文　献　抄　録

Ellis A. Johnson: The Crisis in Science and Technology and its Effect on Military Development, *Jour. Oper. Res. Soc. Amer.* 6, No. 1, Jan.-Feb. 1958, pp. 11～34.

今日，アメリカは，ソ連の兵器の異常に急速な進歩に直面している．彼等はミサイルでは2年アメリカに先行しており，他の分野でも追いついている．しかし何よりも重大なことは，ソ連が新しい武器を作り出すのに5年かかるだけなのに，アメリカでは10年を要するということである．

問題は科学的知識の量が増すにつれて，それを軍事的な目的に役立たせるように管理して行くことがますます困難になって行くという点にある．

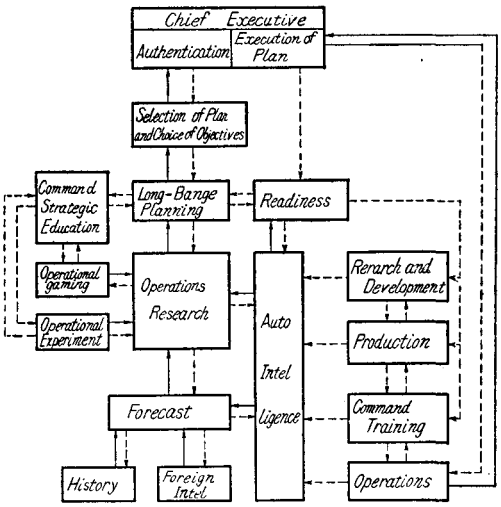
まず最初に，統計的に1人当り国民所得とエネルギー消費量との間に，そうして後者はまた研究開発費の割合に高い相関があることが示される．今後の発展のためにはますます大きな研究開発費を必要とするであろう．

科学的な知識の発展はますます速くなりつつある．知識の量は，（たとえば科学上の定期刊行物の数からも推定されるように）指数曲線を描いて増加すると考えられる．それに応じて軍事上産業上の変化も急速になった．兵器も急速に増大した．また可能な技術上の選撰の数が急速に増大する．その数は，科学的な知識の量のガンマ函数として，したがって時間とともに，たとえば15年で $2!=2$ 倍，30年で $2^2!=24$ 倍，45年で $2^3!=40320$ 倍というように増加するであろう．

ソ連との競争においては，兵器の採用決定から実用に向けられるまでの時間 (lead-time) を短かくすることが決定的な重要性を持つが，知識の量の急速な増大は速やかな決定をますます困難にする．

アメリカにおいて，国防省と民間防衛産業との関係の制度上の欠陥が，lead-time を必要以上に長くしている．それは開発研究の主要な担い手である民間の側に主体性と責任とが与えられていないこと，支払いが費用＋一定利潤率制であるため，技術上の新発明に対する刺戟がないこと，研究スタッフを恒久的に抱えるための保証がないこと，情報が充分交換されないこと等である．このような点では第二次大戦中の方が条件はよかったし，ソ連の方がよい状態にある．

このような状態の下で，アメリカはもっと有効な研究開発のための長期計画を発達させるような制度を確立しなければならない．ここではそのような制度を作るための，論理的な構造を考察する．それは次のような図式で表わされる．



（竹内　啓）

W. Karush and L. A. Moody: Determination of Feasible Shipping Schedules for Job-Shop. *Jour. Oper. Res. Soc. Amer.* 6, No. 1, 1958.

この論文はある完成品の生産に際して特定の種類の機械を様々な用途に使用しなければならならない様な小規模工場生産における出荷計画の決定を取扱っている．すなわちこゝではその様な機械の生産能力が制約条件となりその下での最適な出荷計画を求めることが

目的とされる．この様な問題は一般のリニアー・プログラミングとして定式化され得るがこの場合それが特殊な係数行列を持つ事実に注目してより簡便な解法を工夫している．今最も単純な場合として一種類の機械で同種の完成品を作る場合を考えこれを次の様に定式化する．すなわち M_i ($i=1, 2, \cdots, n$: n は生産期間) で特定の出荷のための生産開始後第 i 期におけるその完成品一単位を生産するに必要な機械の生産能力の消費量を，x_j で第 $n+j$ 期の出荷量をまた，G_j で第 j 期における機械の生産能力を夫々示すことにすれば

$$
\begin{aligned}
&M_1x_1 && \leqq G_1\\
&M_2x_1+M_1x_2 && \leqq G_2\\
&M_3x_1+M_2x_2+M_3x_3 && \leqq G_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&M_nx_1+M_{n-1}x_2+M_{n-2}x_3+\cdots\\
&\qquad +M_1x_n && \leqq G_n\\
&\qquad M_nx_2+M_{n-1}x_3+\cdots\\
&\qquad\qquad +M_2x_n+M_1x_{n+1} && \leqq G_{n+1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

なる不等式体系を得るがこの終結条件としては (1) ある時期以後の x_j が全て 0 となる場合，(2) ある時期以後の G_j が全て等しい場合，の 2 つを考える．先ず (1)の範囲では目的函数として差当り $\sum_{j=1}^{j=N} x_j$ を考え，上の制約条件と $x_j \geqq 0$ $(j=1,2,\cdots,N)$ との下でこれを最大にする計画の決定を問題として取上げる．この時係数行列 M の持つ特殊性から次の命題が証明される．

［命題 I］

P を M の始めから n 行で作られた三角行列とし $G^*=\begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_n \end{bmatrix}$ とするとき，若し $\bar{X}=P^{-1}G^*$ が可能な解であり更に $PY=\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ の解 Y が非負であるならばこの解は $\bar{X}$ 最適解である．

［命題 II］

$\bar{X}$ が可能な解で $M_1 \geqq M_2 \geqq \cdots M_n$ なる関係があるとき Y は常に非負，したがって $\bar{X}$ は必ず最適解である．

