平行位相を持つ窓口の待合せ行列

防衛大学校
応用物理学教室　岸　尚

1. まえがき

窓口のサービスが k 個の Phase(位相)から成立って居り，客はこれらの位相のサービスを順次に受けて行き，最後の位相のサービスが終ったとき窓口から出る，という窓口を考え，特に各位相のサービス時間が指数分布に従うものとすれば，窓口全体としてのサービス時間は Erlang 分布に従う．

これに対応して，窓口のサービスが k 個の位相から成立ち，客はこれらの位相のサービスを同時に受け始め，すべてのサービスが終ったとき窓口から出る，という窓口を考え，特に各位相のサービス時間が指数分布に従い，客の到着がポアソン分布に従う場合の定常解を微分階差方程式による方法を用いて求める．この窓口のサービス時間は $k=1$ のとき指数分布に従い，$k\to\infty$ のとき一定サービス時間となり，$1<k<\infty$ ではこれらの中間の分布に従うこと k-Erlang 分布と同様である(第 2.1 節)．

なお，この窓口は多少の解釈を施し直せば，G.C.Hunt が "Sequential Arrays of Waiting Lines" [1)2)] で示した第4の場合，即ち，"Unpaced Belt Production Line" と本質的に異ならないことを第 2.2 節に指摘し，また Hunt の第2の場合とも $k=2$ の場合は類似しているので，Hunt の問題を一般化して我々のそれとの関係を第3及び 3.1 節において論ずる．

2. 平行位相を持つ窓口

次のような仮定に従う窓口：

1. 窓口には1人の客しかはいれない．
2. 窓口にはいった客は，同時に，独立な k 個の位相のサービスを受け始め，すべてのサービスが終ったとき窓口から出る．待っている客があれば，そのサービスが引続き始まる．

を考える．この窓口は k-Erlang channel に似ているが，位相が直列でなく並列に並んでいるという点で異なる．

この節では更に

3. k 個の位相のサービス時間は何れも平均 $1/\mu$ の指数分布に従う．
4. 窓口の外には無限長の行列が許される．
5. 客の到着時間間隔が，平均 $1/\lambda$ の指数分布に従う．

という場合の定常状態を取扱う．

時刻 t において窓口に客がいない確率を $P_0(t)$，サービス中のものを含めて n 人の客がいて，

k のうち i 個$(1 \leqq i \leqq k)$の位相がサービス中である確率を $P_{n,i}(t)$ で表わすと，次の微分階差方程式が成立つ．

$$\begin{cases} P_0'(t) = P_{11}(t) - \rho P_0(t) \\ P_n',_k(t) = -(\rho + k) P_{n,k}(t) + \rho P_{n-1,k}(t) + P_{n+1,1}(t), n \geqq 1 \\ P_n',_i(t) = -(\rho + i) P_{n,i}(t) + \rho P_{n-1,i}(t) + (i+1) P_{n,i+1}(t), n \geqq 1, 1 \leqq i \leqq k-1 \end{cases} \tag{1}$$

ここに $'$ は(μt)に関する微分を表わし，

$$\rho = \lambda / \mu \tag{2}$$

および　$P_{0,k}(t) \equiv P_0(t)$，$P_{0,i}(t) \equiv 0 (1 \leqq i \leqq k-1)$

とする．定常状態，

$$P_{n,i}(t) = p_{n,i} \tag{3}$$

を仮定すると(1)式は次の階差方程式となる．

$$\begin{cases} \rho p_0 = p_{1,1} \\ (\rho + k) p_{n,k} = \rho p_{n-1,k} + p_{n+1,1} \quad n \geqq 1 \\ (\rho + i) p_{n,i} = \rho p_{n-1,i} + (i+1) p_{n,i+1}, \quad n \geqq 1, \ 1 \leqq i \leqq k-1 \end{cases} \tag{4}$$

n 人の客がいる状態の確率を p_n とする．即ち，

$$p_n = \sum_{i=1}^{k} p_{n,i} \tag{5}$$

とおくと，(4)を用いて

$$\rho p_n = p_{n+1,1} \tag{6}$$

が成立つことが解る．また，母函数

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{n,i} z^{n-1} = F_i(z) \qquad 1 \leqq i \leqq k \tag{7}$$

