ガンマ乱数の作製
——FACOM 128 による——

高　橋　盤　郎*

1. まえがき

待ち合せ理論におけるサービス時間の分布や，設備保全の問題における部品寿命の分布はガンマ型であることが多い．したがってこれからの問題はモンテカルロ法でとく場合，ガンマ乱数を用いる必要がある．

一般に累積分布函数 $F(x)$ をもつ乱数は，[0, 1] 上の一様乱数を u として，$F^{-1}(u)$ によってえられるが，F^{-1} を陽函数としてあらわすことができない場合その計算に手間がかかる．とくに自動計算機の内部で乱数を作るときは，上の方法はひどく不便である．このため，とくに自動計算機に適する乱数作製のテクニックが，いろいろと考案されている [I], [II].

ここでは Von Neuman の考案した rejection method [II], [I] を応用して，任意の実数の自由度 ν をもつガンマ乱数を一様乱数から変換するテクニックと，これを FACOM 128 B によって ν=1.1, 1.1, 1.2, 1.5, 2(.5)5 の場合について実際に作製した手順とについて述べる．

2. 基礎的な理論

ここでは rejection method の一般論を，当面の目的に合うように表現しなおす．

ある確率密度函数 $f(x)$ があるとき，これを別な確率密度函数 $h(x)$ によって

$$f(x)=cg(t)h(t) \tag{1}$$

とあらわすことができたとする．ここで c は任意定数，$g(t)$ は t の全領域で最大値(有限確定) M をもつ函数．

このとき分布密度函数 $h(t)$ をもつ母集団からの標本値を t, これと独立な [0, 1] 上の一様分布からの標本値を u とし，

$$\left.\begin{array}{ll} u<\dfrac{1}{M}g(t) & \text{ならば } t \text{ を採択し} \\ u>\dfrac{1}{M}g(t) & \text{ならば } t \text{ を捨てる} \end{array}\right\} \tag{2}$$

とき，採択された t は $f(t)$ なる確率密度函数をもつ．

以上を乱数の言葉でいえば，$h(t)$ なる密度をもつ乱数系列 $t_1, t_2, \cdots$ を発生させ，これとは独立に [0, 1] 上に一様分布する乱数系列 $u_1, u_2, \cdots$ を発生させる．

---

* 有隣電機精機株式会社，昭和33年11月16日講演，昭和33年12月27日受理

$$u_i < \frac{1}{M} g(t_i)$$

ならば t_i を採択し，そうでない場合は t_i を捨てる．採択された乱数系列を t_{i_1}, t_{i_2}, $\cdots$ とすると，これは密度函数 $f(t)$ をもつ乱数系列である．

以上の方法によって $h(t)$ を密度函数とする乱数系列から，$f(t)$ を密度函数とする乱数系列を作り出すことができる．$f(t)$ に従う乱数の作成が困難であり，$h(t)$ のそれが容易であり，かつ $f(t)$ を (1) のように分解することができる場合，この方法が有効になるのである．

このとき $h(t)$ に従う乱数 1 個当り，$f(t)$ に従う乱数が平均何個できるかが問題となる．この個数を rejection method のサンプリング効率と呼ぶ．この効率は求める乱数 1 個が採択される確率に等しい．この確率は $f(t)$ を (1) 式のように分解する仕方に依存して定まることが多い．rejection methodの効率を高めるには，この確率が大きくなるように (1) の分解の仕方をうまくえらぶ必要がある．

3. ガンマ乱数作製の手順

ここでは自由度 ν のガンマ分布の密席函数を

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} e^{-t} \tag{1}$$

であるとする*.

ν が整数 n に等しい場合には，指数分布 e^{-t}** にしたがう独立な n 個の乱数の和をつくればそれが (1) にしたがう乱数である．

問題は ν が整数でない場合にある．ν の整数部分を n とし，

$$\nu = n + \varepsilon$$

とする．また p, q を，和が 1 になる，正数とし

§ 2 における $g(t)$, $h(t)$ を

$$g(t) = t^{\varepsilon} e^{-pt}$$

$$h(t) = \frac{q^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-qt}$$

とえらぶ．

こうすると，定数因子をのぞいて，$g(t)$ と $h(t)$ の積が $f(t)$ に等しく，$g(t)$ は $[0, \infty]$ 上で最大値

$$M = \left(\frac{\varepsilon}{p}\right)^{\varepsilon} e^{-\varepsilon}$$

---

* 一般のガンマ型分布 $ct^{\nu-1}e^{-\alpha t}$ にしたがう変量は (1) なる分布にしたがう変量 t を $1/\alpha$ 倍すればえられる．