また M の最後から行をとって作った行列 S およびそれに対応する G^{**} について類似の命題が成立つことが示されている．

そこで具体的に可能な解を求める手続として "method of single-step optimizing" を提案する．これは先ず x_1 の解として最初の n コの不等式で x_1 以外を全て 0 と置いて

$$\bar{x}_1=\min\{G_1/M_1,\ G_2/M_2,\ \cdots,\ G_n/M_n\}$$

を選び，次いでこれを代入して得られる不等式の第 2 番目から第 $n+1$ 番目までの n コについて，新たに得られた G_j' (たとえば $G_3'=G_3-M_3x_1$) と共に

$$\bar{x}_2=\min\{G_2'/M_1,\ G_3'/M_2,\ \cdots,\ G_{n+1}/M_n\}$$

を x_2 の解とすると云った手続をくり返す方法である．こうして得られた解は常に可能解であるが一般に最適解ではない．しかし上述の命題を用いることによって，$\{M_i\}$ が非増大且つ $\{G_j\}$ が非減少な場合にはそのまゝ最適解となっていることが証明され，また逆に $\bar{x}_N'$ から始めて得られる解も可能解で $\{M_i\}$ が非減少で $\{G_i\}$ が非増大であるときに矢張りそのまゝで最適解となっていることが示されている．

ところでこれ迄は判定基準として $\sum_{i=1}^{j=N} x_j$ を考えて来たが，通常 G_j は余り大きな変動を示さずその場合に出荷量 x_j の変動が余り大きくならないことの方が望ましい場合が多い．これに対しては "method of common values" による解法が提案される．これは single-step optimizing の場合に x_1 を最初の n コの不等式で他の変数を全て 0 と置いたのに反して全ての変数を x_1 に等しいとおいて解を得るすなわち x_1 の解として

$$\bar{x}_1=\min\{G_1/M_1,\ G_2/M_2+M_1,\ \cdots,\ G_n/M_n+\cdots+M_1\}$$

をとり以下これを逐次くり返す方法である．この様にして得られた解については先ず G_j それがの変動とは無関係に 1 つの可能解であること，ついで $\{G_j\}$ が非減少である時は $\{x_j\}$ もまた非減少であることが証明され，またこの解が自動的に前述の終結条件 (2) を満足するものであることが示されている．

以上がこの論文の主な結果であるが，他に M_i のいくつかゞ 0 である時には係数行列が分離されて更に簡単になることや，一般に解が時点についての多項式

で表現される時には演算子を用いることによって，また部分的に線型であるものについてはその勾配を変数とすることによって上述の問題に帰着し得ることなどについても触れている．（関谷　章）

TORBEN MEISLING : Discrete-Time Queuing Theory, *Jour. Oper. Res. Soc. Amer.* 6 No 1. JanFeb. 1958 pp 96～105

この論文では，時間が離散的に扱われる場合のSingle-server-queuing system についての，行列の平均の長さ，および平均待合わせの時間を計算する．

次のような仮定をおく．

1. 特定の時点に到着する客はたかだか 1人である．
2. 特定の時点に客がくる確率はPで，かつどの時点についても客がくる確率は等しく，かつ互いに独立である．
3. 客は到着順にサービスされる．
4. 客に対するサービス時間は互いに独立で同じ確率分布に従う．

したがってk個の時点の間にきた客の数をmとすれば，mは2項分布に従う．

またサービス時間Sがk時点にわたる確率を C_k ($k=0, 1, 2,$) とする．

解析は Markov-chain を構成することによって行われるが，単に任意の時点における行列の長さをとっただけでは（そのときサービスを受けている人が，すでにどれだけの時点にわたってサービスを受けているかによって状況が異るから） Markov chain にならない．そこで Kendall に従って，行列の長さをサービスが終った直後についてのみ計ることにして，Morkov chain を構成する．

$P'=\{p_0\ p_1\ p_2\cdots\}$ を均衡に達した場合に，行列の長さが $0,1,2,\cdots$ である確率を表わすベクトル，$R=\{r_{ij}\}$ を遷移確率の行列とする． $P=R'\ P$ である

b_m をサービス時間の間にm人が到着する確率とすれば，

$$b_m=\sum_{k=m}^{\infty}\binom{k}{m}P^m q^{k-m}C_k \quad (m\geqq 0)$$

$$b_m=0 \qquad (m>0)$$

と表わされ，そうして

$$r_{ij}=b_{j-i+1} \qquad (i\geqq 1) \qquad r_{0j}=b_j$$

となる．

次に母函数　$g(z)=\sum P_n\ z^n$ を考えると

$$g(z)=\frac{hzp_0(z_{-1})}{z-hz}$$

ただし　$h(z)=\sum b_n\ z^n=\sum C_k\ (zp+q)^k$

と表わされる．

そうして，平均の行列の長さは

$$E(n)=\lim_{z\to 1} g'(z)=\rho+\lambda^2\ E[D(D-\triangle t)]/2(1-\rho)$$

ただし　$\triangle t$ は時点の間隔

$\lambda=P/\triangle t$，$\rho=\lambda E(S)=P\sum kc_k$　である．

また平均待時間は

$$E(w)=(1/\lambda)\,[E(n)-\rho]$$

で与えられる．

特殊の場合としての分布が幾何分布，すなわち

$C_k=(1-d)\ d^k$　と表わされる場合は，

$$E(s)=\triangle t\ d(1-d) \qquad \rho=Pd(1-d)$$

となり

$$E(n)=\rho/(1-\rho)$$

$$E(w)=E(S)\rho/(1-\rho)$$

またの長さが決まっていて S_0 に等しいならば

$$E(n)=\rho+\rho^2(1-\triangle t/S^0)/[2(1-\rho)]$$

$$E(w)=S_0\rho(1-\triangle t/S_0)/[2(1-\rho)]$$

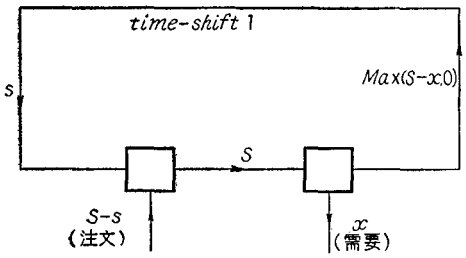
これらの結果は $\triangle t\to 0$ とすれば，連続時間の場合の結果と一致する．（松谷泰行）

