, 問題でなければならない. OR 専門家の中には自分の仕事を programming, inventory, queuing 等の問題に関することだけだと思っている人がいる. また他の人々は問題が整理された形で提出されることを要求する. その結果多くの OR の人々は間違った問

題，実際の決定とは無関係な問題を解いているように思われる．

よいORマンはその組織の人々とよく協力し，自分が純粋な科学者でもなく，また決定を下す当事者でもないことを心得ていなければならない．

(竹内　啓)

MORSE, PHILIP, M.: SOLUTIONS OF A CLASS OF DISCRETE-TIME INVENTORY PROBLEMS, *Jour. Oper. Res. Soc. Amer.*, 7 *No. 1. 1959 pp. 67～78*

在庫問題において，一定期間ごとにそのときの状態に応じて発注がなされるものとすれば，在庫の状態はマルコフ過程を，そうして発注が行われる時点での状態はマルコフ連鎖をなす．その遷移確率 m_{ij} は需要の状態と発注のルールによって定まる．もし各期間における需要が同一の確率分布に従い，かつ互いに独立に分布しているならば，これは単純マルコフ過程になるが，一つの注文から次の注文までの長さの確率分布 $a(t)$ が指数型のようなものでないときには，一般にはこの仮定は成立しない．しかし各期間の平均注文数が大きくなれば，互いにほぼ独立に近くなると考えられる．

最初に，満たされなかった需要は，すべて再び品物が入るまで待っている場合を考える．

T: 期間の長さ，$I_n(t)$：第 n 期の時点 t における在庫量の期待値

$B_n(t)$：たまっている需要($I_n(t)=0$ のときにのみ $B_n(t)>0$)の期待値

$N_n(t)=I_n(t)-B_n(t)$　net の在庫の期待値

Q_n: n 期の始めに行われた発注量

T_r: 発注から到着までに要する時間

M: 最大在庫量　$i=M-$(net の在庫量)

$P_n(t)=\{P_0{}^n(t),\ P_1{}^n(t)\cdots\}$：$n$ 期の t 時点において i が 0, 1, 2… である確率を表わすベクトル

$\boldsymbol{M}=\{m_{ij}\}$ とすると，定常状態における期首の確率分布は，

$$P(0)=P(0)\boldsymbol{M}$$

の解として与えられる．そうして $I(0)=\sum_{j=0}^{M-1}(M-j)P_j(0)$，$B(0)=\sum_{j=M}^{\infty}(j-M)P_j(0)$．

$V_n(t)$：長さ t の期間に n 個の需要が生ずる確率とすると，$Q=M-i$, $T_r<T$ の仮定の下では

$$P_j(0)=V_j(T)$$

$$P_j(t)\begin{cases}=V_j(T+t) & t<T_r\\ =V_j(t) & t>T_r\end{cases}$$

となる．$T_r>T$ となることがある場合についても同様の式が成立する．

ストックがなくなっている長さの平均は

$$\bar{P}=1-\sum_{j=0}^{M-1}\frac{1}{T}\int_0^T P_j(t)\,d_t$$ で与えられる．

C_wM を在庫のための固定費用 C_i を現在在庫一単位あたり費用，C_b をストックがなくなった場合に生じた需要一単位あたりの費用とすると，総費用を最小にするには $\bar{P}_0=(C_i+C_w)/(C_i+C_b)$ $(C_b\geqq C_u)$ となるように M を定めればよい．

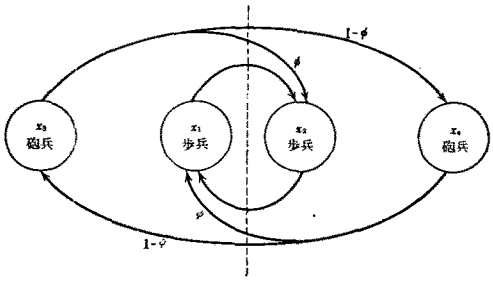
一般に $a_n(t)$ から $V_n(t)$ を求めるのはラプラス変換を用いればよいが，n の平均値が大きいときは漸近式を使うことができる．

更に満たされなかった需要はすべて失われてしまうという仮定の下でも同じような方法で問題をとくことができる．

(竹内　啓)

WEISS, H. K.: SOME DIFFERENTIAL GAMES OF TACTICAL INTEREST AND THE VALUE OF A SUPPORTING WEAPON SYSTEM *Jour. Oper. Res. Soc. Amer.*, 7 (1959) 180～196

奇数軍と偶数軍とあり何れも歩兵と砲兵とより成る．歩兵は敵軍の歩兵しか攻撃できないが，砲兵は歩兵と砲兵とを攻撃できる．そこで各軍(奇・偶)の砲兵は敵軍歩兵の攻撃に，それぞれの ϕ, ψ(割合)を割くものとする(図参照)．$x_i(t)$ $(i=1,\cdots,4)$ を時刻 t



における兵員数(兵力)とすると，戦闘方程式は

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-k_{21}x_2-\psi k_{41}x_4\\ \dot{x}_2=-k_{12}x_1-\phi k_{32}x_3\end{cases}$$
$$\begin{cases}\dot{x}_3=-(1-\psi)k_{43}x_4\\ \dot{x}_4=-(1-\phi)k_{34}x_3\end{cases}$$

ここで正の定数 k_{ij} は“i”の1人が倒す“j”の人数(kill rate)である．簡単のために $k_{12}=k_{21}=0$ の場合を考える．簡単な変数変換ののちに戦闘方程

式は

$$\begin{cases} \dot{y}_1=-\phi y_4, \\ \dot{y}_2=-\phi y_3, \\ \dot{y}_3=-(1-\phi)y_4, \\ \dot{y}_4=-(1-\phi)y_3, \end{cases} \qquad (*)$$

となる．どれかの $y_i(\tau)=0$ になったら game は終り，その "i" の属する軍が負けとする．この時刻を τ_e として，奇数軍への payoff は

$$U\equiv\begin{cases} y_1(\tau_e) & \cdots\cdots\text{奇数軍の勝のとき} \\ -y_2(\tau_e) & \cdots\cdots\text{偶数軍の勝のとき} \end{cases}$$

とする．もちろん奇数軍はこれを最大に，偶数軍はこれを最小にしようとする．各軍の戦略は $0\leqq\phi(t)\leqq1$, $0\leqq\psi(t)\leqq1$ を時間の函数として定めることである．

このような game は微分 game (かつ survival game でもある)とよばれ，数学的な理論のまだでき上がっていない分野に属する．この論文ではこれの解法の一つの実験的試みを提示している．それは次の方針でやる：

① $\phi(t)$, $\psi(t)$ は 0 または 1 の値しかとらないものとしてこのような戦略の中での minimax を求める．(*)が簡単であるからそれは簡単である．ただ(*)を初期条件 $y_i(0)=y_{i0}(i=1,\cdots,4)$ のもとに積分してから play 終結時刻 τ_e を求めるときに，y_{i0} の大小関係により τ_e が幾通りもでてくるのに注意すればよい．

② 次に第2段階として，このようにして求めた ϕ, ψ が微分 game に対して最適なことを示す．それにはそれらが，この微分 game の主要方程式

$$\max_{\phi}\min_{\psi}\sum_{i=1}^{4}\frac{\partial V}{\partial y_i}\dot{y}_i=\min_{\psi}\max_{\phi}=0$$

を満足していることを示せばよい．主要方程式の意味は次の通り：

game の値 V は初期位置 $y_1,\cdots,y_4$(変数と考えている)の函数だから，y_i を "optimal path" に沿って変動させると V は t の函数．最適戦略は絶えず $\dot{V}$ を saddle value に保つ．　(坂口　実)

