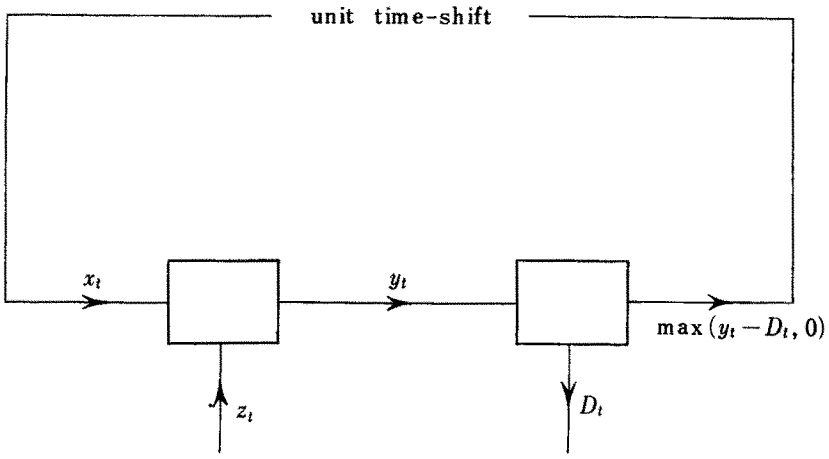
在庫管理の Dynamic Programming

電気通信大学数学研究室　坂　口　　実

1. 数学的 model

在庫管理の問題で数学的 model を作り，それを dynamic programming の方法で解析することは，Bellman その他による多くの研究(Econometrica, Operations Research, Management Science などに散見)がある．

数学的 model は下に示すような一つの多段決定過程である．



x_t : 第 t 期首における initial stock
y_t : 第 t 期首における starting stock
$z_t = y_t - x_t$: 第 t 期首における order の量($\geqq 0$)
D_t : 第 t 期中における需要量．一般に或る確率過程に従う．

確率的漸化式

$$x_{t+1} = \max(x_t + z_t - D_t,\ 0)$$

において，需要量 D_t が random term，注文量 $z_t = z_t(\cdots, D_{t-1}\ ;\ x_t)$ が controling term のとき，損失函数の期待値

$$\sum_t a^t E\left[W_t(x_t, y_t\,;\, D_t)\right]$$

(有限又は無限の和．$0 < a \leqq 1$ は割引率)を，或る適当な意味で最小にしようとする．最適決定 z_t，あるいは y_t は各 t に対し x_t の函数となることはいうまでもない．最適決定の時系列 $\left\{z_t\right\}_{t=1}^{\infty}$，$\left\{y_t\right\}_{t=1}^{\infty}$ をそれぞれ最適注文政策，最適在庫政策という．

いま最も簡単な場合を考えて，$\{D_t\}$ が同一分布に従う独立確率変数列で，密度函数 $\varphi(v)$ が既知とする．さらに W_t は皆同じ W とし

$$E\{W(x,y;D\} \equiv g(y-x) + \int_y^\infty \Psi(v,y)\varphi(v)dv$$

ただし，　$g(z)$……量 z の注文に対する注文費用

$\Psi(v,y)$……在庫量 y のとき過大需要 $v(>y)$ に対する penalty cost

$\varphi(v)$ ……需要量分布の密度函数

とするとき

$u(x)$ ……initial stock x のとき最適注文政策を用いたときの total cost

とおくと

$$u(x) = \min_{y \geqq x}\left[g(y-x) + a\left\{\int_y^\infty (\Psi(v,y)+u(0))\varphi(v)dv + \int_0^y u(y-v)\varphi(v)dv\right\}\right]$$

の形の函数方程式が得られる．

ここで次の仮定がおかれていることに注意する：

(i)　政策決定者は注文をするかしないかの何れかで，返品は許されない．すなわち $y_t \geqq x_t$.

(ii)　注文がなされたときは，その全部の量が即座に引渡される．

(iii)　注文は期首に行なわれ，需要はその期の期末に集中して生ずると考える(penalty cost は次期費用に算入される)．

(iv)　需要量の従う確率分布法則が既知である．

これらの仮定は，現実の事態に適応するためには，漸次取除き，あるいは修正されねばならない．

したがって，O.R. 研究者にとって，此の方面で今後に望まれる仕事は

① 数学的理想化をできるだけ外して，実際の場合の設定に近づけること．

② 特に，需要量分布が partially known のときの数学的取扱い．

③ 既に得られている数学的な一般定理を，個々の場合に適用して，直ちに使用し得るような具体的な形にすること．

などである．この小報文もこれらの方向における一つの little contribution である．

2. 諸　結　果

注文費用および penalty cost が何れも比例的(比例係数それぞれ k,p)な場合の最適在庫方程式は

$$u(x) = \min_{y \geqq x}\left[k(y-x) + a\left\{\int_y^\infty (p(v-y)+u(0))\varphi(v)dv + \int_0^y u(y-v)\varphi(v)dv\right\}\right] \quad (1)$$