FABIAN, T., FISHER, J. L., SASIENI, M. W., and YARDENI, A. : Purchasing Raw Material on a Fluctuatnig Market, *Jour, Oper. Res. Soc. Amer.* 7 (1959), No. 1, 107—122

市場価格が期ごとに変動するような財に対する在庫管理を論じている．全体は 2部に分れ，Part II では dynamic programming のモデルを作り，数学的解析を行っている．

そこでは，市場価格と需要量との分布は互いに独立で，もちろん密度函数は既知としてある．Part I は実際の case study で，確率変数は過去の data から推定されて予測値が使われている．

モデルを図式で示すと



s ‥‥initial stock

S‥‥starting stock

$\hat{s}$ ‥‥maximum storage capacity

$I(S)$ ‥‥量Sの inventory に対する holding cost. (penalty cost をも含めて考えてよい). convex とする.

$\phi(x)$ ‥‥需要の密度函数

$\psi(p)$ ‥‥未来の市場価格の密度函数

とし cost は比例的な ordering と, convex な holding cost]とだけとする. いま

nf_n $(s.\ P)$ = initial stock が s,

initial market price がP のときから出発して, n 期間に亘る全費用の最小値,

とおくと, D P の構造方程式は

$$nf_n(s.\ P)=\min_{s\leqq S\leqq\hat{s}}\Big[(S-s)P+\mathrm{I}\,(S)+(n-1)\int_0^S\phi(x)\,dx\int_0^\infty f_{n-1}\ (S-x,\ \mathrm{p})\ \Psi\ (p)\ dp+(n-1)\int_S^\infty\phi(x)\,dx\int_0^\infty f_{n-1}(o,\ p)\ \Psi\ (p)\,dp\Big]$$

となる. これの解函数 $f_n(s,\ P)$ および最適政策 $S^*(s,P)$ は, $n\to\infty$ のとき何れも収束することが示されている.

この論文は, 普通の在庫管理の解析法が未来の cost に対し割引率を導入するのに対して, 割引率を考えずに全費用の期間平均を問題にしているところと, それから, 決定領域が二次元の決定問題であるところが面白い.

(坂口　実)

HARVEY M. WAGNER : Simplex method for Beginnero *Jour. Oper. Res. Soc. Amer.* 6 No. 2, 1958

この論文は最も初歩的な数学の知識しか持たない人々のためにシンプレックス法の概念を判りやすく解説することを目的とするものであるが, これは又シンプレックス法の概念を短時間で講義しなければならない人々にとっても有益なものと思われる. 彼は通常のシンプレックス表の係数のみの演算がその方法の理解を妨げていることを指適し, シンプレックス法の概念の説明のためにはもとの連立方程式の形をそのまゝ残し各段階でそれを目的に適う様に変形して解くと云う手続をとることで初心者の理解度が高まることを注意している. この場合特徴的なことは所謂"基底の変換"の手続を可能な解を求める際当該変数が各方程式に各々 1つずつ含まれ且つその係数が1である様な演算を施すことによりそれ以外の変数を0とおいて直ちに解が得られる様に変形しておくのが便利であるとして, 又目的函数をも一つの変数 (x_0) と見做し右辺が常数の形であるものを特に第0行の方程式としてその左辺に含まれる x_0 以外の変数で負の係数を持つものはそれが x_0 を増大せしめる潜在的な力を持つものであると説明されていることである. この様に考える時最大値問題についての通常のシンプレックス判定基準は次の様な形で表現されることになる.

判定基準 I (導入さるべき変数の選択) ; 第0行の変数で現在の解にふくまれておらず, その係数が負であるものがあればそれらの係数の絶対値の一番大きいものすなわち最大の単位当りのx_0を増大させる潜在力を持つものを選ぶ. もし第0行に含まれる変数(x_0を除く)の係数が全て0又は正になっている時はもはやその様な潜在力を持つ変数はないのであるから現在の解が最適であることになる. 判定基準 II (新たに導入さるべき変数の水準の決定——取除かるべき変数の選択) ; (a) 現在の解を対応する方程式での導入さるべき変数の係数で割る. (この時分母が0又は負のものは無視する). (b)それらの比のうちで最小のものを選ぶとこれは変数が全て非負と云う条件を満足する新たに導入される変数の最大限の水準を示すことになり又比が最小になっている様な現在の解に含まれている変数が取除かれることになる (すなわち次の解ではその水準が0と置か

れるものとなるわけである).

以上は最大値問題を解く具体的手続を示すものであるが最小値問題についても全く同様の考え方で判定基準を上とは逆にたとえば第0行での最大の正の係数を持つ変数をなるべく多く取入れると云う様に変形すればよいことを指適している．なお紙数の関係でこゝでは彼の具体例による明快な説明をそのまゝ伝えることはできなかったが，説明のために工夫された表式法は非常に簡明なものであるから是非参照されたい．

(関谷　章)

RICHARD BELLMAN and STUART DREYFUS : Dynamic Programming and the Reliability of Multi-component Devices, *Jour. Oper. Res. Soc. Amer.* 6 No. 2 Mar-Apr. 1958 pp 200～206

何段階かの部分からなる装置がある場合，全体が故障なく動く確率は，それぞれの部分が故障なく動く確率の積になる．

この確率をなるべく大きくするために，それぞれの段階に何個かの予備装置をつけて，故障が生じた場合，次の装置が動くようにすることができる．ここで，費用，および重量に制限がある場合，各段階に何個の予備をつければ全体が故障なく動く確率を最大にすることができるかを見出すことが問題となる．

段階の数をNとし，第j段階に用いられる予備装置の数を mj $(j=1.\ 2\cdots N)$ $mj\geqq 0.$ とする．また第 j 段階が故障なく動確率を $\phi_j(m_j)$ と表わす．