ELMAGHRALY, SALAH E.: AN APPROACH TO LINEAR PROGRAMMING UNDER UNCERTAINTY,

Jour. Oper. Res. Soc. Amer. **7**, *No. 2, 1959 pp. 208～216*

需要の状態が離散型確率分布を持って変化する場合に，費用を最小にする問題を扱う．

生産物を $j,(j=1,2,\cdots,n)$ で表わし，j の需要が d_{jh}, $h=1\cdots s_i$ である確率を $p(d_{jh})$ と表わす．

cj を j 生産物単位当りの生産費

C_{oj} j 生産物単位当り在庫費用，C_{uj} 同不足した場合の費用．

X_j　決定すべき生産水準

とする．X_j に関する制限条件を

$$\sum_j a_{ij}X_j=b_i \quad i=1\cdots m$$

とする．この条件の下で，総費用

$$C(X_j)=\sum_{=1}^{n}C_jX_j+\sum_j C_{oj}\sum_{d_{jh}=0}^{<X_j}(X_j-d_{ih})p(d_{jh})$$
$$+\sum_j C_{uj}\sum_{d_{jh}\geqq X_j}^{\infty}(d_{jh}-X_j)p(d_{jh})$$

を最小にすることを考える．

$C(X_j)$ は $d_{jh}\leqq X_j\leqq d_{jh+1}$ の区間では線型になっており，そうしてそこでは限界費用が単位当り

$$D_{jh}=C_j+C_{oj}\sum_{d_{jh}=0}^{<X_j}p(d_{jh})-C_{uj}\sum_{d_{jh}\geqq X_j}^{\infty}p(d_{ih})$$

に等しくなっていることを利用して，

新しい変数 $X_{jk}\geqq0$ $k=1,\cdots s_j+1$ を $X_j=\Sigma_k X_{jk}$ となるように定義すれば，D_{jh} が h に関して単調減少であることを利用して次の定理が得られる．

$$X_{jk}^0 \text{ を } \sum_{k=1}^{h}X_{jk}\leqq d_{jh}(h=1,\cdots s_j)\,X_{jh}\geqq0$$
$$\sum_j a_{ij}\sum_k X_{jk}=b_i(i=1,\cdots n)$$

という条件の下で $\sum_j\sum_k D_{jk}X_{jk}$ を最小にするというリニヤープログラミングの問題の解とすれば，

$$X_j^0=\sum_{k=1}^{s_{jrt}}X_{jk}^0 \quad j=1,\cdots n$$

はもとの問題の最適解になっている．

証明は，D_{jh} が単調減少であることから，もし $X_{jh}^0>0$ なら $X_{jk}^0=d_{jk}$ $k<h$ でなければならないことを示すことによってできる(ただし原文の説明はあまり明快でない)．

なお数値例が示されている．

原文は stochastic なリニヤープログラミングの一特殊例として扱っているが，要点はむしろ，目的函数が piecewise linear でかつ勾配が単調減少の場合のプログラミングという点にあるように思われる．　(平館道子)

CLARK, DONALD F. AND ACKOFF, RUSSELL L.: A REPORT ON SOME ORGANIZATIONAL EXPERIMENTS

Jour. Oper. Res. Soc. Amer., **7** *No. 3, 1959 pp. 279～293*

組織体の研究は，一方では現実から離れた単純化

に陥らないようにするとともに，他方ではあまりに現実の細部にかかわりすぎて一般化を不可能とするものであってはならない．

ここでは現実の組織の特徴を備えたような実験的なゲームが考案され，実験された．

そのゲームは，Purchaser, Manufacturer, Salesman と呼ばれる3人，或いはこれに Executive と呼ばれる1人を加えた4人を1チームとして行われる．

Purchaser は文字を購入し，Manufacturer はそれを組み立てて単語を作り，Salesman はそれを売る．売り上げから費用を引いたものがそのチームの収入となる．彼等は全体として利益を最大ならしめようとして行動するが，また各自それぞれの行動分野においてなるべく合理的に行動する．Executive がいる場合には，全体に指令を与え全体の活動を調整する．このような形で，全体の目的と，またそれぞれ個別的な目的を持った各部分，および全体を総合する執行部からなる現実の組織体が模型化されている．

ルールをくわしくのべると，チームは最初 50 ドルを与えられている．Purchaser はそれぞれ1字 $2〜$8 の子音を2つづつを組として買い入れる．Manufacturer はその子音と母音および y を用いて単語を作る．母音一字当りの費用は $8 である．Salesman は作られた単語を文字盤の上に一定のルールに従って並べることによってそれを「売り」，売られた語からは1字当り $10 が得られる．ただしそのとき文字盤の空所1ヵ所につき $6 を差引かれる．3人はそれぞれの分野において手腕を発揮することができるわけである．

10 分たったらプレイを止めて全利益を計算する．

このようなゲームを単独で，Executive なしで，およびそれを入れてやらせた場合，他のチームと競争させた場合，および個人を他のチームの同一の地位にある人と競争させた場合，および同じチーム内の個人相互間で競争させた場合等について観察した．

その結果 1.「なれ」が存在する．2. Executive がいた方がよい．3. Executive がいるチームの方が早く「なれる」，また同一チームの個人を互いに競争させるとそうでない場合と，異なった結果が得られる等の結果が得られた．これらの結果は予備的なものであるが，今後の分析には有用であろうと思われる．　(竹内　啓)

LATHROP, JOHN B.: OPERATIONS RESEARCH LOOKS TO SCIENCE

Jour. Oper. Res. Soc. Amer., **7** *No. 4, 1959 pp. 423〜429*

(これは ORSA の会長退任講演である)

一年前 Bernard Koopman が同じ機会に "A Scientist Looks at O. R." という講演をして，OR の仕事がもっと強く科学的精神によって貫かれることを，充分な科学的探求なしで，複雑な問題に安易に解答を与えないようにと要望した．これはそれに対する OR 側からの回答ともいうべきものである．

まず科学は OR の下僕であっても，その主人ではないのだから，OR を叱ったりすることはできない．また科学が産業や政府の決定機構に入るときには，その分野の秩序に従わなければならない．

科学というものは，我々の知識の増進を目ざして行われる研究活動であると定義されよう．そうして科学的研究の，しばしば目的のない知的好奇心が非常に有用なものであることは認められる．しかしながら科学的知識を実際に応用すること，それは科学の任務ではなく，「決定」decision の任務である．科学の定義をそれによってもたらされるすべてのものをふくむように拡張してしまうことは好ましくない．従ってまた科学的方法を用いることを科学と同一視してはならない．科学的方法を用いることはどんな仕事においても必要であるし，それぞれの分野で優れた人はみなこれを用いているのである．

OR は decision maker の領域に属する．そこでは科学者は "何を知ることができるか？" という科学の要請を離れて，"何を，今すぐすべきか？" という要求に応じなければならない．現実の決定がなされねばならず，結論は(正しくとも誤っていようとも！)すぐに出さねばならない．

科学と「決定」の二つの分野の雰囲気は非常に異なるので，「決定」の分野に入った科学者はとまどうであろう．そこでは科学者は decision-maker の要請に従って，直接使えるような結論を出さねばならないのである．ここでもなおかつ科学の領域におけると同じ態度を守ろうとしてはならないのである．

要するに OR を科学と等置するようなことはやめた方がよい．もし科学者が OR に従事し，現実の世界に直接触れるというスリルを味わおうとするならば，科学的研究の自由のいく分かを犠牲にし，新しい世界の束縛を受け入れる覚悟がなければならない．

OR の進歩のために必要なものは，より一層の科学的な精神に満ちた OR であるというよりもむしろ，

Operationの立場からのより多くの科学的研究であると思われる. (竹内 啓)

BROOKS, SAMUEL H.: A COMPARISON OF MAXIMUM-SEEKING METHODS *Jour. Oper. Res. Soc. Amer.*, 7 *No. 4, 1959 pp. 430～457*

最適な条件を求めるためのいくつかの方法, factorial-design; univariate-design; steepest-ascent method; random-method について, 実験的に比較検討した.

変数は x, y の2つとし, 次の4つの response surface について実験を行なった.

1: $R=(0.5+0.5x)^4y^4exp[2-(0.5+0.5x)^4-y^4]+\varepsilon$

2: $R=(0.3+0.4x+0.3y)^4(0.8-0.6x+0.8y)^4\times exp[2-(0.3+0.4x+0.3y)^4-(0.8-0.6x+0.8y)^4]+\varepsilon$

3: $R=x^2exp[1-x^2-20.25(x-y)^2]+\varepsilon$

4: $R=(0.3x^2+0.7y^2)^3exp[1-0.6(x-y)^2-(0.3x^2+0.7y^2)^3]+\varepsilon$

すべての surface は $x=y=1$ で最大値1をとるようにえらばれている. この点の近くにそれぞれについて9つの 1×1 の大きさを持った実験域がランダムにとられた. ここに ε は $N(0, 0.03)$ に従う誤差を表わしている. 個々の実験の大きさは 16 および 30 の二通りであった. そうして実験の成功度は推定された最適点における response の高さによって測ることとした.