である．両辺に -1 を掛けて $-u(x)$ を改めて $f(x)$ とおくと

$$f(x) = \max_{y \geqq x}\left[-k(y-x) + a\left\{\int_y^\infty (p(y-v)+f(0))\varphi(v)dv + \int_0^y f(y-v)\varphi(v)dv\right\}\right] \quad (1)'$$

となる．したがって(1)と

$$f(x)=\max_{y\geqq x}\left[-k(y-x)+(py+af(0))\int_y^\infty\varphi(v)\,dv+\int_0^y(pv+af(y-v))\varphi(v)\,dv\right] \tag{2}$$

との最適政策は同じ構造である．何故なら (1)′ と (2) との差異は，(1)′ で p を p/a に替えると

$$p\int_y^\infty v\varphi(v)\,dv+p\int_0^y v\varphi(v)\,dv$$

に過ぎず，この量は y に関しては定数であるからである．

(2)の意味：p が今度は単位量当り売価，$f(x)$ が initial stock x のとき最適注文政策を用いてみこみ得る最大収益を表わす．

条件 $0<a<1$；$\varphi(v)>0$，$\int_0^\infty v\varphi(v)\,dv<\infty$ のもとに

[定理 1] (2)は(1)のそれと同じ構造の最適政策をもつ：すなわち，$p>k$ ならば

$$y^*(x)=\max(\bar{x},\ x)$$

ここに $\bar{x}$ は

$$k=\left(p\int_y^\infty+ak\int_0^y\right)\varphi(v)\,bv$$

の唯一つの正根．$p\leqq k$ ならば

$$y^*(x)\equiv x \qquad \text{(全然注文しない)}.$$

次に(1)において，比例的な保管費用(係数 c)が加わった場合の方程式は

$$u(x)=\min_{y\geqq x}\left[cy+k(y-x)+a\left\{\int_y^\infty(p(v-y)+u(0))\varphi(v)\,dv+\int_0^y u(y-v)\varphi(v)\,dv\right\}\right] \tag{3}$$

となる．

[定理 2] 方程式(3)に対して

(i) 最適在庫政策は，$ap>c+k$ ならば

$$y^*(x)=\max(\bar{x},\ x)$$

ここに $\bar{x}$ は

$$c+k=a\left(p\int_y^\infty+k\int_0^y\right)\varphi(v)\,dv \tag{4}$$

の唯一つの正根．$ap\leqq c+k$ ならば

$$y^*(x)\equiv x \qquad \text{(全然注文しない)}.$$

(ii)

$$u(\bar{x})=c\bar{x}+\frac{a}{1-a}\left(p\int_{\bar{x}}^\infty+k\int_0^{\bar{x}}\right)v\varphi(v)\,dv, \tag{5}$$

$$u(0)=k\bar{x}+u(\bar{x}),$$

が成立する．したがって

$$\lim_{a\to 1}(1-a)u(\bar{x})=\lim_{a\to 1}(1-a)u(0)=\left(p\int_{x_0}^{\infty}+k\int_{0}^{x_0}\right)v\varphi(v)\,dv \tag{6}$$

が成立する．ここに x_0 は

$$\int_{x_0}^{\infty}\varphi(v)\,dv=\frac{c}{p-k}$$

の唯一つの正根である．

(例) 需要分布が指数分布

$$\varphi(v)=be^{-bv},\qquad b>0$$

のとき，(4)から限界水準 $\bar{x}$ は

$$\bar{x}=\frac{1}{b}\log\frac{a(p-k)}{c+(1-a)k}$$

となる．これは変形して

$$\bar{x}=\frac{1}{b}+\sqrt{\frac{1}{b^2}}\log\frac{a(p/k-1)}{(c/k+(1-a))e}$$

である．ここに $1/b$ は需要密度 $\varphi(v)$ の平均値，$1/b^2$ は分散である．さらに(5)(6)から，それぞれ

$$u(\bar{x})=u(0)-k\bar{x}=c\bar{x}+\frac{a}{1-a}\left\{\frac{k}{b}+(p-k)\left(\bar{x}+\frac{1}{b}\right)e^{-b\bar{x}}\right\},$$

$$\lim_{a\to 1}(1-a)u(\bar{x})=\lim_{a\to 1}(1-a)u(0)=\frac{1}{b}\left(c+k-c\log\frac{c}{p-k}\right),$$