を導入すると(4)から

$$F_i(z) = \prod_{m=1}^{i-1} \left[\frac{m + \rho(1-z)}{m+1} \right] \cdot F_1(z), \qquad 2 \leqq i \leqq k \tag{8}$$

及び

$$F_1(z) = z[k + \rho(1-z)] F_k(z) + \rho(1-z) p_0 \tag{9}$$

が得られる．(8)(9)から $F_1(z)$ を求めると

$$F_1(z) = \frac{\rho p_0}{1 - z \sum_{m=1}^{k} A_m \rho^m (1-z)^{m-1}} \tag{10}$$

ただし

$$(k+1) \prod_{m=1}^{k} \left[\frac{m + \rho(1-z)}{m+1} \right] \equiv \sum_{m=0}^{k} A_m \rho^m (1-z)^m \tag{11}$$

$$A_0 = 1, \ A_1 = \gamma, \ A_2 = \frac{1}{2} (\gamma^2 - \gamma_{(2)}),$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}(\gamma^3 - 3\gamma\gamma_{(2)} + 2\gamma_{(3)}) \tag{12}$$

.....

.....

ここに

$$\begin{cases} \gamma \quad = \gamma(k) = \sum_{m=1}^{k} 1/\mathrm{m} \\ \gamma_{(2)} = \gamma_{(2)}(k) = \sum_{m=1}^{k} 1/\mathrm{m}^2 \\ \gamma_{(3)} = \gamma_{(3)}(k) = \sum_{m=1}^{k} 1/\mathrm{m}^3 \end{cases} \tag{13}$$

なお，$k \to \infty$ とすると γ は $\log k$ の order で発散するが，$\gamma_{(2)}$, $\gamma_{(3)}$ は収束することに注意．$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = F_1(1)/\rho = p_0/(1-\gamma\rho)$ の関係により

$$p_0 = 1 - \gamma\rho \tag{14}$$

$p_0 > 0$ の条件は

$$\rho < 1/\gamma \tag{15}$$

いくつかの k の値に応ずる ρ の上限 $1/\gamma$ を第1表に示す．

第1表　ρ の上限，$1/\gamma$

k	1	2	3	4	5
$1/\gamma$	1	2/3	6/11	12/25	60/137

個々の $p_{n,i}$ は母函数より求めることが出来るが，可成り複雑な式になるので，ここには示さない．次の 2, 3 の量を示すにとどめる．

i 個の位相がサービス中である確率：

$$\pi(i) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{n,i} = \frac{F_1(1)}{i} = \frac{\rho}{i}, \qquad 1 \leqq i \leqq k \tag{16a}$$

特定の位相のみがサービスをしている確率：

$$\pi_{10} = \frac{\pi(1)}{k} = \frac{\rho}{k} \tag{16 b}$$

特定の位相がサービスをしている確率：

$$\pi_1 = \sum_{i=1}^{k} \frac{i\pi(i)}{k} = \rho \tag{16 c}$$

これらは直観的に予想される値であろう．次の量は重要である．

待っている客の平均数は

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) p_n \\ &= \frac{1}{\rho}[F_1'(1) - F_1(1) + p_{11}] \\ &= \frac{\gamma^2 + \gamma_{(2)}}{2(1-\gamma\rho)} \rho^2 \end{aligned} \tag{17}$$