まず factorial design を用いた場合, 最適点を求める方法にもいろいろあるが, 最も大きい観測値が得られたところを最適とする, 2次式, 或いは3次式をあてはめる, 最も高い観測値の周囲で2次式をあてはめる. 或いは2次式3次式をあてはめた場合, 最大値が得られるところが実験域の内部に来ないときには最大観測値が得られたところをとる(これを option estimate という)等の方法を比較すると option estimate が最もよく, また最高観測値をそのまま最適とする方法があてはめによる方法より一般によい結果が得られた.

次に univariate method とは最初 x を一定にして y を変化させ, 次にその中で最適の y の値を固定して x を変化させるというように何回かくりかえして行く方法である. (16 回の実験については一度に4回づつ4度くりかえす). 次に steepest ascent method については, "single" と "slope" と呼ばれる2つの方法をとったが, 一般に後者の方がよく, また推定方法としては option estimate が最もよかった.

random-method は実験の点を random にえらんで, 最も大きい観測値が得られた点を最適とするもので, simple random と stratified random の2通りを行なった.

全体としての結果を見ると, 概して "slope" steepest ascent method によるものが最もよく, univariate method がこれに次ぎ, random method が最も悪かった. ただし surface 3 については univariate method はよくなかった.

しかしどの方法をえらぶかは, 実験の大きさ, 逐次実験が可能であるか否かによっても影響される. これらのいろいろな条件を考慮して定めねばならない. (松谷泰行)

GERALD GLASSER: GAME THEORY AND CUMULATIVE VOTING FOR CORPORATE DIRECTORS *Management Science Vol. 5, No. 2, 1959*

会社役員の選出に際し株主グループが如何にして票を有効に利用すべきかと云う問題は以前から論議されているが, この論文はこれを株主のグループをプレヤーとするゲームを考えてゲーム理論の観点からの接近を試みるものである. ところで, この場合の選出方法は通常累積投票法がとられる. これは株主が持株数と選ばるべき役員数の積に相当する数の票を持ち, 投票はそれら全部が只一人の候補者のためになされてもよいし, 又幾人かの間に分割されても勿論よい. そしてそれらが累計された結果得票数の多いものから順に定められた数の役員が選出されると云う手続である. このことを彼はゲーム理論の用語で次の様に定式化する. 先ず株主のグループの数を n としこれを $I, J, \cdots\cdots$ で表わす. 任意のグループ例えば α の支配し得る株数を S_α とし, 全株数を S で示す. 更に各グループは他のグループの支配し得る株数従って票数を全て知っている状態を想定する. この仮定は前以って株主会議で宣言されることがままあることからもそれ程非現実的なものではないと彼は注意している. この時累積投票のゲームの規則は, 選ばるべき役員の数を m とすると, 各グループの取り得る戦略を各々の支配し得る全票数例えば mS_α をそのグループの推選候補者 m 人に分割する全ての分割として定義し, 各々のグループが戦略を

選んだときの利得を各グループの確保する役員数で示すことになる．もし同点の場合を無視するとこのゲームは所謂定数和ゲームの性質を持つことになる．これを2人ゲームの場合に限って考察した時のミニマックス解を彼は次の様なもので与える．今 $i=(i_1, \cdots i_m)$ $j=(j_1, \cdots j_m)$ でプレヤー I, J の戦略を示すとする．ここで添字は大きい順に並べてあるとしておく．この時 mS_r の票数を持つプレヤー I はその i_k なる候補者にはせいぜい $\left[\frac{mS_I}{k}\right]$（[ ] は整数部分）の票をふり当てることが出来るだけである．もし I が，相手が如何に行動しようとも，少なくとも k 人の候補者を確保せんとすれば，J が第 $(m+1-k)$ 番目の候補者に割当てることの出来る票数より多くを i_k に割当てなければならない．即ち

$i_k > \left[\frac{m(S-S_I)}{m+1-k}\right]$ としなければならないところで i_k はせいぜい $\left[\frac{mS_I}{k}\right]$ であることから

$$\left[\frac{mS_I}{k}\right] > \left[\frac{m(S-S_I)}{m+1-k}\right]$$

従ってプレヤー I は上式を満足する最大の k を確保することが出来る訳である．Glasser はこの関係式が従来云われて来た k 人を確保するために必要な票数についてのそれ，即ち $S_I > \left[\frac{kS}{m+1}\right]+1$ を含んでいることを注意している．更に彼は n 人ゲームの場合を von Neuman, Morgenstern の定式における諸概念と比較して論じている．　　（関谷　章）

MITTEN, L. G.: SEQUENCING N JOBS ON TWO MACHINES WITH ARBITRARY TIME LAGS, *Management Science*, 5, *No. 3*.

この論文は Bellman, Johnson による Scheduling の model を多少の拡張を施した上で具体的な解答を与えたものである．

Bellman, Johnson では次の様な model を考えている．今 n コの仕事があるとしそれを $1, \cdots n$ なる自然数で表わすこととしその任意の順序を $S=\{1, 2, \cdots n\}$ で示すこととする．各仕事の性質については，先ず機械 I での加工に要する時間 A_i 機械IIのそれを B_i とし，機械Iではある順序で切れ目なく仕事が行われるものとし，機械IIの方も同じ順序で仕事が行われるとする．この時当然IIの方では idle time が生ずることになるが，今 i なる仕事が機械IIにかけられる直前の idle time を x_i とすると，問題は機械IIについての全拘束時間 $T(s)=\sum_{i\in S}(B_i+x_i)$ を極小にする様な仕事の順番 S^* を求めることとして表現される．

Mitten ではこれを任意の time lag の場合に拡張した model を考えそれに対する最適解を求める手続きを具体的に示しそれが optimal であることの数学的な証明を与えている．

彼にあっては問題は arbitrary time lag D_i を導入して次の様に定式化される．Bellman, Johnson の model では任意の仕事が機械Iによって完全に加工されてしまった後で機械IIにかけられると云う仮定があったが，それをゆるめて D_i を第 i の job が機械Iにかけられてから機械IIにかけられる迄に許される最少の時差を示すもの，云いかえれば機械Iでの i についての作業が中止されてから機械IIの作業が完了するまで最少限必要とされる時間として定義される．今 $t=t_i'$, $t=t_i$ で夫々機械I及びIIの作業 i の開始時とすると

(a)　$t_i'=t'_{i-1}+A_{i-1}$

(b)　$t_i=\max[t_{i-1}+B_{i-1},\ t_i'+D_i,\ t_i+A_i+D_i-B_i]$

として schedule rule が与えられる．(a)は機械Iでは切れ目なく全作業がある順序で行われることを要求し，(b)は機械IIでの各作業が前の仕事が終るや否や出来るだけ早く開始され取りかかることを要請するものに他ならない．

以上の様な model では前述の idle time x_i は

$$x_i=t_i-(t_{i-1}+B_{i-1}) \text{ for all } i\epsilon S$$

として与えられる．従って問題は前と同様に機械IIの全拘束時間 $T(S)$ を極小にする様な仕事の順列 S^* を求めることである．つまり全ての順列 S に対して $T(S^*)\leqq T(S)$ となる様な S^* を求めることである．ところで $T(S)=\sum_{i\in S}B_i+\sum_{i\in S}x_i$ であるが $\sum_{i\in S}B_i$ は S とは無関係な常数であるから $T(S)$ を極小化する問題は $C(S)=\sum_{i\in S}x_i$ を極小化することと同値である．

Mitten はこの場合の optimal な sequence は次の様なものとして与える．$E_i=A_i-B_i$ とし，S を二つの共通部分のない部分数集合 $S=\{i \mid E_i<0\}$ $S=\{i \mid E_i\geqq 0\}$（各々の要素を $r, n-r$ とする）に分割する．S については $D_1\leqq D_2\leqq\cdots\leqq D_r$ となる様に番号をつけかえ S' については $D_{r+1}\geqq D_{r+2}\geqq\cdots\geqq D_n$ となる様に番号をつけかえる．この様にし

て得られた $1, 2, \cdots, n$ なる配列が optimal な配列である.