を得る．

今度は最適在庫政策が二水準政策(two-bin policy)になる例として，注文費用および penalty cost がそれぞれ一定値 K, M, 需要が(0, S)での一様分布に従うときを考える．最適在庫方程式は

$$u(x)=\begin{cases}\min\limits_{x\leqq y\leqq S}\left[K\,\mathrm{sgn}(y-x)+a\left\{(M+u(0))\left(1-\dfrac{y}{S}\right)+\dfrac{1}{S}\displaystyle\int_{0}^{y}u(y-v)\,dv\right\}\right], & 0\leqq x<S,\\[2ex] \dfrac{a}{S}\displaystyle\int_{0}^{S}u(x-v)\,dv, & x\geqq S.\end{cases} \tag{7}$$

[定理 3] 方程式(7)に対する最適在庫政策は，$M>K(e^a-1)^{-1}$ ならば

$$y^*(x)=\begin{cases}S, & 0\leqq x<\bar{x}\\ x, & x\geqq\bar{x}\end{cases}$$

となる．ここに

$$\bar{x}=S\left\{1-\frac{1}{a}\log\left(1+\frac{K}{M}\right)\right\} \tag{8}$$

である．さらに

$$u(x)=\begin{cases} u(0), & 0\leqq x\leqq \bar{x} \\ u(0)+M(1-e^{a(x-\bar{x})/S}) & \bar{x}\leqq x<S \end{cases} \tag{9}$$

ただし

$$u(0)=\frac{M}{1-a}\log\left(1+\frac{K}{M}\right)$$

である．

最後に，注文に対する引渡しに単位期間の遅れがある場合は，最適在庫政策は定水準政策にならない．このときの方程式は

$$u(x)=\min_{z\geqq 0}\left[cx+kz+a\left\{\int_x^\infty (p(v-x)+u(z))\varphi(v)\,dv+\int_0^x u(x-v+z)\varphi(v)\,dv\right\}\right] \tag{10}$$

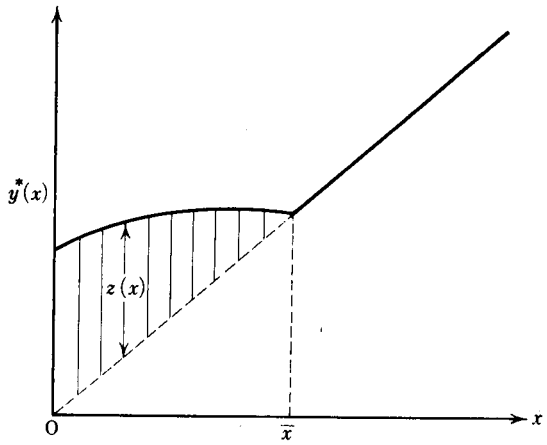
となる．c, k, p はそれぞれ比例的な保管，注文，penalty 費用の比例係数である．第一期の需要に見合うべき量は x であって y ではない．(10) に対する最適注文政策は，$a^2p>k+c$ ならばある適当な数 $\bar{x}$，および $z(\bar{x})=0$ なる非負減少函数 $z(x)$ に対して

$$z^*(x)=\begin{cases} z(x), & 0\leqq x\leqq \bar{x} \\ 0, & x>\bar{x} \end{cases}$$

となるが，$z(x)$ の形は一般には explicit に求まらない．そこで近似として定水準注文政策

$$\bar{z}(x)=\begin{cases} L-x, & 0\leqq x\leqq L \\ 0, & x>L \end{cases}$$

の中である適当な意味で最適なものを求めよう．



［定理 4］ この定水準注文政策を採用するときの全損失(期待値)を $\bar{u}(x)$ とすると

$$\lim_{a\to 1}(1-a)\bar{u}(0)=\lim_{a\to 1}(1-a)\bar{u}(L)$$

$$=p\beta-(p-k)L+(p-k+c)\int_0^L \Psi_1(t,L)\,dt \tag{11}$$

が成立する．ただし

$$\beta\equiv\int_0^\infty v\varphi(v)\,dv,\qquad \Phi(t)\equiv\int_t^\infty \varphi(v)\,dv$$

$$\Psi_a(t,L)\equiv\frac{1-a\Phi(t)}{1-a^2\Phi(t)\Phi(L-t)}\qquad (0\leqq a\leqq 1)$$