一つの装置の費用，および重量を c_j，W_j とすれば，制限条件，

$$\sum_{j=1}^{N} c_j\ m_j \leqq c \qquad \sum_{j=1}^{N} w_j\ m_j \leqq W$$

の下で，全体が故障なく動く確率

$$\prod_{j=1}^{N} \phi_j(m_j)$$

を最大にすればよい．

まず，Dynamic Programming の手法を適用して，

$$f_N\ (c.\ w) = max \prod_{j=1}^{N} \phi_j(m_j)$$

とおけば

$$f_1.\ (c,w) = \phi.\ \{min([c/c_1,],[w/w_1])\}$$

$$f_N(c,w) = max\{\phi_N(m_N) f_{N-1}(c-c_N m_N, w-w_N m_N)\}$$

$$0 \leqq m_N \leqq min([c/c_N],(w/w_N))$$

から f_N が求められる．

しかし $f_N(c,w)$ は2変数の函数であるので，その計算は膨大になる．

そこで，手法をやや修正して，制限条件の一方については Lagrange 乗数を用い，

$$\prod_{f=1}^{N} \phi_j(m_j)\, exp(-\lambda \sum_{f=1}^{N} m_j\ w_j)$$

を $\sum_{j=1}^{N} m_j\ c_j \leqq c$ の条件の下で dinamic programming によって最大にし，かつλを $\sum m_j w_j$ がなるべく w に近くなるようにする．

一例として　$N=5$

$c_j=5,\ 4,\ 9,\ 7,\ 7$

$w_j=8,\ 9,\ 6,\ 7,\ 8$

$\phi_j(m_j)=1-(1-P_j)^{m_j+1}$

$P_j=0.90,\ 0.75,\ 0.65,\ 0.80,\ 0.85$

$c=100,\quad w=104$

の場合を考える．

まず $\lambda=0.01$ とすると $\sum m_j\ w_j=97$ $\Pi\phi_j\ (m_j)=0.977$ となる．次に $\lambda=0.008$ とすると，$\sum m_j\ w_j=104$，$\Pi\phi_j\ (m_j)=0,984$ となる．

この計算に要した計算機の使用時間は5分であった．

この問題をやや拡張して，各段階の装置がA，Bの2つの型からなる場合も，同じ手法によって解くことができる

(松谷　泰行)

E. L. ARNOFF, E. B. KANIA and E. S. DAY, : An Integrated Process Control System at the Cummins Engine Company *Jour. Oper. Res. Soc. Amer.* 6. No. 4 Jul-Aug 1958 pp. 467～497

Cummins Engine Co. は軽量高速度エンヂンを製造している会社で，約4,000人を雇傭している．当社は過去10年間の間に急速に発展し，売上げは4倍に

も増して，1956年には約1億ドルに達した．

急速な発展の結果，顧客の要求によく適合した生産を行うために，またこれまでしばしば高い在庫水準にもかかわらず，不足品が生じたということを防ぐために，在庫と生産計画の適切な管理の必要が感ぜられた．

会社の経営陣は Case Institute を訪ね，会社側と Case 側とからなるORティームが作られ，現在直面している問題にあたると同時に，社内にORの専門家を養成する訓練をも行うこととなった．

ORティームは会社の資材管理，生産計画，エンヂン組立計画の各部門をしらべ，更に注文処理の機構が重要であることに気づいた．

そこで2つの問題が立てられた．

1. (a) 注文処理 (b) 資材管理および生産計画をふくむ機構を再編成すること．
2. 生産計画および在庫管理のための数学的手続を作り出すこと．

与えられた回答においては，注文処理の段階において，前には16休業日（22日）を要したものが，僅かに5作業日ですむようになり，更に，そこから得られる情報は以前には月ごとにしか発表されなかったものが，すぐさま得られるようになった．

生産，在庫管理の分野では，それぞれの分野において一定の数学的な規則にしたがって決定が行われるようになった．

このような再編成にともなって，情報処理機構が拡充され，これまでのIBM 604に代えてIBM 650を用いるようになった．

数学的附録

(A) 再注文水準と管理限界

R, 再注文水準

D, 発注から受取りまでの間の需用

$f(D)$ Dの確率密度 $F(D)$ 累積確率分布

C 単位あたり在庫費用 S 単位当り品切れ費用

とすると，最適再注文水準 R^* は

$$F(R^*)=S/(C+S)\overset{d}{=}1-\alpha$$

$f(D)$ に正規分布を仮定すれば

$$R^*=\mu_D+t\alpha\ \sigma_D$$

その推定値として $R^*=\bar{x}_D+t\alpha\ \hat{\sigma}_D$

Poisson 分布に対しても同様

またこれに応じて現実の $\bar{R}_0$ をチェックする管理限界も定められた．

(B) 経済的購入数量

C_D 1ロットあたり set-up cost

C_1 1単位あたり購入費

P 1カ月あたり在庫費用（価値に対する比率）

D 月平均需用

q 月購入量

とすると，総費用を最小にする q の値は

$$q_0=\sqrt{2C_D/PDC_1}$$

となる．この量が，更に割引が行われる場合もふくめて数表に作られた． (竹内 啓)

LAWERENCE FRIEDMAN : Game-theory Models in the Allocation of Advertising Expenditures, *Jour. Oper. Res. Soc. Amer.* 6 No. 5,1958 Sep-Oct

広告費の問題を扱う場合の主要な困難の一つは，その効果が競争相手の広告の効果によって必然的に影響されるということである．競争会社が同時に支出する広告費は互いに効果を打ち消し合うことになる．このような点からして広告費の配分の問題はゲームの理論の観点から扱うことが妥当であると思われる．

この論文は最も簡単なモデルについて，ゲームの理論の立場からの解を与えている．

ここでは，競争者はA，Bの二会社のみであり，かつその販売する生産物は一種類のみとする．市場は n 個の地域からなり，それぞれにおいて販売される総額は一定で $S_i(i=1\cdots\cdots n)$ に等しいとする．