なおこの論文の次に Johnson の comment がついている. (関谷 章)

HARARY FRANK: GRAPH THEORETIC METHODS IN MANAGEMENT SCIENCES

Management Science Vol. 5 No. 4 July 1959

1953 年に同じ著者 FRANK HARARY と ROBERTZ. NORMAN による "GRAPH THEORY as a MATHEMATICAL MODEL in SOCIAL SCIENCE" が出てから今日迄 Graph Theoretical な方法の種々の分野に於ける応用が研究されて来たが——それらは主として心理学関係に於いて——本論文は management sciencesに於いて用いられ得る graph theoretical な方法を説明するのが目的で書かれたものである. すでに HARARY は graph theoretical なアプローチを行列論や集合論と結びつけ, それによって redundancy, liaison person 及びグループの clique, strengthning and weakening members 等の organizational な概念に関する問題を取り扱ったが——例えば I. C. ROSS との共同論文 "Identification of the liaison persons of an organization using the structure matrix." ——ここではそういった organizational な概念と graph theory からの概念との間の対応を述べる. 曰く

redundancy $\Longleftrightarrow$ 同一の点を二度以上通過しないような, 向きのついた path.

organization の中の liaison person $\Longleftrightarrow$ 連結した graph の cut point(古い論文では articulation point).

clique $\Longleftrightarrow$ 最大の subgraph.

グループの strengthening member $\Longleftrightarrow$ それがある時のグループの graph の方が, ない時のグループの graph よりも高度に連結であるようなもの.

そして更に彼は status と contrastatus, power structure に於ける満場一致(unanimity)の達成, トーナメントとプロダクション・スケジュール及び structural balance の graphical な取り扱いにも言及する.

論文の構成は後の説明のための予備知識提供とも云うべき節 1. Introduction 2. Graphs and Matrices. と本論たる 3. Graphical approach to some structural problem in the management sciences 及び 4. Open problem となっている. 骨子は勿論第3節でありそこに於て最初に記した8つのトピックスを行列論及び集合論を用いて取り扱って居るが, ほとんど定義及び定理の羅列であるため, 若干の example があるとはいうものの第1及び第2節程度の予備知識では, 理解に達するには少からず抵抗を感ずると思われる. 併し乍ら management sciences に於ける graph theoretic な方法の可能な効用(potential utility)を説明するという筆者の意図は達せられていると云えるし, 無責任に軽く読み流しても graph theory がどんな事を取り扱えるのかといった程度の表面的な知識を得る事は出来る. (五百井)

MORRIS, WILLIAM T.: SOME ANALYSIS OF PURCHASING POLICY,

Management Science 5 No. 4 1959, pp. 443～452

価格の変動の確率分布が知られているときに, 一定期間内に一定量の商品を買い入れるには, どのようにすればよいかを考える.

購入期間がN日あるとし, 価格は日によって変るものとする. $f_k(x)$ を第 k 日の価格 x に対する確率密度函数としよう.

購入の仕方としては, $X_k(k=1,\cdots N)$ を定めて, $x_k \leq X_k$ となった最初の日に購入をすることとする.

$$P_k=\int_0^{X_k} f_k(x)\,d_x \quad e_k=\int_0^{X_k} x f_k(x)\,d_x$$

とすれば, 平均購入価格は

$$V=\sum_{k-1}^{N} e_k \prod_{i=1}^{k=1}(1-P_i)$$

という形で与えられる. これを最小にする X_k の値を求めると, $\dfrac{\partial V}{\partial X_k}=0$ から

$$X_k=\sum_{j=k+1}^{N} e_j \prod_{i=k+1}^{j-1}(1-P_i)$$

という形の解が得られる(勿論 e_j は X_j の函数であるからこの形は X_k に関する連立方程式を与える)

この式を X_N から順に解いて, すべての X_k を求めることができる. (勿論 X_N は価格の取り得る最大値にならなければならない.)

購入が一度にとは限らず, 何日にも分けて買うことを許しても最適解はけっきょく一日に全部買うようなものとなり, 上記の解と一致することが示される.

次に毎日購入を行なう場合に, 毎日一定金額を購

入することにすると，平均価格は，毎日一定量を購入する場合より安くなる．最後に投機の問題に簡単にふれている．　(平館道子)

DERMAN, C.: A SIMPLE ALLOCATION PROBLEM, *Management Science* 5 *1959, pp, 453～459*

$a_1+\cdots+a_n=A(A>0)$, $a_i\geqq 0(i=1,\cdots,n)$ という制約条件のもとに与えられた函数 $G(a_1,\cdots,a_n)$ を最大にせよ，のような形の最大問題が経営科学の分野には沢山ある．

$X_i(i=1,\cdots,n)$ が密度函数 $f_i(\xi)$ をもつ確率変量で，$X_1,\cdots,X_n$ は互いに独立とする．この論文は

$$G(a_1,\cdots,a_n)\equiv E\left[\sum_{i=1}^{n}\min(a_i,X_i)\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^{a_i}\xi+\int_{a_i}^{\infty}a_i\right)f_i(\xi)d\xi$$

である場合について扱っている．これは例えば，パン屋が n 箇の地点に販売店をもち，毎日のパンの製造量 A をそれらに a_i づつ分けると，$i(i=1,\cdots,n)$ 地での需要が X_i ならば総売上量は上式の $G(a_1,\cdots,a_n)$ で表わされるであろう．

$f_i(\xi)>0(0<\xi<\infty)$, Prob.$(X_i=0)=0(i=1,\cdots,n)$ と仮定すると，$G(a_1,\cdots a_n)$ の最大は領域の内点で到達され，最適配分(optimal allocation)は

$$\sum_1^n a_i=A,\ \text{および}\ \int_{a_i}^{\infty}f_i(\xi)d\xi=\text{一定}\qquad(*)$$

から求まることが示される．特に X_i が皆同じ形の分布で平均値および分散のみが異なる場合，すなわち

$$f_i(\xi)=f((\xi-\mu_i)/\sigma_i)\quad(i=1,\cdots,n)$$

ならば，(*)より

$$a_i=\mu_i+\left(A-\sum_1^n\mu_i\right)\sigma_i\Big/\sum_1^n\sigma_i$$

になる．

今度は，単位量当りの売価を S，生産費を c として

$$G(a_1,\cdots,a_n,A)\equiv SE\left[\sum_1^n\min(a_i,X_i)\right]-cA$$

を最大にするには，まず A を固定しておいて(*)により $E[\cdots]$ を最大にし，次に A を動かせばよい．結果は一定値 $\int_{a_i}^{\infty}f_i(\xi)d\xi=c/S$ となる．これは i 地のみを考えて

$$\max_{a_i}[SE\{\min(a_i,X_i)\}-cA]$$

を求めたときの解と同一である．

最後に，この配分問題を前期と後期との二段に分ける．各地 i での需要の密度函数は，前期では $f_{i1}(\xi)$，後期では $f_{i2}(\xi)$ とする．まず資源 A 全部を前期での需要密度 $f_{i1}(\xi)$ に従って(*)のように最適に分ける．前期での満たされた全需要が $Y_1(=\sum_i\min(a_{i1},X_{i1}))$ だったら，次に残りの $A-Y_1$ を，今度は後期での需要密度 $f_{i2}(\xi)$ に従って(*)のように配分する．つまり後期の配分では，前期で残った量をかき集めて再配分する．ちょっと考えるとこれが最適の配分法らしいが，実は違うのである．それを示す反例が出ている．途中の計算に誤まりがあるが，結論は間違っていない．　(坂口　実)

ZACHRISSON, L. E.: A TANK DUEL WITH GAME-THEORETIC IMPLICATIONS, *Naval Res. Logist. Quart.*, 4 *(1957) pp. 131～139.*