サービス中の客を含めた，客の平均数及びその分散は

$$L=\sum_{n=0}^{\infty} np_n$$

$$=\frac{1}{\rho}F_1'(1)$$

$$=\frac{2\gamma-(\gamma^2-\gamma_{(2)})\rho}{2(1-\gamma\rho)}\rho \tag{18}$$

$$\Delta L^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n-L)^2p_n$$

$$=\frac{1}{\rho}[F_1''(1)+F_1'(1)]-L^2$$

$$=\frac{\gamma-\frac{3}{2}(\gamma^2-\gamma_{(2)})\rho+\frac{1}{3}(\gamma^3-3\gamma\gamma_{(2)}+2\gamma_{(3)})\rho^2}{1-\gamma\rho}\rho$$

$$+\frac{\left[\gamma-\frac{1}{2}(\gamma^2-\gamma_{(2)})\rho\right]^2}{(1-\gamma\rho)^2}\rho^2 \tag{19}$$

2. 1 平行位相を持つ窓口による Simulation

前節で取扱った窓口の各位相のサービス時間の平均を更めて $1/\gamma\mu$(γ は(13)で与えられる k の函数)でおきかえると，窓口全体としてのサービス時間の分布函数 $B_k(t)$ 及び密度函数 $b_k(t)$ は

$$B_k(t)=(1-e^{-\gamma\mu t})^k \tag{20}$$

$$b_k(t)=dB_k/dt$$

$$=k\gamma\mu[B_{k-1}(t)-B_k(t)] \tag{21}$$

であり，密度函数は

$$t=\frac{\log k}{\gamma}\cdot\frac{1}{\mu} \tag{22}$$

で最大値を持つ．(21)を用いて計算するとサービス時間の平均及び分散は

$$E[t]=\int_0^{\infty}tb_k(t)\,dt=\frac{1}{\mu} \tag{23}$$

及び

$$E[\Delta t^2]=\int_0^{\infty}\left(t-\frac{1}{\mu}\right)^2b_k(t)\,dt=\frac{\gamma_{(2)}}{\gamma^2}\frac{1}{\mu^2} \tag{24}$$

となる．従って平均は k に依らず，また，$\gamma_{(2)}\leqq\gamma^2$(等号は $k=1$ のときに成立つ)であるから分散は平均の2乗より大きくなることはなく，$k\to\infty$ の極限で0となる．従って k-平行指数位相を持つ窓口のサービス時間は k-Erlang 分布(即ち k-直列位相より成る窓口)の場合と同様に，$k=1$ のとき指数分布に従い，$k\to\infty$ で一定サービス時間となり，$1<k<\infty$ のときはこれら両極限の中間の分布に従う．故にこの分布を現実の分布に対する simulation に用いることが出来るだろう．即ち，現実の分布に最も近い分布を与える k をえらび，窓口は仮想的な k 個の，並列の位相から成り立つものと考えれば解析に便利である．平均サービス時間の2乗と分散との比

は k-Erlang 分布の場合は k で，この窓口の分布の場合は $\gamma^2/\gamma_{(2)}$ に等しい．この値をいくつかの k の値に対して示せば第2表の通り．

第 2 表

k	1	2	3	4	5	10	20
$\gamma^2/\gamma_{(2)}$	1.00	1.80	2.47	3.05	3.31	5.54	8.11

客の到着時間間隔が平均 $1/\lambda$ の指数分布に従い，無限行列が許されるような場合の定常解は前節の結果の μ を $\gamma\mu$ でおきかえれば得られる．即ち，この窓口のサービス時間の平均を $1/\mu$, $\lambda/\mu=\rho$ とすると前節の ρ を ρ/γ でおきかえれば必要な結果が求まる．

しかしながら Erlang 分布の場合の方が計算過程並びに結果が簡単であるから，k-Erlang 分布で充分 simulate 出来る場合に k-平行位相より成る窓口を用いる必要はないものと思われる．

2. 2 Unpaced Belt Production Line との関係

"unpaced belt production line" とは Hunt[1] によって提唱された，次のような窓口の列をいう．k 個の窓口の列があり，客は順次窓口でサービスを受けて行くが，どの窓口が空くことも，また(第1の窓口以外は)窓口の前に行列をつくることも許されない．但し第1の窓口の前には無限長の行列も可能である．即ち，各窓口にいる k 単位の客は，各々のサービスが終り，かつ，サービスを待っている客があるときに限り，同時に1段階ずつ移動し，最後の窓口にいた客は窓口の系列から外へ出る．