モデルI，A会社の広告費の合計はA，B社の合計はBとし，各地域ごとにそれぞれの会社の売上げは，それぞれの会社がその地域に投じた広告費に比例するものとする．すなわち地域におけるAの広告費を x_i，Bの広告費を y_i とするとき，Aの売上げは $s_i x_i/(x_i+y_i)$ Bの売上げは $s_i y_i/(cx_i+y_i)$ となる．A Bはそれぞれ一定の広告費に対して自分の売上げを最

大にしようとつとめるが，売上げの合計は一定であるから，結局売上げの差

$$D=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-y_i}{x_i+y_i}\right)s_i$$

をAはなるべく大きく，Bはなるべく小さくしようと努めることになる．従ってこのモデルは零和2人ゲームの形になり，A，Bに対する最適解（ミニマックス解）を求めると

$$x_i=s_i\ A/S \qquad y_i=s_i\ B/S$$
$$i=1,\ 2\cdots\cdots n$$

となる．すなわち各地域ごとに需要の大きさ s_i に比例して配分すればよいことになる．

モデルII，上と全く同じ状況の下で，ただBの配分が最適でなく，かつそれがAに知られた場合，それに対応するAの最良の配分は

$$x_i=(A+B)\frac{\sqrt{s_i\,y_i}}{\sum_{j=1}^{n}\sqrt{s_i\,y_j}}-y_i$$

となる．

モデルIIIおよびIV　各地域ごとにより多くの広告費を投じた方が需要を独占する場合．ただし $x_i=y_i$ の場合は需要を等分に分け合うものとする．すなわち

$$D=\sum_{i=1}^{n}s_i\ \mathrm{sgn}\ (x_i-y_i)$$

この場合のゲームの最適解は，複雑な形の混合方策となる．

モデルV　モデルIに対して，更にA広告費の額を変えることも考慮する．売上げ額Nに対して粗収入を $C_3\ N$ 全収入を $C_1+C_2\ N$ に等しいとすれば，

$$\text{利潤}=C_3\ [A/(A+B)]\ S-\{C_1+C_2\ [A/(A+B)]\ S\}-A$$

となる．これを最大にするAの値は

$$A=\sqrt{(C_3-C_2)\ SB}-B$$

となる．　　（竹内啓）

Eliezer Naddor and Sidney Saltzman : Optimal Reorder Periods for an Inventouy System with Variable Costs of Ordering *Jour. Oper. Res. Soc. Amer.* 6 No. 5, Sept.-Oct. 1958 pp 626～685

この論文では，発註の費用が，註文した品物の種類の数によって変る場合を考える．n 種のものを註文する場合の費用は $c+b_n$ に等しいとする．

今註文は t 年ごとに（通常 $t<1$）行われるものとし，第 j 種の品物は t_j 年ごとに註文されるとする．ただし $x_j=t_j/t$ は整数になっていなければならない．

一年の j 種の品物の需要を k_j とする．また一年の j 種の品物の単位あたり在庫維持費 a_j とする．そうすると一年あたり発註の費用の合計は

$$(b/t)\sum_j\ (1/x_j)+c/t$$

在庫費用は　$1/2\,t\sum_j R_j\ x_j\ a_j$

となるから，この和をなるべく小さくするように，t，x_j を定めなければならない．

次のような例について計算する．

j	R_j	a_j \$	$R_j\ a_j$	$\sum R_j\ a_j$
1	180	0.20	36	
2	100	1.00	100	
3	320	1.25	400	
4	36	0.25	9	435

$b=\$\ 1.00$　$c=\$\ 5.00$

Policy I　$t=1/12$（すなわち毎月ごと発註）

$x_j=1$（すべての品物を毎回発註）とすると総費用 $T=\$\ 130.71$ となる

Policy II　$t=1/12$ とし x_j はなるべく費用を少なくするようにする．そうすると $\sqrt{2b}/t\sqrt{R_j a_j}$ となるが，x_j は整数でなければならないことを考慮して $x_j'=3,\ 2,\ 1,\ 6$ とすると

$T=\$\ 115.76$　となる

（x_j が整数という条件を入れない場合の最小値は \$ 115.15　である）

Policy III　x_j，t をともに T が最小になるように定める．

$$t=\sqrt{2\,[c+b\sum_j\ (1/x_j)]/(\sum_j R_j\ a_j\ x_j)}$$

$$x_j=\sqrt{(b\sum_j R_j\ a_j\ x_j)/[c+b\sum_j(1/x_j)]R_j\ a_j}$$

近似的に計算して $t'=1/6$　$x_j'=1,\ 1,\ 1,\ 3$ として，$T=\$\ 96.92$ となる．

次にいくつかの地域を考慮した場合，Policy IIIは，

Policy Ⅲ—A　すべての地域について別々 t にを定める．Policy Ⅲ—B　すべての地域を通じて同じ t をとる．の二種類に分けられる．上の例と同じような3つの地域についての例で計算すると，総費用は

Policy	Ⅰ	$ 355	〃	Ⅱ	$ 308
	Ⅲ—A	$ 225		Ⅲ—B	$ 230

となる．

Ⅲ—AとⅢ—Bとは殆ど違わないから，このような場合にはⅢ—Bの方が望ましいであろう．

(平館道子)

Carl N. Klahr : Multiple Objectives in Mathematical Programming,, *Jour. Oper. Res. Soc. Amer.* 6 No. 6, pp. 850—855

ある問題を数学的に Programming する場合，実際の状態から適当にモデルを抽象しなければならないが，その際，いくつかの objective となりうるものの中から問題を規定するような1つの objective を選ばねばならない．他は条件として，それに制限を加えるものにしかならないのである．しかし，この objectivc と条件とは不明瞭にしか選べない，というヂレンマは，数学的に Programming できるような状態に特徴的なものである．この論文が提起している total objective function の一般的モデルを定式化する方法は，このヂレンマを解決する一つの手段である．以下論文の順序に従って紹介しよう．