微分 game の具体例である．2台の戦車の戦闘(接近しつつ砲撃)を考える．両者が距離 x だけ離れているとき，時間 Δt の間にそれぞれが撃破される確率を $p(x)\Delta t+o(\Delta t)$, $q(x)\Delta t+o(\Delta t)$ とする．$p(x)$ や $q(x)$ は自分の装甲と相手の攻撃力との両方からきまる函数である．$p(x)$ と $q(x)$ とは与えられていて，両戦車のとり得る戦略は，速度(それぞれ $u(x)$, $v(x)$)を control することであるとする．両者がはじめ距離 x だけ離れているとき，戦闘の結果IIが遂に負ける確率を $T(x)$ とすると，微分方程式

$$\frac{dT}{dx}=\frac{p(x)+q(x)}{u(x)+v(x)}\left(\frac{q(x)}{p(x)+q(x)}-T\right)\qquad(*)$$

$$T(0)=\frac{q(0)}{p(0)+q(0)}$$

が成立することがわかる．

さて game の問題というのは，各戦車の速度制限

$(0<)\,u_{\min}\leqq u(x)\leqq u_{\max}$, $(0<)\,v_{\min}\leqq v(x)\leqq v_{\max}$,

および微分方程式(*)のもとに，はじめ x_0 だけ離れていて戦闘の結果IIが負ける確率 $T(x_0)$ を，Iは最大にIIは最小にするよう，それぞれの速度 $u(x)$, $v(x)$ を定めようというのである．

この game の解は次のようになる．$R(x)\equiv q(x)/(p(x)+q(x))$ とおく．2条件

$T(x)>R(x)$ ならば $u(x)=u_{\max}$, $v(x)=v_{\min}$

$T(x)<R(x)$ ならば $u(x)=u_{\min}$, $v(x)=v_{\max}$

を満足するように，$x\geqq 0$ に対して $T(x)$ を構成してゆくことができる．game の値は $T(x_0)$ に等しい．Iの最適戦略は，ある距離間隔をおいて替る替るに $u_{\max}$, $u_{\min}$ をとる．中間の速度はとらない．IIの最適戦略はこの逆で，Iが $u_{\max}$ のとき $v_{\min}$,

$u_{\min}$ のとき $v_{\max}$ をとる.

最適戦略は play 終結時における terminal payoff $T(x_0)$ を saddle value にするのであるが，それはまた，瞬時値 $\frac{dT}{dx}$ を常に saddle value にしながら play を進行させている．一般につぎの定理が成立する：微分 game の問題

$$\begin{cases} U(x_0)=\max\limits_{u(x)}\min\limits_{v(x)} \\ dU/dx=G(x,\ U;\ u,\ v),\ U(0)=c \end{cases}$$

を解くには，先ず x および U をとめて各点 $(x,\ U)$ における局所的 game を解く．

$$\max_u \min_v G(x,\ U;\ u,\ v)=\min_v \max_u$$
$$=G(x,\ U;\ u^*(x,\ U),\ v^*(x,\ U))$$

とするとき，値を $G^*(x,\ U)$ とかくと微分方程式

$$dU^*/dx=G^*(x,\ U^*),\ U^*(0)=c$$

から求まる $U^*(x_0)$ が "total game" の値になる．最適戦略は U^* に対する局所的 game におけるそれら $u^*(x,\ U^*)$, $v^*(x,\ U^*)$ により与えられる．

(坂口　実)

R. BELLMAN, DREYFUS, S. A: BOTTLENECK SITUATION INVOLVING INTERDEPENDENT INDUSTRIES *Nav. Res. Log. Quart.* 5, *No. 4, Dec. 1958, pp. 307～314*

二つの相互に関連した産業(製鋼と自動車製造)において，その産業のある時期 t における状態を原料の手持量 $x_s(t)$ と，最大生産能力 $x_m(t)$ との二つの量で表わし，がそれぞれが，初期条件として量 c_1, c_2 である場合に，ある期間 T 内で生産される自動車の数を最大にするような allocation の問題を取扱っている．

製鋼部門としては手持ちの鋼を

(1) 現在の製鋼能力の下で更に鋼を増産するため

(2) 現在の製鋼能力を増すため

(3) 現在の製鋼能力の下で自動車を生産するための三通りに使用出来るとする．即ち

$$x_s(t)=z_s(t)+z_m(t)+z_a(t) \qquad (1)$$

但し，$z_s(t)$, $z_m(t)$, $z_a(t)$ は (1)(2)(3) の用途に使われる量である．更に条件として，

$$z_a(t)\leqq k_1x_s(t),\ 0<k<1 \qquad (2)$$

$$z_s(t)\leqq z_m(t) \qquad (3)$$

また，生産の linearity を考えて，

$$x_s(t+1)=k_2z(t) \qquad k_2>1 \qquad (4)$$

$$x_m(t+1)=x_m(t)+k_3z_m(t) \quad k_3>0 \qquad (5)$$

のような，離散的なプロセスとする．

問題は，期間 $[0,\ T_0]$ の間に生産される自動車の数を最大にするということである．但し初期条件は

$$c_1=x_s(0),\quad c_2=x_m(0) \qquad (6)$$

この問題には，LP による接近として，(1)～(6) の制約の下に

$$L(z)=\sum_{t=0}^{T_0-1} z_a(t) \qquad (7)$$

を maximize することになる．(単位として，$z_a(t)$ によって自動車の生産数を表わすようにとっている)．

しかし，もし c_1 と c_2 とが変化する場合に LP によって decision を行なうことは，計算上も相当に困難であるので，つぎに，DP による接近として，

$f_T(c_1,\ c_2)$ = 初期条件 c_1, c_2, で，最適政策を用いた時 T 期間で生産される最大自動車数

とすると，

$$\left.\begin{aligned} f_1(c_1,\ c_2)&=k_1c_1 \\ f_R(c_1,\ c_2)&=\underset{(Z)}{\mathrm{Max}}[z_a(0)+f_{R-1}(k_2z_s(0),\ c_2+k_3z_m(0)] \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

のように定式化して，これから policy と f とをもとめる方法に触れている．

その内容は，

(1) 式(8)を計算に便利な recursive form にすること

(2) その結果を実際に計算すること

の2部に分けられるが，bottle neck process として，stage の数が大きい場合の最適解を求めるのに行われるディメンジョンと計算量の節減の手続きがよく示されて居る．

計算の実例は 15 stage の問題について示されて居る．

(出居)

DUCKWORTH W. E. AND WYATT J. K.: RAPID STATISTICAL TECHNIQUES FOR OPERATIONAL RESEARCH WORKERS, *Oper. Res. Quart.* 9, *No. 3*

O. R. Worker にとって，ある会議で論じられているデーターの有意性を検定したいけれども，時間がかかりすぎるとかそのデーターが会社の機密に属するとかの理由で会議室から持ち出せない場合，或いは調査の結果を計算機にかけて分析する前に一応の見通しをつけたいという場合がしばしば生ずる．このような場合には，迅速で，しかも成可く数値表を使用しなくてよい検定法が望ましい．この論文では，

母平均のテスト，二つの母平均の比較，傾向性，連合およびその他のランダム性の存在に関するテスト，レンジを用いる分散分析の方法等について論じている．例えば，母平均の問題や傾向，連合の問題に対しては，サインテストを用い，n 回の試行で成功する確率と失敗する確率が等しいとする帰無仮説は，5％の有意水準で近似的に $|u-v| \geqq 2\sqrt{n}$，(u 成功した回数，v；失敗した回数)のとき否定されることを利用している．又，与えられた大きさのデーターではサインテストで有意性が見出されない場合に，更にどれだけのデーターがあればよいかという要求されるサンプルの大きさの算出には，$\left(\frac{2N}{D}\right)^2-N$ (N は初めのサンプルの大きさ．D は＋と－の数の差)という式を与えている．分散分析の方法は，普通のレンジによる分散分析の手法と殆ど同じであるが，レンジから標準偏差を求める場合に表を使用しない．例えばそれぞれ n コのデーターの集合からなる k コのレンジの平均を w_n としたとき，級内標準偏差の不偏推定値を $\frac{w_n}{\sqrt{n}}$ で算出している，この論文にあげられている手法は近似的なものであるけれども，データーが有意であるときに，適切な方法で検定した場合の約 90％が正しく検定されることが知られている．