である．(11) を最小にするには

$$\frac{c}{p-k+c}=\int_0^L \frac{(1-\Phi(t))\Phi(t)\varphi(L-t)}{\{1-\Phi(t)\Phi(L-t)\}^2}\,dt \tag{12}$$

のように L を定めればよい．

（例） 需要分布が指数分布

$$\varphi(v)=be^{-bv}, \qquad b>0$$

のときには，(12) は計算の結果

$$\frac{c}{p-k+c}=\frac{e^{-bL}(bL+e^{-bL}-1)}{(1-e^{-bL})^2} \tag{12$'$}$$

となる．これから L が一意的に定まることを見るには，次のようにしてもよかろう：

$e^{-bL}=x\,(0<x<1)$ とおくと上の式の右辺は

$$-\frac{x\log x}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x} \tag{13}$$

に等しい．これは Taylor 展開

$$\log x=-(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}-\frac{(1-x)^3}{3}-\cdots\cdots \qquad (0<x<1)$$

を使って変形すると結局

$$x\left(\frac{1}{2}+\frac{1-x}{3}+\frac{(1-x)^2}{4}+\cdots\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)(1-x)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)(1-x)^2-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)(1-x)^3-\cdots\cdots$$

となることがわかる．この式から (13) は (0, 1/2) の範囲内の値をとる増加函数，したがって (12)′ 右辺は L につき減少函数であることがわかる．かくして

$$p>c+k$$

ならば (12)′ はただ一つの根を有する．

3. 略　　証

簡単な証明を付する．

定理 2 の証

（3）右辺の［　］内を y で微分して 0 とおくと

$$c+k+a\left\{-u(0)\varphi(y)-p\int_y^\infty\varphi(v)\,dv+u(0)\varphi(y)+\int_0^y u'(y-v)\varphi(v)\,dv\right\}=0.$$

これと $u'(x)=-k$ とから (4) が出る．

$ap>c+k$ ならば (4) は唯一つの正根をもつ．それを $\bar{x}$ とすると最適在庫政策 は

$y^*(x)=\max(\bar{x},x)$.

$u(x)$ の形をきめるには，$x>\bar{x}$ に対して

$$u(x)=cx+a\left\{\int_x^\infty(p(v-x)+u(0))\varphi(v)\,dv+\int_0^x u(x-v)\varphi(v)\,dv\right\}$$

これに　$u(x)=k(\bar{x}-x)+u(\bar{x})$　$(x<\bar{x})$ を代入して

$$u(x)=cx+a\left\{\int_x^\infty(p(v-x)+k\bar{x}+u(\bar{x}))\varphi(v)\,dv+\int_0^x(k(\bar{x}-x+v)+u(\bar{x}))\varphi(v)\,dv\right\}$$

$$=cx+a(k\bar{x}+u(\bar{x}))+ap\int_x^\infty(v-x)\varphi(v)\,dv-ak\int_0^x(x-v)\varphi(v)\,dv.$$

この式において $x=\bar{x}$ とおき

$$c+k=a\left(p\int_{\bar{x}}^\infty+k\int_0^{\bar{x}}\right)\varphi(v)\,dv$$

を利用して変形すると(5)を得る.

定理3の証

(7)右辺の { } 内の函数は y につき減少函数だから

$$u(x)=\min\left[a\left\{(M+u(0))\left(1-\frac{x}{S}\right)+\frac{1}{S}\int_0^x u(x-v)\,dv\right\},\ K+\frac{a}{S}\int_0^S u(S-v)\,dv\right]$$

$$=\begin{cases}K+\dfrac{a}{S}\displaystyle\int_0^S u(S-v)\,dv, & 0\leqq x\leqq\bar{x}\\ a\left\{\left(M+u(0)\right)\left(1-\dfrac{x}{S}\right)+\dfrac{1}{S}\displaystyle\int_0^x u(x-v)\,dv\right\}, & \bar{x}\leqq x\leqq S\end{cases}\tag{14}$$