このヂレンマへの approach の方法として，まず「bounding problem」の方法がある．この方法は，問題についてのある意味で極端な，境界的な問題を objective function としてとり，それぞれの解を比較する．このとき，数学的な programming とは，decision maker が，極端な仮定をつかって行う最適な選択の範囲を定めることである．この方法は，実際の問題を定式化し解決するという点で難点を持つ．次に第二の approach 方法として，異った個々の objective の weighted average をとる方法がある．だが，ここでも一般的には objective の間には共通の尺度がないし，それが存在しても weighted function を決定するのは困難な問題である．

そこで，数学的な programming における，objective function の一般化と定式化のために total objective function を導入する．数学的な面からではなく，decision を行う方法に関連して，objective 全体を考慮に入れるという観点から objective fnnction を再定式化するのであるが，それは，① subjectve の集合と subobjective space の定義，② その空間の中の相互に排他的な領域の境界設定，③ その空間の各領域に異った objective function を定義すること，④ これらの領域間により好ましいものから順序がつけられること，以上の四段階をへて total objective function を定義する．この場合モデルは，① 異った各 objective は subobjective である．② subobjective は測ることができる．③ 多次元の subobjective space を考える．④ 情報は領域を設定するのに用いられる．⑤ 情報は領域間の好ましさの順序を規定するのに用いられる，という仮定に従って構成される．このモデルは (a) 領域が明確な境界を持たない，(b) この領域の分割は空間全体に適用できない，(c) モデルが，静態である，というような点で，実際とはかけ離れているが，この方法は，何が困難であるか，何が問題の重要な側面であるかを，明確にするであろう．

さらに論文では，total objective function の定式化の例があげられている．total objective function を最大にすることは，結局各領域の適当な函数を最大にすることによってなされるが，各領域の好ましさの順序はきまっているから，最適な領域の最適な点を選ぶ問題になる．

この定式化は，weighted objectve function の特別な場合とみなしてよい．実際には，weight は不連続でなくてもよいのであるが，不連続とみなすことは有用である．

(平館道子)

G. A. Croes : A Method for Solving Traveling Salesman Problems, *Jour. Oper. Res. Soc. Amer.* 6 No. 6, 1958 Nov-Dec.

この論文は Traveling Salesman Problemの一つのメカニカルな解法を与えている．この方法も完全なものではないが，いままでに出された方法よりも早い解法であることが実験的に確かめられている．

いま Salesman が n 個所の点を廻るものとし，i 点から j 点に行く距離を c_{ij} をと表わすとき，$(c_{ij}=c_{ji})$ を最小にするようなを loop を見出すことが目的である．

まづ最初適当な loop を一つ作る．それには c_{ij} の中でなるべく小さいものを多くふくむようにする．点の番号を入れかえて，出発点をなす loop が対角線に並ぶようにする．

この loop に対して，$\cdots i \quad i+1, \cdots i+k \quad i+k+1 \cdots$ を $\cdots i, i+k \quad i+k-1, \cdots i+1, i+k+1 \cdots$ となるような変換だけをチェックする．それには $\triangle M(i+1\ i+k)=(c_{i,\ i+1}+c_{i+k,\ i+k+1}-c_{i,\ i+1}-c_{i+,\ i+k+1})$ の符号を見ればよい．$\triangle M>$ならこのような変換を行う．同じことをくり返えして．このような変換によって改善されないところに達したら次の段階に進む．

$d_{ij}=c_{ij}+a_i+b_j$ にすると d_{ij} を距離として取っても c_{ij} を距離とする場合と同じ解に達する筈である．そこで上の方法によって得られた loop において $d_{ij}=0$ となるように，a_i, b_j を定める．

loop にふくまれていない d_{ij} の中で，$d_{ij}>R$となるようなものは解の中にふくまれることがないことがわかる．ただし R は第一には d_{ij} の中で負になるものの絶対値の和をとることができるが，もっとくわしく考えて行って，それより小さい値にすることができる．このようにして解にふくまれ得ないところを除いた後，最後に残った可能性を，tree の形に表わしてすべてチェックし，最適解を見出すのである．

このような方法にすれば 20×20 程度の問題は簡単に解くことができる．またこの方法は symmetric でない問題，即ち $c_{ij}\neq c_{ji}$ の場合も解くことができる．

抄録者の感じとしては，大きい問題については最後に書かねばならない tree がひどく複雑になってしまう恐れがあるように思われる．　(竹内　啓)

FLOOD, M. M.: Some Experimental Games, *Management Science*; 5 (1958) pp. 5—26

非0和 game に関する6つの実験あるいは体験を報告している．①②は2人交渉 game，③は2人非協力 game，④⑤は分割不可能な財を数人に公平に分ける問題，⑥は group choice についての問題を扱っている．何れも，既存の数学的理論と現実の人間の行動とがどの程度一致するか，あるいはしないかを示して興味が深い．

① Iが彼の Buick を売りたい．IIは乗用車を買いたい．彼等はそれぞれ買手・売手を探す手数を省くために，直接取引することにした．談合の結果値段の折合がつかず，結局こうした．それは，適当な中古車売買業者に，Iの Buick に対する買値・売値をつけさせ，その平均で手を打とうというのである．この決定は理論の split-the-difference principle (結託による joint gain を等分して分ける) に適って充分合理的であることを示す．

③ 2人の学生に簡単な非0和非協力 game を 100 play やらせた．支払行列は

$$A^{\mathrm{I}}=\begin{pmatrix}-1 & 1/2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad A^{\mathrm{II}}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1/2 & -1\end{pmatrix}$$

とした．毎回過去の手を知らせて学習させ，考える時間も充分に与えた．結果は Nash の平衡解とかなり違った．これは100回という回数が多すぎて，非協力性が怪しくなってくるためらしい．実験の data を調べると，始め平衡解の近所から出発し，徐々に他のもっとよい解に向って動くらしいことがわかる．

⑤ 3人の子供の中の一人に子守りを頼みたい．そこで逆競売」をすることにした．すぐさまIが＄4を申し出た．著者は最低値が＄4以下という条件つきで結託を認めた．彼等は大変長い談合の結果遂にまとまらず，逆競売の続行を願い出たのである．こうして著者は，やはりIに僅か＄0.9で落したのである！このような nonoptimal behavior がなぜ生じたかを説明している．