このような窓口の系列は第2節で示した k-平行位相を持つ窓口と等価で，適当な解釈を施せばその結果がそのまま成立つ．即ち，k 個の窓口の各々にはいった客が同時に独立なサービスを受け始め，全部のサービスが終ったときに同時に1段階移動することは，1単位の客が k-平行位相を持つ窓口にはいりサービスを受け終えて窓口から出ることに対応する．後者の窓口は空くことがあるが(その確率：p_0)，前者にあっては窓口は空くことなく，この場合 p_0 はサービスが終った k 単位が次の客の到着を待たねばならない確率と解釈されねばならぬ，等．

なお p_0 が正でなければ行列は無限長になるから，定常状態が実現されるためには(15)の関係が必要である．これは Hunt が求めた条件の一般化に外ならない．

3. $k=2$ で2つの位相の平均サービス時間が異なる場合

第2節の窓口で特に $k=2$ とし位相1及び2の平均サービス時間が異なり $1/\mu_1$ 及び $1/\mu_2$ で与えられる場合を取扱う．

この窓口のサービス時間の平均及び分散は

$$E[t]=\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}-\frac{1}{\mu_1+\mu_2} \tag{25}$$

$$E[\Delta t^2]=\frac{1}{\mu_1{}^2}+\frac{1}{\mu_2{}^2}-\frac{3}{(\mu_1+\mu_2)^2} \tag{26}$$

で，分散は常に平均の2乗より大きくなることはない．平均を一定に保つなら，$\mu_1=\mu_2$ のとき分

散は最も小さくなり，μ_1(又は μ_2)が無限大のとき最も大きく，平均の2乗に等しくなる．

時刻 t に於いて窓口に客がいない確率を $P_0(t)$，客が n 人いて

位相 1，2 ともサービス中の確率を $P_{n,0}(t)$，

位相1はサービス中，2は終っている確率を $P_{n,1}(t)$

位相2はサービス中，1は終っている確率を $P_{n,2}(t)$

で表わすと次の方程式が成立つ．

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu_1 P_{1,1}(t) + \mu_2 P_{1,2}(t) \\ P_{n,1}'(t) = -(\lambda+\mu_1) P_{n,1}(t) + \lambda P_{n-1,1}(t) + \mu_2 P_{n,0}(t), \quad n \geqq 1 \\ P_{n,2}'(t) = -(\lambda+\mu_2) P_{n,2}(t) + \lambda P_{n-1,2}(t) + \mu_1 P_{n,0}(t), \quad n \geqq 1 \\ P_{n,0}'(t) = -(\lambda+\mu_1+\mu_2) P_{n,0}(t) + \lambda P_{n-1,0}(t) + \mu_1 P_{n+1,1}(t) + \mu_2 P_{n+1,2}(t), \quad n \geqq 1 \end{cases} \tag{27}$$

ただし $'$ は t に関する微分を表わし，

$$P_{0,0}(t) \equiv P_0(t), \quad P_{0,1}(t) = P_{0,2}(t) \equiv 0$$

と定義する．定常状態

$$P_{n,i}(t) = p_{n,i}$$

を仮定し，

$$\lambda/\mu_i \equiv \rho_i \equiv 1/\sigma_i \quad (i = 1,\ 2)$$

とおくと次の式を得る．

$$\begin{cases} p_0 = \sigma_1 p_{1,1} + \sigma_2 p_{1,2} \\ (1+\sigma_1) p_{n,1} = p_{n-1,1} + \sigma_2 p_{n,0}, \quad n \geqq 1 \\ (1+\sigma_2) p_{n,2} = p_{n-1,2} + \sigma_1 p_{n,0}, \quad n \geqq 1 \\ (1+\sigma_1+\sigma_2) p_{n,0} = p_{n-1,0} + \sigma_1 p_{n+1,1} + \sigma_2 p_{n+1,2}, \quad n \geqq 1 \end{cases} \tag{28}$$