尚，Operational Research Quarterly V. 10, N. 1 に P. G. Moore の Some approximate statistical tests と題する論文があり，非常に簡単な表だけを使って検定する方法が与えられていることを付記する．　(小島)

SCARF, H.: BAYES SOLUTIONS OF THE STATISTICAL INVENTORY PROBLEM, *Ann. Math. Stat.* **30** (*1959*) *pp 490～508.*

ordering cost, holding cost および penalty cost が何れも比例的(係数それぞれ c, h, p)とする．x, y をそれぞれ initial および starting stock, ξ を需要量(確率密度 $\varphi(\xi)$ が既知)，α を割引率とする．initial stock x のとき最適注文政策を用いて得る total discounted cost を $f(x)$ とすると

$$f(x)=\inf_{y\geqq x}\left[c(y-x)+L(y)+\alpha\int_0^\infty f(y-\xi)\varphi(\xi)\,d\xi\right]$$

が成立．ただし

$$L(y)\equiv\begin{cases} h\int_0^y (y-\xi)\varphi(\xi)\,d\xi+p\int_y^\infty (\xi-y)\varphi(\xi)\,d\xi, & y>0 \\ p\int_0^\infty (\xi-y)\varphi(\xi)\,d\xi, & y<0 \end{cases}$$

とする．これに対する最適在庫政策は，定水準在庫政策：

$$y^*(x)=\max(\bar{x},\ x)$$

で水準 $\bar{x}$ は

$$\frac{p-c(1-\alpha)}{h+p}\int_0^{\bar{x}}\varphi(\xi)\,d\xi$$

から定まる ($p>c(1-\alpha)$ を仮定) ことはよく知られている．

いま需要分布の密度函数が

$$\varphi(\xi,\ \omega)=\beta(\omega)r(\xi)e^{-\omega\xi}\quad(\xi>0,\ r(\xi)>0)$$

なことがわかっていて，母数 ω の値だけが未知とする．n 期目には ω に関する情報は統計量

$$s_{n-1}\equiv(\xi_1+\cdots+\xi_{n-1})/(n-1)$$

につくされるわけである．

未知母数 ω に関する a priori 分布を想定すると

［定理1］ 統計量の列 $\{\bar{x}_n(s_{n-1})\}$ が存在して，第 n 期目に

$$\max(\bar{x}_n(s_{n-1})-x,\ 0)\qquad(n=1,\ 2,\cdots)$$

を注文する政策が最適(Bayes解の意味で)注文政策である．

函数形 $\bar{x}_n(s)$ はもちろん想定した a priori 分布に依存してきまる．これを explicit に解析的に求めることは全く難しいが，若干の性質はでる．例えば

［定理2］ $\bar{x}_n(s)$ はみな s の増加函数である．

n が大きいとき $\bar{x}_n(s)$ の漸近展開が欲しいわけだが，それは適当な正則条件のもとに

$$\bar{x}_n(s)\sim\bar{x}(s)+a(s)/n$$

となる．$\bar{x}(s)$ は，需要分布の母平均が s，すなわち

$$d\log\beta(\omega)/d\omega=s$$

なようにとった(この函数を $\omega(s)$ とおく)$\varphi(\xi,\omega(s))$ が既知のときの定水準政策における水準である．すなわち

$$\frac{p-c(1-\alpha)}{h+p}=\int_0^{\bar{x}(s)}\varphi(\xi,\ \omega(s))\,d\xi$$

を満足している．$a(s)$ は φ(特にその母分散)，s および a priori 分布の三者に関係する量である．これが［定理4］である．　(坂口　実)

CHRISTIAN, RICHARD C.: INDUSTRIAL MARKETING: SEVENTEEN WAYS TO IMPROVE MARKETING, *Jour. Marketing 1959*

買手市場ということが再び基本的な問題として登場してきた．販売高と利潤を増加させる為にマーケティングの効果を改善しようとしている企業の数はますます増加しつつある．製造会社は［マーケティング自己監査］を採用して己れの弱点を摘出し，有用なアイディアを発展させようとしている．その活動はマーケティングに間接的にしか関係のない分野にまで及んでいる．

積極的で創造性に富んだマーケティングが大会社によって行なわれているが，中小企業によってもそれに勝るとも劣らないマーケティングが行なわれている．企業は以下に挙げるような機能やアイディアを試みている．

1. 新製品の導入速度を速めること．
2. 重点販売方式の採用．
3. マーケティング・リサーチによる精査を進めること．——徹底的な分析と検討を行なうこと．
4. 市場分析活動を検討しそれを行なうこと．
5. 販売の援けとなるもの総てを再評価すること．スライド・映画，製品模型，説明書，広告のリプリントの販売点に於ける利用を考慮すること．
6. OR の利用可能性を研究すること．——OR は在庫管理，販売等に好結果をもたらし得る有用な技術であることを忘れてはならない．
7. オートメーションの利用を考えること．
8. 価格決定の方法を分析し，検討すること．
9. 販売競争の利用を考えること．
10. 将来の予想に対して価格低減の可能性を示し得るかどうか．而もそれが論証し得るものかどうかをみる．
11. 競争者の研究を勧めること．
12. 内部販売通信組織をチェックすること．
13. 特別にマーケティング要員の会合を開き現場の販売員のアイディア，提案などを本部にフィードバックさせること．
14. 「もう 10% の販売努力」計画を強調すること．
15. 現在の取扱製品の分析を行ない，利潤の少ないものなどは製造を止めるべきである．
16. 顧客に対する接触は個人的な感じを抱かせること．
17. 会社の広告を更にすすめること．

以上殊更に新しいものではない．然し，計画をたてるにあたって考慮に値するものである．これらのアイディアを利用することが端緒となって，マーケティング活動が活発にスタートする可能性が考えられるからである．

(高際)

BELLMAN, R. AND KALABA, R.: A MATHEMATICAL THEORY OF ADAPTIVE CONTROL PROCESSES, *Proc. Nat. Acad. Sci., 45 (1959) 1288～1290*

標題の adaptive control process, あるいは learning process というのは，行動決定のときに同時に学習を要求されているような多段決定過程である．この数学的な構成は次の通り：p を系の位置または状態，P を情報様式(information pattern)，すなわち今後の行動を導くために保持したい情報，とする．決定(decision) q の結果 p, P はそれぞれ新しい

$$p_1=T^{(1)}(p,\ P;\ q),\quad P_1=T^{(2)}(p,P;\ q)$$

に移る．$T^{(1)}$, $T^{(2)}$ は a priori に与えられた二つの変換である．確率的な過程ならば，確率 $d_rG(p,\ P;\ q.\ r)$ をもってそれぞれ新しい

$$T^{(1)}(p,\ P;\ q,\ r),\quad T^{(2)}(p,\ P;\ q,\ r)$$

に移る．決定の列(これを政策という) $\{q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_N\}$ により最終状態 (p_N, P_N) に達したとする．あらかじめ定められた return ft. ϕ の期待値を最小(あるいは最大)にするような政策を求めよ，ということになる．

$$f_N(p,\ P)\equiv \min E\phi(p_N,\ P_N)$$

とおくと，最適性原理から

$$f_N(p,P)=\min_q\int f_{N-1}(T^{(1)}(p,\ P;\ q,\ r),\ T^{(2)}(p,\ P;\ q,\ r))d_rG(p,\ P;\ q,\ r)$$
$$(N=1,\ 2,\ 3,\cdots;\ f_0(p,\ P)\equiv\phi(p,\ P))$$

であるが，この式から最適政策の存在や構造特性などがわかる．情報様式 P の取扱いには，数理統計学における充足統計量を利用するのが簡易かつ効果的である．詳細は IRE National Convention Record などに発表の予定．

(坂口　実)

DENIS, JACK B.: A HIGH-SPEED COMPUTER TECHNIQUE FOR THE TRANSPORTATION PROBLEM., *Jour. Ass. Comput. Mach.* **5** *nv 2. 1958 pp. 131～153*

いわゆる"輸送問題"の解法としては，ハウサッカー法，MODI 法等とあるが，これらは第1近似値——initial basic feasible solution —— の取り方が異なるだけで，いずれも "stepping stone method" と呼ばれる解法に属する．他にもヒッチコックの解法等があるが，ここに紹介する論文は stepping stone method を電子計算機にプログラムして行わせた経験について報告したものである．従来 stepping stone method は機械計算には不向きと云われているが，とにもかくにも機械で行わせた報告がこの論文であり，この方法の機械計算化，それに伴う長短等については充分な資料もないようであるから，この論文を基にして何等かの検討が行われる事を期待する次第である．