⑥ 財産4を3人に分ける分け方は$A=(4,\ 0,\ 0)$, $B=(1,\ 0,\ 3)$, $C=(2,\ 1,\ 1)$, $D=(0,\ 2,\ 2)$, とこれらの permutations とである．各人が一票づつもって多数決で best allocation をきわめようとすると，例えば

$$C>A,\quad C>B,\quad D>C,\quad B>D$$

となり，となり，推移則の不成立が困る．このようなときに，民主的な多数決投票はどう行われるべきかを提案している　(坂口　実)

FRIEDMAN, L: Competitive Coefficients, *Management Science*, 5, 1959 pp. 404—409

競争状態における競争者の相互の価値関係を，競争係数を用いて記述しようというのである．競争係数は，他の競争者に生じた gain または loss により引き起された所の，彼への間接的な loss または gain を以て定義される．すなわち，競争係数 W_{ij} は，

競争者 j に生じた1単位の gain により引き起された所の，競争者 i の loss

である．もし $W_{ij}>0$ ならば，i は j のおかげをこうむることになる．$W_{ij}=W_{ji}=1$ ならば，i と j との得失は正反対，$-1\leqq W_{ij}\leqq 1$ とする．

野球リーグ戦に例をとると，巨人と阪神とはお互いに競争係数は＋1に近い．巨人の loss (win) は阪神にとって，殆んど win (loss) に相当するからである．最下位チーム大洋に対する巨人の競争係数は0に近い．巨人は大洋の試合には，相手が阪神のとき以外は全く興味がない．大洋対阪神の試合のときには，巨人は大洋に対して負の競争係数をもつ，大洋が勝てば巨人は助かるからである．

3人非-0-和 game の支払行列を A, B, C とする．競争係数があるために ultimate payoff が

$$A'=A-w_{ab}B-w_{ac}C$$
$$B'=B-w_{ba}A-w_{bc}C$$
$$C'=C-w_{ca}A-w_{cb}B$$

となると考えられる．さらに各人の間接的 gain をも feed-back すると

$$A'=A-w_{ab}B'-w_{ac}C'$$
$$B'=B-w_{ba}A'-w_{bc}C'$$
$$C'=C-w_{ca}A'-w_{cb}B'$$

となる．これを解けば，係数行列が0でない限り，A' B', C' は A, B, C 及び競争係数で表わされる．

競争係数の算定は実際には複雑であろうが，その簡単な例：3人の競争者 a, b, c が市場のそれぞれ 50%, 30%, 20%を占めている．利益率が何れも3割とする．もしも b が＄1の売上を失えば，a は c と競争して $\$\frac{5}{5+2}\times 0.3=\$0.214$ の売上を得るであろう．従って競争係数 w_{ab} は 0.214 となる．他の係数の値も同様にして求まる．　(坂口　実)

E. EISENBURG & D. GALE; Consensus of Subjectve Probabilities; The Pari-Method, *Ann. Math. Stat.* 30, No. 1, March, 1959 pp.165—168

m人の人が，ある事象についてそれぞれ主観的確率を持っていて，それにもとづいて行動するとき，その結果一つの均衡状態に達するか否かが問題となる．ここでは n 頭の馬が出る競馬の例について分析している．

p_{ij} を i 番目の人が j 番目の馬が勝つことに対して持っている主観的確率とする．いうまでもなく $\sum p_{ij}=1$ である．$P=(p_{ij})$ なる行列が m 人の n 頭の馬に対する主観的確率を表わす．

n 頭の馬に対する賭けの比率が $\pi_1\cdots\pi_n$ (これは track probalility と呼ばれる．従って $\sum\pi_j=1$ となるように定める) であるとすれば，j 番目の人は p_{ij}/π_j が最大になるような馬にのみ賭けるであろう．

i 番目の人の持っている金額を b_i $(i=1\cdots\cdot m)$ とし．i 番目の人の j 番目馬のに対して賭ける金額を β_{ij} とすると

$$\sum_j \beta_{ij}=b_i \tag{1}$$

そうして $\beta_{ij_0}>0$ ならば

$$p_{ij_0}/\pi_{j_0}=\max_j p_{ij}/\pi_j \tag{2}$$

簡単のために $\sum_{i=1}^{m} b_i=1$ とする．そうすると，π_j は

$$\pi_j=\sum_{i=1}^{m}\beta_{ij} \tag{3}$$

の関係によって定められることになる．

もし (1), (2), (3)を全部満足するような β_{ij}, π_j の値が定められるならば，このような値は一つの均衡解を与えると考えることができる．そのときいかなる $P=(p_{ij})$, $\{b_i\}$に対してもつねに均衡解が存在することが証明される．存在の証明だけなら不動点定理を利用して簡単にできるが，ϕ を mn 個の変数 $\xi_{11}\ \xi_{12}\cdots\cdots\xi_{mn}$ の函数として

$$\phi(\xi_{11}\cdots\cdots\xi_{mn})=\sum_i b_i\ log\sum_j p_{ij}\ \xi_{ij}$$

とおき，を最大にする ξ_{ij} の値の組を ξ_{ij} と表わすと，均衡解 π_j, β_{ij} は

$$\pi_j=\max_i \frac{\partial\phi}{\partial\xi_{ij}} \quad \Bigg| \quad \xi_{ij}=\bar{\xi}_{ij}=\max_i \frac{b_i\ p_{ij}}{\sum_k p_{ik}\ \xi_{ik}}$$

$$\beta_{ij}=\xi_{ij}\ \pi_j$$

という形に表わすことができる．

更にこのような均衡確率 π_j の値は唯一通り定まることが証明される．

このような均衡確率がつねに納得の行くものであるとはいえないことは次の例で示される．今 $m=n=2$, $b_1=b_2$ とすると，もし，第一の人の主観的確率が $(1/2, /2)$ であるならば，第二の人の主観的確率に関係なく，均衡確率は $(1/2, 1/2)$ となる．　(竹内　啓)