ただし

$$p_{0,0} \equiv p_0, \quad p_{0,1} = p_{0,2} \equiv 0$$

母函数

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{n,i}\, z^{n-1} = F_i(z), \quad i = 0, 1, 2 \tag{29}$$

を導入して(28)を用いると

$$\begin{cases} F_1(z) = \dfrac{\sigma_2}{1+\sigma_1-z} F_0(z) \\ F_2(z) = \dfrac{\sigma_1}{1+\sigma_2-z} F_0(z) \end{cases} \tag{30}$$

及び

$$F_2(z) = \frac{\sigma_1(1+\sigma_1-z)}{\sigma_1\sigma_2(2+\sigma_1+\sigma_2-z) - z(1+\sigma_1+\sigma_2-z)^2} p_0 \tag{31}$$

が得られる．$\sum_{i=0}^{2} F_i(1) + p_0 = 1$ の関係を用いると容易に

$$p_0 = 1 - \frac{\rho_1^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_2^2}{\rho_1 + \rho_2} \tag{32}$$

が求まる．ただし

$$\rho_1^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_2^2 < \rho_1 + \rho_2 \tag{33}$$

を仮定する．

母函数は可成り複雑であるが，次のような確率は直ちに求まる．

位相 1，2 ともサービス中である確率：

$$\pi_{1,2} = F_0(1) = \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \tag{34a}$$

位相 i のみサービス中である確率：

$$\pi_{i0} = F_i(1) = \frac{\rho_i^2}{\rho_1 + \rho_2},\ i = 1, 2 \tag{34b}$$

位相 i がサービス中の確率：

$$\pi_i = F_0(1) + F_i(1) = \rho_i,\ i = 1, 2 \tag{34c}$$

次の量は重要である．

客の平均数：

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=0}^{2}\sum_{n=0}^{\infty} n p_{n,i} \\ &= \sum_{i=0}^{2}[F'_i(1) + F_i(1)] \\ &= \frac{\rho_1^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_2^2 - \dfrac{2\rho_1^2\rho_2^2}{\rho_1 + \rho_2}}{\rho_1 + \rho_2 - (\rho_1^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_2^2)} \end{aligned} \tag{35}$$

待っている客の平均数：

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{i=0}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)p_{n,i} \\ &= \sum_{i=0}^{2} F_i'(1) \\ &= \frac{\rho_1^3 + \rho_2^3 + \dfrac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}(\rho_1^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_2^2)}{\rho_1 + \rho_2 - (\rho_1^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_2^2)} \end{aligned} \tag{36}$$

$p_{n,i}$ は $k = 2$ のこの場合でも複雑であるので，特に $\rho_1 = \rho_2 \equiv \rho$ のときの値のみを示す．

$$\begin{cases} p_{n+1,1} = p_{n+1,2} = \dfrac{\rho^{n+1}(3+\rho)^n}{2^{n+1}} p_0 \displaystyle\sum_{m=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(n-m)!}{m!\,(n-2m)!}\left[-\frac{2}{(3+\rho)^2}\right]^m & n \geqq 0 \\ p_{n+1,0} = (1+\rho)p_{n+1,1} - \rho p_{n,1},\ n \geqq 1 \\ p_{1,0} = (1+\rho)\rho_{1,1} \end{cases} \tag{37}$$

3.1 類似の窓口

Hunt[1] によって示された次のような窓口の列は第3節で述べた窓口と密接な関係がある．

次の仮定に従う2つの窓口の列：

1. 客は2つの窓口及IびIIのサービスを順次に受ける．これらのサービス時間は平均 $1/\mu_1$, $1/\mu_2$ の指数分布に従う．
2. 第1の窓口の前には無限長の行列が許されるが，第2の窓口には行列は出来ないものとする．従って窓口IIに客がいるときは，Iの客のサービスがたとえ終ってもこの客は窓口を出ることなく，それを無駄にふさいでしまう(これを block するという)．