著者がプログラムするに当って問題としてとり上げた輸送問題は次の通りである．m コの生産地があり，i 生産地は $S_i(1, 2, \cdots, m)$ だけ供給し得る．消費値は n コあり，j 消費地は $D_j(j=1, 2, \cdots n)$ 必要である．$i \to j$ への費用は C_{ij} である．$i \to j$ への輸送量を X_{ij} とすると

$$\sum_j X_{ij}=S_i \qquad (1)$$

$$\sum_j X_{ij}=D_j \qquad (2) \quad i=1, 2, \cdots, m$$

$$X_{ij} \geqq 0 \qquad (3) \quad j=1, 2, \cdots, n$$

$$\sum_i S_i=\sum_j D_j \qquad (4)$$

なる条件の下に

$$C=\sum_{i,j} C_{ij}X_{ij} \qquad (5)$$

を最小とするというのが問題である．optimum solution の判定のためには，dual variables を導入して

$$U_i+V_j=C_{ij}$$

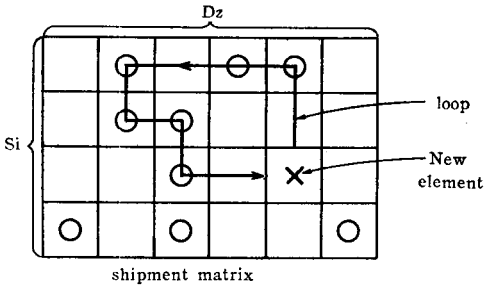
より

$$\Delta C_{ij}=U_i+V_j-C_{ij} \qquad (6)$$

が全ての $\Delta C_{ij} \leqq 0$ のときに最適解が得られたとしている．

解法そのものは stepping stone method の忠実な翻訳で，ある feasible solution (Fig 1) に new element を代入して loop を作り，次の新しい feasible solution を作りだす．

New element を導き入れる (i, j) については (6)



の $\Delta C_{ij}>0$ の最大の (i, j) を選ぶのが手計算の通例であったが，機械計算にあっては次の3通りが考えられ，30×260 の問題について Table 1 の結果をあげている．

Table 1.

方法	iteration の回数	cost matrix 検査の回数	時間[註1] (分)
1	2200	27	25.0
2	674	44	9.6
3	508	508	19.4

方法1：1行ずつ調べて最初の $\Delta C_{ij}>0$ の (i, j) をとる．

方法2：ある行の最大の $\Delta C_{ij}>0$ をとる．次の回は次の行より始める．

方法3：ΔC_{ij} が最大なる (i, j) をとる．

新しいfeasible solutionを得るには各 X_{ij} のshipment matrix での幾何学的な位置を知る必要があり，そのための technique も詳説されている．全体のブロックダイアグラム，各部の詳細なフローチャートもつけ加えられており，これを基にしてプログラミングを行なうには非常な助けとなるであろう．

［註1］ 使用計算機は Whirlwind と呼ばれる MIT の計算機である．Whirlwind は2進の parallel machine でこの計算が行われた当時は，1 word 16 bit 2016 core storage. 補助として magnetic tape, 低速磁気ドラムが 40,000 words 速度は1秒間 40,000 operation (1 operation 約 25 μsec). 国産機と比較すれば，速度，補助 storage の点で見劣りがあるにしても HIPAC 101 が2進 1 word 20 bit 2048 words, NEAC 2203, HITAC 301 共に 10 進であるが，約 2000 words——いずれも高速磁気ドラムであるから，ある程度プログラム出来るであろう．

（松谷泰行）

VOTAW AND RAFFERTY: HIGH SPEED SAMPLING *Mathematical Tables and other Aides for Computation* Vol II *No.* **33** *1951 pp. 1~8*

この論文はいろいろな型の乱数を作る，いままでに考えられてきた，方法を総合して示したものである．この方法は，高速自動計算機を利用することを念頭においたものであるが，原理としては道具に無関係に使えるものである．モンテカルロ法によって問題をとこうとする場合など，この乱数作製の総合報告的な論文は便覧としても有用であろう．一様乱数からいろいろの型の乱数に変換する手順には Neumann の Rejection Method (" Various Techniques used in Connection with Random Digits" Paper No. 13 in "Monte Carlo Methods" NBS Applied Mathematics Series No. 12 V. S. Gont. Printing office (1951)) を応用したものが多い．以下内容の要約を示す．

1. 序， 2. 記号と予備知識は省略．

3. 基本的乱数作製

A, B, C は放射性物質，サイコロなど物理的な方法，これは省略．

D. 平方採中法：x_0 を 10 進 n 桁の整数，x_0 を 2 乗しそれを 2 n 桁の数とみたとき，その中央の n 桁を x_1, x_1 の 2 乗の中央の n 桁を $x_2\cdots$ とするとき，$x_0, x_1, x_2, \cdots$ が一様乱数系列となる．

E. 合同法：x_0 を任意の整数として，$x_{i+1}\equiv kx_i$ (mod M) とするとき，$x_0, x_1, x_2, \cdots$ は [0, M−1] 上の一様乱数となる．周期は一般に D の方法よりも長い．

4. いろいろな型の乱数

A. 離散量の乱数：$Pr(W=w_j)=p_j (j=1, \cdots c)$ なる分布をもつ乱数 W は，区間 [0, 1] を長さ p_j なる $c+1$ 個の排反で全部を被う区間 Ij に分割し，[0,1] 上の一様乱数が I_j におちたら w_j をとればえられる．

B. $Y=\cos Z$, Z は [0, 2π] 上の一様乱数：[−1, 1] 上の独立な 2 個の一様乱数 x_1, x_2 をとり，$x_1^2+x_2^2>1$ ならそれらを捨て，そうでなければ $Y=x_1/\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ とすればよい．

C. $U=-\ln X$, X は [0, 1] 上の一様乱数：[0,1] 上の一様乱数系列 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ をとり，はじめて $x_1+\cdots+x_n\geqq x_0$ を満たす n が偶数ならば，これらの値を捨て，またこの操作を n が奇数になるまで繰返す．この繰返し回数を t，n が奇数となった系列の最初の値を x_0 とするとき，$U=x_0+t$ が求める値．

D. 密度函数 $f(x)$ $(0\leq x\leq a$ $\max f(x)=b)$ をもつ乱数 X: [0, 1] 上の独立な乱数を U, V とするとき，$V<f(aU)/b$ のときにのみ $X=aU$ を保存し，そうでなければこれら 2 個の乱数を捨てる．このとき X は求める乱数．

E. $W=e^{-x}$, X は [0, k] 上の一様乱数．

F. 密度函数 $f(x)h(x)$ $(0\leq x\leq a$, $\max f=\max h$ をもつ) をもつ乱数．　(高橋磐郎)

CONTRIBUTIONS TO THE THEORY OF GAMES III, IV *Annals of Mathematics Study 39, 40, 1957, 1959*

数年前に出た Contributions I, II は game の理論の基本的な文献として広く利用され，その内容は Mckinsey, Blackwell-Girshick の本にもとり入れられて紹介されて来たが，III, IV はその続篇として最近の理論の発展を集約したものである．IIIは主として zerosum-two-person に関する 23 の論文，IVは一般の n-person に関する 19 の論文を収めている．またIVの末尾には約 1000 篇の標題を上げた文献目録がついている．

以下両書に収められた文献の標題，およびその内容を簡単に紹介しよう．紙面の都合で本号にはIIIについてのべ，IVは次号に紹介する．

1. On Games of Survival; Bilnor, J. & Shapley, L. S. それぞれ一定の金額を持った 2 人の player が一方が破算するまで game を何回もつづけるいわゆる Survival Game を扱ったもの．ここで生きのびることができたときの utility を 1，破算した場合を 0，無限に game がくりかえされる場合は $Q(0\leq Q<1)$ とすると，一定の条件の下で value が存在し，更にそれはある条件では Q に無関係であること，optimal strategy が存在することが示されている．