LEVY, J.: Loss Cesulting from the vse of Inconect data in Computing an Optimal Inventory Policy, *Naval Research Logist. Quart.*, 5 1958 pp. 75—82

それぞれの仮定にもとづく色々なモデルについて，最適在庫政策が今までに調べられているが，これは不正確な data から計算された policy を実行したときの結果について調べている．

需要の大きさが確定しているときの静態的モデルとして，注文量に無関係に一定な注文費用を K，単位量・単位期間当りの在庫保持費用を h とすると，注文量 D に対する単位当り費用は

$$l\ (D)\equiv K/D+Ch/2$$

である．(需要の率が1日1個と考えれば，$D/2$ が平均保持期間)．これを最小にする $D=D^*$ は

$$D^*=\sqrt{2K/h}$$

で与えられ (有名 lot-size rule)，従って最小費用

$$l\ (D^*)=\sqrt{2Kh}$$

はとなる．もしも需要の率が本当は1日1個であるのに，誤まった data から1日λ個と推定してしまうと

$$\min\{K/D+Dh/(2\lambda)\}$$

を求めて

$$D'=\sqrt{2\lambda K/h}$$

としてしまうから，このときの総費用は

$$l(D')=K/D'+D'h/2$$

である．容易に

$$l(D')/l(D^*)=(\sqrt{\lambda}+1/\sqrt{\lambda})/2$$

なことがわかる．

次に需要量が既知の確率分布に従うときの動態的モデルとして，注文費用及び信用損失が何れも比例的(係数それぞれ k, p) とすれば，最適在庫政策は定水準在庫政策で，その level $\bar{x}$ は

$$k=a\left\{p\int_{\bar{x}}^{\infty}+k\int_0^{\bar{x}}\right\}\varphi(s)\,ds$$

から求まることはよく知られている．ここに $\varphi(s)$ は需要分布の密度函数で，a は割引率である．さらに最適在庫政策を用いたとき initial stock 0に対する総費用は

$$f\ (0)=k\,\bar{x}+\frac{a}{1-a}\left\{p\int_{\bar{x}}^{\infty}+k\int_0^{\bar{x}}\right\}s\psi(s)\,ds$$

なことも知られている．特に需要分布が (0. 1) での一様分布とすると，簡単な計算により $\bar{x}$, $f\ (0)$ が求められる．一様分布の範囲が本当は (0, 1) であるのに，誤まった資料から (0, λ) としてしまった場合の $f\ (0)$ の値を $f(0)_\lambda$ として

$$\{f\ (0)_\lambda-f\ (0)\}/f\ (0)$$

を計算すると，$=(\lambda-1)^2A(a,\ p/k)$ になる．A は a および p/k のちょっと複雑な函数である．(坂口　実)

REEYFUS et G.MONTY : L'approvisionnement,les marchés et la recherche opérationnelle (Exemple de l'achat des planches de fonds de wagons) *Revue generale des Chemins de Fer, Fevrier*

1959, p, 92～104

フランス国鉄（SNCF）が，貨車の床板用材仕入計画のために用いていた従来からの計算式によると，床板用材の実際の使用量がほゞ一定であるにもかゝわらずストック量が大きく変化する結果となる欠点があった．仕入に対してこの点を改良するため，フランス国鉄では1957年中にORグループの協力を得て，発注量に対して月々の納入量の予測を考慮した新しい計算式が研究されその大略が紹介されている．

いままで納入についての統計はたゞ毎月納入された合計量しかとられていなかったが，実際は $M+n$ 月に納入される合計量とは，過去の M, $M+1$, ……, $M+n-1$ 月の各発注量に対応してその月に納入された量の合計ということになる．（$M-1$ 月における発注量はすでに完全に納入されたものとして）1952年以来のデータについて調べた結果，この納期と納入量との関係は対数正規分布に最もよくあてはまることが確認された．このように納期に対する納入量の分布がわかると，月々の発注に対して毎月の予想納入量が推定でき，一方毎月の予想使用量あるいは不足量が求められ，従って一定期間中に納入されなければならない量，あるいは必要なストック量が求められる．結果として6ケ月以上後に予想納入量と実際納入量との差は最大10%程度であることが確められた．

また，床板用材の購入価格と発注量との関係についても調査し，ある発注量に対して納入を確実ならしめるために購入価格の決定如何が非常に重要であることを述べている．

本文の中では，従来の仕入計画のための計算式は数学的に完全ではあるが床板用材という特殊な市場の現実に適応していない点は説明されているのに，それに適応させるために具体的に従来計算式をどのように改良し計算手順を如何にしたらよいかについての説明は余り詳かでない点，またこの新しい計算式を用いた結果の効果についても殆ど触れられていない点が残念である．

手法的に分類すると在庫管理の問題といえよう．なお，フランス国鉄はヨーロッパにおける鉄道の中で，最初にグループをつくった鉄道であることを付記する．

（宮本俊光）

書　　評

オペレーションズ・リサーチ
——運用、企画、経営の科学——

宮脇　一男　　三根　　久　　藤沢　俊男著

共立出版株式会社　A 5　211頁　(1959年6月)　380円

狭い国土で，乏しい資源をやりくりする日本人の栄える道，これはあらゆる方面における「オペレーション」すなわち「運用」をうまく行い，最小の資源——無形の「時間」までも含めて——によって最大の成果をあげることである．オペレーションズ・リサーチはこのような目的を達成する有力な手段を提供するものである．——これが著者等によって述べられたまえがきの一部である．この大切なオペレーションの科学を広く普及しようという念願が，著者等をして本書を執筆するにいたらしめた動機である．

本書はまた書下しのORにおけるわが国最初の本としても重要な意義をもっている．

わが国では従来文科と理科の別が判然としていて，文科の人には数式を極端に毛嫌いする傾向があり，一方理科の人達には，経営とか管理といった仕事にはあまり関心を払わない傾向があった．——現代の合理的経営の観点から，こういった教育の仕組み自体に多くの問題があるのだが．この両方の人達にORを理解し