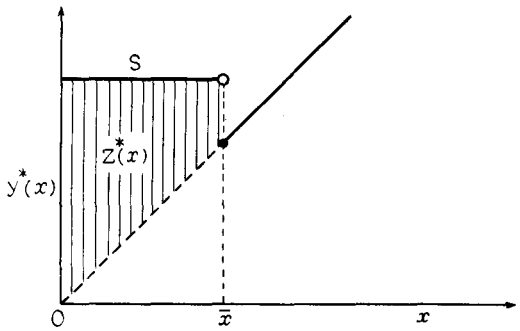
ここに $\bar{x}$ は方程式

$$a\left\{(M+u(0))\left(1-\frac{\bar{x}}{S}\right)+\frac{1}{S}\int_0^{\bar{x}}u(\bar{x}-v)\,dv\right\}$$

$$=K+\frac{a}{S}\int_0^S u(S-v)\,dv\tag{15}$$

の唯一つの根である. 最適政策は

$$y^*(x)=S,\ (0\leqq x<\bar{x}),=x\,(x\geqq\bar{x}).$$



(15)は

$$a(M+u(0))>K+u(S)\tag{16}$$

なる限り根をもつ.

(14)から $u(x)$ を定めよう. $u(x)=u(0)$ $(0\leqq x\leqq\bar{x})$ を(14)に入れて

$$u(x)=a\left\{(M+u(0))\left(1-\frac{x}{S}\right)+\frac{1}{S}\left(\bar{x}u(0)+\int_{\bar{x}}^x u(v)\,dv\right)\right\}$$

$$\therefore\quad u'(x)=\frac{a}{S}\{-(M+u(0))+u(x)\},\qquad \bar{x}<x<S.$$

この微分方程式を初期条件 $u(\bar{x})=u(0)$ のもとに積分すると(9)の下式が出る. $x\geqq S$での $u(x)$ を定めるには(7)から

$$u'(x)=a(u(x)-u(x-S))/S$$

これは $[nS,(n+1)S]$ で次々に線型微分方程式になるから, これらを解けばよい.

(15)をかき直すと

$$a\left(M+u(0)-\frac{M}{S}\bar{x}\right)=K+\frac{a}{S}\left(u(0)\bar{x}+\int_{\bar{x}}^S u(v)\,dv\right)$$

$$\therefore \quad K = aM\left\{1 - \frac{\bar{x}}{S} - \frac{1}{S}\int_{\bar{x}}^{S}(1 - e^{a(x-\bar{x})/S})\,dx\right\}$$
$$= M(e^{a(S-\bar{x})/S} - 1)$$

これから(8)が出る．$0 < \bar{x} < S$ なための条件は $0 < \log(1 + K/M)/a < 1$，すなわち

$$M > K(e^{a} - 1)^{-1}$$

である．$\bar{x}$ の値が定まった後は

$$u(0) = a\left\{(M + u(0))\left(1 - \frac{\bar{x}}{S}\right) + \frac{1}{S}\int_{0}^{\bar{x}} u(\bar{x} - v)\,dv\right\}$$

から $u(0)$ の値が定まる．$u(0)$ の値は K および M とともに単調増大である．これらの値は(16)を満足する．

定理4の証

(10)から

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} cx + k(L - x) + a\left\{\int_{x}^{\infty}(p(v - x) + \bar{u}(L - x))\varphi(v)\,dv + \int_{0}^{x}\bar{u}(L - v)\varphi(v)\,dv\right\}, & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leqq x \leqq L, \\ cx + a\left\{\int_{x}^{\infty}(p(v - x) + \bar{u}(0))\varphi(v)\,dv + \int_{0}^{x}\bar{u}(x - v)\varphi(v)\,dv\right\}, & x > L \end{cases} \tag{17}$$

が得られる．上の式を微分して

$$\bar{u}'(x) = c - k - a(p + \bar{u}'(L - x))\int_{x}^{\infty}\varphi(v)\,dv, \quad 0 < x < L$$

となり $\bar{u}'(x)$ の定差方程式である．これを解くと

$$\bar{u}'(x) = (p - k + c)\,\Psi_a(x, L) - p.$$

積分すると

$$\bar{u}(x) = \bar{u}(0) - px + (p - k + c)\int_{0}^{x}\Psi_a(t, L)\,dt, \quad 0 < x < L$$

この式で $x = L$ とおいたものと，(17)で $x = 0$ とおいて得る

$$\bar{u}(0) = kL + a(p\beta + \bar{u}(L))$$

とから(11)が示される．

(11)を L につき微分して0とおけば(12)が出る．(12)の根が唯一つしかない，すなわち(11)右辺が unimodal なことは

$$p\beta + cL + (p - k + c)\left\{-L + \int_{0}^{L}\Psi_1(t, L)\,dt\right\}$$

と変形してみれば明らか．

$$-L + \int_{0}^{L}\Psi_1(t, L)\,dt$$

が非負減少函数であるからである．