に到着時間間隔が平均 $1/\lambda$ の指数分布に従うような客が到着する場合を考える．

時刻 t に於いて何れの窓口にも客がいない確率を $P_0(t)$，窓口IIにのみ客がいる確率を $P_{0,1}(t)$，窓口Iには，窓口の中にいる客を含めて n 人居り，かつ，

窓口IIに客がいない確率を $P_{n,0}(t)$，

窓口I，IIともサービス中である確率を $P_{n,1}(t)$，

窓口IIの客はサービス中で，Iの客がサービスを終えた後窓口を block している確率を $P_{n,2}(t)$ で表わすと次の微分階差方程式が成立つ．

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu_2 P_{0,1}(t) \\ P_{0,1}'(t) = -(\lambda+\mu_2)P_{0,1}(t) + \mu_1 P_{1,0}(t) + \mu_2 P_{1,2}(t) \\ P_{n,0}'(t) = -(\lambda+\mu_1)P_{n,0}(t) + \lambda P_{n-1,0}(t) + \mu_2 P_{n,1}(t), \quad n \geqq 1 \\ P_{n,2}'(t) = -(\lambda+\mu_2)P_{n,2}(t) + \lambda P_{n-1,2}(t) + \mu_1 P_{n,1}(t), \quad n \geqq 1 \\ P_{n,1}'(t) = -(\lambda+\mu_1+\mu_2)P_{n,1}(t) + \lambda P_{n-1,1}(t) + \mu_1 P_{n+1,0}(t) + \mu_2 P_{n+1,2}(t), \quad n \geqq 1 \end{cases} \tag{38}$$

ただし $'$ は t に関する微分を表わし，

$$P_{0,0}(t) \equiv P_0(t), \quad P_{0,2}(t) \equiv 0$$

とする．これらの方程式の，$n \geqq 1$ の部分は添字 1, 0 を交換すれば第3節に示した方程式(27)と完全に一致する．従って第3節に得られたものと類似の結果がこの場合にも成立つことが予想される．

定常状態 $$P_{n,i}(t) = p_{n,i}$$

を仮定し，

$$\lambda/\mu_i \equiv \rho_i \equiv 1/\sigma_i \qquad i = 1, 2$$

とおくと(38)は

$$\begin{cases} p_0 = \sigma_2 p_{0,1} \\ (1+\sigma_2)p_{0,1} = \sigma_1 p_{1,0} + \sigma_2 p_{1,2} \\ (1+\sigma_1)p_{n,0} = p_{n-1,0} + \sigma_2 p_{n,1}, \quad n \geqq 1 \\ (1+\sigma_2)p_{n,2} = p_{n-1,2} + \sigma_1 p_{n,1}, \quad n \geqq 1 \\ (1+\sigma_1+\sigma_2)p_{n,1} = p_{n-1,1} + \sigma_1 p_{n+1,0} + \sigma_2 p_{n+1,2}, \quad n \geqq 1 \end{cases} \tag{39}$$

ただし

$$p_{0,0} \equiv p_0, \quad p_{0,2} \equiv 0$$

母函数

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{n,i}\, z^{n-1} = F_i(z) \qquad i = 0, 1, 2 \tag{40}$$

を導入すると

$$\begin{cases} F_0(z) = \dfrac{\sigma_2}{1+\sigma_1-z} F_1(z) + \dfrac{1}{1+\sigma_1-z} p_0 \\ F_2(z) = \dfrac{\sigma_1}{1+\sigma_2-z} F_1(z) \end{cases} \tag{41}$$

及び

$$F_2(z) = \frac{\sigma_1(1+\sigma_1+\sigma_2-z)}{\sigma_1\sigma_2(2+\sigma_1+\sigma_2-z) - z(1+\sigma_1+\sigma_2-z)^2} \frac{p_0}{\sigma_2} \tag{42}$$