2. Recursive Games; Everett, H. pay-off が，もう一度同じ或いは他の game を行なうことであるような場合をふくんだ game (例えばジャンケンで「あいこ」になった場合を考えよ) についての分析．一定の条件の下で value が存在し，かつ同じ game においてはつねに同じ手をとるという意味で stationry な ε-best strategy が存在することが示される．

3. Finitary Games; Isbell, J. R. ここでは game の tree にもどっての考察がされている．まず通常の 1 つの play は同じ Information set に 2 度合うことはないという仮定を除くと，個々の Information set で random choice をとるような

behavioral strategy を更に mix する strategy の範囲で一般に n-person game が均衡解を持つことが示される．更に tree を recursive game や stochastic game をふくむような形に拡張して optimal strategy の存在が論ぜられている．

4. Approximation to Bayes Risks in Repeated play; Hannan J. 同じ game を何回もくりかえす場合，相手がこれまでにとった手をもとにして自分の手を決めて行くと，modified regrett というものを基準にすれば，漸近的によい性質を持つ strategy が得られることが示されている．

5. Information in Games with Finite Resources; Gale, D. N個の pure strategy を持つ game をN回行ない，それぞれの strategy を一回ずつ用いなければならないような場合において，どのような順番で用いるのがよいかは途中でこれまでに相手が用いた strategy を知ることができるか否かには無関係で，つねに一様に randomize すればよい．

6. Effective Computability of Winning Strategies; Rabini, M. O. Perfect information infinite game においては winning strategy が存在することは知られているが，それが実際に使えるものであるか否かを，computability の概念を用いて論じている．computable な解の存在しない例も示されている．

7. The Banach-Mazur Game and Banach Category Theorem; Oxtoby, J. C. Banach-Mazur Game とは2人の player が一直線上の区間 $I_n(n=1, 2\cdots)$ を交代に $I_{n+1}<I_n$ となるように取って行って，$\bigcap I_n$ と特定の集合 A との共通部分が空でないならば player I の勝とするものである．この game の拡張および I が勝つための条件が示されている．

8. Topological Games with Perfect Information, Berge, C. play が topological space X の中の点の運動として表わされるような n person game を考える．即ちXの各点ごとにそこではどの player が次の move を行なうか或いは game が終るか，および次に動き得る点の範囲が定められているならば，任意の一点から出発して perfect information game ができる(pursuit game はその一例) このような game について均衡解の存在を論じる．

9. Stochastic Games with Zero Stop Probabilities; Gillette, D. Shapley の定義した stochastic game においては，2人の player は双方がとった手に応じて n 個の position の間を動くとともに各段階ごとにそれぞれ一定の pay-off を与えられる．更に各段階で game が stop する確率が正であるとすると，game の value が存在することは Shapley によって示された．ここでは stop-probability をすべて0にしたとき，平均の pay-off および割引かれた pay-off について一定の条件の下で stationary な optimal strategy が存在することが示されている．

10. Cartesian Products of Termination Games, Holladay, J. C. termination game とは，一つの点をいくつかの position の間を2人の player が交代に，それが termination に達するまで動かし，終った場所によって勝ち負けを決めるものである．このようなものを n 個ならべて，一回の move ではそのうちのどれか1つの点だけを動かすことができるようにしたものをその Cartesian product という．Nim(いくつかの碁石の山があって，一回には一つの山からが碁石を取り除くことができないとする．2人で交代に取って行って最後の一個を取ったものが負けとする)がその典型的な例であるが，一般の場合が Nim と同じように扱えることを示している．

11. A Study of Simple Games through Experiments on Computing Machines; Walden, W. 2人の player が交代に n 個の数 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ $\alpha_t=0, 1$ をえらび，$(\alpha_1\cdots\alpha_n)\in W$ ならば player I の勝ちとする．2人の player の skill(つまりどれだけ早くから見通すことができるか)によって勝つ確率が変化する模様をモンテカルロ法により実験的に調べた．

12. Games with Partial Information; Scarf, H. E. and Shapley, L. S. ここでは，相手の move を何回かの move の後で知ることができるような game を考えている．適当に subgame を定義することによって，game の value についての recursive な関係を導き，また optimal strategy を求めることができることが示されている．

13. A Discrete Evasion Game; Dubins, L. E. 碁盤目のような格子の上を船が逃げ，飛行機がそれを爆撃しようとする．飛行機は船が2目だけ動く時間前に船の動きを予測して爆撃しなければならないとする．このときの game の value, 及び船は optimal strategy を持ち飛行機は optimal strategy を持たないことが示される．evasion game の最も簡単な例．

14. An Infinite Move Game with a Lag; Karlin, S. 13 と全く同じ問題を別の方法で扱い，全く同じ結果を得ている．

15. The Effect of Psychological Attitudes on the Outcomes of Games; Kemeny, J. G. and Thompson, G. L. Game の payoff が貨幣で与えられる場合，player が得る utility は貨幣量の函数になる．player が自分の効用を payoff と見なして行動する場合，どうなるかを論じている．utility を基準とした game の optimal strategy がもとの貨幣額で表わされた game の optimal strategy とつねに一致するためには，効用函数が線型または指数型でなければならないことが示される．

16. On a Game Without a Value; Sion, M. and Wolfe, P. $0\leq x\leq 1$ $0\leq y\leq 1$ で定義されたある簡単な函数 $K(x, y)$ を payoff とする game が value を持たないことが示されている．またこのような game を extensive form にもどしたものがどんなものになるかも論じている．

17. A Rational Game on the Square; Gross, O. $0\leq x\leq 1$ $0\leq y\leq 1$ で定義されたある有理函数 $M(x, y)$ を payoff とする game で Cantor 函数をを唯一の solution とするものを作る．

18. Tactical Problems Involving Several Actions; Restrepo, R. 2人の人がそれぞれ m 個および n 個の弾丸を持って決闘する場合を考える．時間 $t(0\leq t\leq 1)$ においてそれぞれが相手を倒す確率を $P(t)$, $Q(t)$ とする．$P(0)=Q(0)=0$ $P(t)=Q(t)=1$ としたとき，optimal strategy を表わす一般式が求められた．

19. Multistage Poker Models; Karlin, S. and Restrepo, R. 2人の player がそれぞれ互いに独立に (0, 1) の区間に一様分布する量 X，および Y を与えられる．player は自分の "手" (X または Y) を見て「降りる」か「どれだけ賭ける」かを決めるものとする．このような game の optimal strategy が計算されている．

20. On Games Described by Bell Shaped Kernels; Karlin, S. $0\leq x\leq 1$ $0\leq y\leq 1$ で定義された函数 $K(x, y)$ を pay-off とする game において，もし $K(x, y)=\phi(x-y)$ で ϕ が Polya 型の密度函数の持つ条件を満たすとき，optimal strategy は step-function になることが示されている．また類似した kernel についての結果も計算されている．

21. On Differential Games with Survival Pay-off; Scarf, H. E. 一つの点 x を2人の player が n 次元空間の中を連続的に動かして行く場合を考える．点の速度ベクトルは，その点の位置と，その時点において，player がえらんだ手 y および z によって定められる即ち $\dot{x}=g(x, y, z)$ と表わされる．このようなものを微分ゲームという．

ここではゲームは x が一定の境界に達したとき終り，そのときの点の位置によって pay-off が定められる場合を考える．そのとき，game の value は x の初期値の函数として与えられ，かつ一定の微分方程式を満足するであろうことが予想される．特定の場合に，時点を discrete にとった game の value が，この微分方程式の解に収斂することが示される．

22. A Note on Differential Games of Prescribed Duration; Fleming, W. H. 微分ゲームにおいて，pay-off を一定時間後の点の位置によって定める場合を考えている．一定の条件の下で discrete に時点をとった game の value がある一階の偏微分方程式の解に収斂することが示されている．

23. On Differential Games with Integral Payoff; Berkovitz, L. D. and Fleming, W. H. 微分ゲームの payoff が

$$P=\int_0^T f(x, y, z)\,dt$$

で定義される場合を考える，y, z の strategy のクラスを適当に定義して，その範囲でこのゲームが saddle point をもつための条件を論じている．そうして一つの例について計算していいる．

(竹内　啓)