が得られ,

$$p_0 = \frac{1 - \dfrac{\rho_1^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_2^2}{\rho_1+\rho_2}}{1 + \dfrac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}} \tag{43}$$

となる．この式は前節の p_0 の式(32)と分母の $1+\rho_1\rho_2/(\rho_1+\rho_2)$ という因子だけ違う．p_0 が正であるための条件は3節の(33)と一致する．

前節の結果と比較するために簡単な形に求まる 2, 3 の確率を示そう．これは(34)式に対応する．

窓口Ⅰ，Ⅱともサービス中の確率：

$$\pi_{1,2} = F_1(1) = \frac{\rho_1\rho_2}{1 + \dfrac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}} \tag{44a}$$

窓口Ⅰのみサービス中の確率：

$$\pi_{1,0} = F_0(1) = \rho_1 \frac{1 - \dfrac{\rho_2^2}{\rho_1+\rho_2}}{1 + \dfrac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}} \tag{44b}$$

窓口Ⅰの客が窓口を block している確率：

$$\pi_{1*} = F_2(1) = \frac{\rho_2^2}{1 + \dfrac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}} \tag{44b'}$$

窓口Ⅱのみサービスをしている確率：

$$\pi_{2,0} = F_2(1) + p_{0,1} = \rho_2 \frac{1 - \dfrac{\rho_1^2}{\rho_1+\rho_2}}{1 + \dfrac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}} \tag{44b''}$$

窓口Ⅰがサービスをしている確率：

$$\pi_1 = F_1(1) + F_0(1) = \rho_1 \tag{44c}$$

窓口IIがサービスをしている確率：

$$\pi_2 = F_1(1) + F_2(1) + p_{0,1} = \rho_2 \tag{44c'}$$

窓口Iの外で待っている客の平均数：

$$L_q = \frac{\rho_1\rho_2 \dfrac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{\rho_1 + \rho_2} + \rho_2^3 + \rho_1^2}{\left(1 + \dfrac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\right)\left(1 + \dfrac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} - (\rho_1 + \rho_2)\right)} \tag{45}$$

待っている客の平均数：

$$\begin{aligned} L_q^* &= L_q + \pi_{1*} \\ &= \frac{(\rho_1^2 + \rho_2^2)\left(1 + \dfrac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\right) - \dfrac{\rho_1^2\rho_2^2}{\rho_1 + \rho_2}}{\left(1 + \dfrac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\right)\left(1 + \dfrac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} - (\rho_1 + \rho_2)\right)} \end{aligned} \tag{46}$$

L_q^* は ρ_1, ρ_2 に関して対称であるが，L_q は対称でない．第 1，第 2 の窓口の順序を換えるとき即ち，ρ_1, ρ_2 を交換したときの上式を $\overline{L_q^*}$，$\overline{L_q}$ とかくと

$$\begin{cases} L_q - \overline{L_q} = \dfrac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{1 + \dfrac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}} \\ L_q^* - \overline{L_q^*} = 0 \end{cases}$$

となり，平均サービス時間の短かい方の窓口を前に置いた方が窓口の外で待っている客の平均数は減るが(窓口の中で待っている者，即ち block している者をも含めれば)，待っている客の平均数は窓口の交換によって変らないことが解る．

以上は Hunt による窓口の系列の第 2 の場合を特に $k = 2$ について一般化したものであるが $k \geqq 3$ のときは，計算は急速に尨大となり，第 3 節の $k \geqq 3$ の場合との対応もつかなくなる．これは系列中の窓口の各所において blocking が生じうるからである．

終りに，御討論下さった防衛大学校数学教室，平賀義彦助教授に感謝する．

文　　献

1) Hunt, G. C., "Sequential Arrays of Waiting Lines", Opns. Res. 4, (1956), pp. 674-683.

2) Morse, P. M., Queues, Inventories and Maintenance, John Wiley and Sons, New York, 1958, Chapter 4.