** 密度 e^{-t} をもつ乱数は，$[0, 1]$ 上の一様乱数 u から $t = -\log_e(1-u)$ によつてつくることができる．

をもつから，§2 の要請をみたしている．

しかも $h(t)$ なる密度函数をもつ乱数はつぎにのべる手順2によって容易に作製されるものである．

以上の準備のもとに，自由度 ν のガンマ乱数はつぎの手順によってつくることができる．

手順 1 n 個の独立な〔0, 1〕上の一様乱数を $u_1, u_2, \cdots, u_n$ とする．この各を

$$t_i = -\log_e(1-u_i)^* \qquad (i=1, \cdots, n)$$

によって変換する．t_i は e^{-t} なる密度函数をもつ乱数である．

手順 2 上の n 個の t_i の和を $1/q$ 倍した乱数 t をつくる；

$$t=\left(\frac{1}{q}\right)(t_1+t_2+\cdots+t_n)$$

t は $h(t)$ なる密度函数をもつ乱数である．

手順 3 手順2によってつくられる，$h(t)$ なる密度函数をもつ，乱数系列を $t^{(1)}, t^{(2)}, \cdots$ とする．

以上とは独立に〔0, 1〕上に一様に分布する乱数系統を発生させ，これを $u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots$ とする．

手順 4 $t^{(i)}$ の採択，棄却をつぎの条件できめる；

$$u^{(i)} < \frac{1}{M} g(t^{(i)}) \text{ なら } t^{(i)} \text{ を採択}$$

$$u^{(i)} > \frac{1}{M} g(t^{(i)}) \text{ なら } t^{(i)} \text{ を捨てる}$$

手順4によって採択された $t^{(i)}$ の系列を

$$t^{(i_1)}, \ t^{(i_2)}, \ \cdots$$

とすれば，これが，$f(t)$ なる密度函数をもつ乱数系列である．

以上の方法で，$f(t)$ を $g(t)$ と $h(t)$ とに分解するとき，p, q のえらび方は一意ではない．しかし，§2 でのべた，サンプリング効率を最大にするような，p, q は一意に定まる．その定め方をつぎにのべる．

§2 でのべた効率は，ここでは手順4によって1つの乱数が採択される確率 P に等しい．

$h(t)$ なる密度函数をもつ変量が t と $t+dt$ の間におちる確率は

$$h(t)\,dt$$

であり，その t が手順 4 によって採択される確率は

$$\frac{1}{M} g(t)$$

である．したがって

$$P=\int_0^\infty \frac{1}{M} g(t)\,h(t)\,dt$$

---

* この式は $t_i = -\log u_i$ でも成立つ．

$$=\frac{1}{M}\ \frac{q^n}{\Gamma^{(n)}}\int_0^\infty t^{\nu-1}e^{-t}dt$$

$$=\frac{1}{M}\ \frac{q^n\Gamma(\nu)}{\Gamma(n)}$$

$$=\left(\frac{p}{\varepsilon}\right)^\varepsilon e^\varepsilon q^n\ \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(n)}$$

$$=\left(\frac{e}{\varepsilon}\right)^\varepsilon \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(n)}p^\varepsilon q^n$$

$p+q=1$の条件のもとでPを最大にするには，同じ条件の下で $\log P$ を最大にするのと同値である．

ラグランジュ乗数を λ として

$$\frac{\partial \log P+\lambda(1-p-q)}{\partial p}=\frac{\varepsilon}{p}-\lambda=0$$

$$\frac{\partial \log P+\lambda(1-p-q)}{\partial q}=\frac{n}{q}-\lambda=0$$

$$\therefore\quad \frac{\varepsilon}{p}=\frac{n}{q}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} p=\dfrac{\varepsilon}{n+\varepsilon}=\dfrac{\varepsilon}{\nu} \\ q=\dfrac{n}{n+\varepsilon}=\dfrac{n}{\nu} \end{cases}$$

p, q を上式で定まるようにえらぶと，そのときの確率 P は

第 1 表　ガンマ乱数発生のサンプリング効率 P

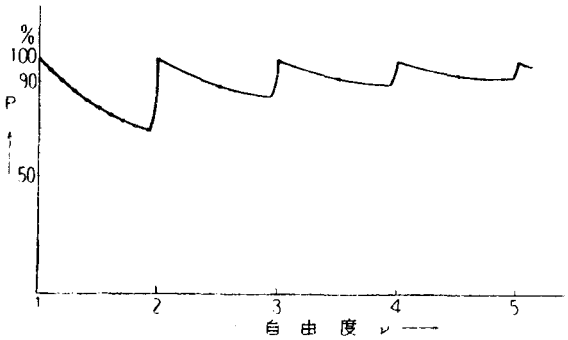
ν	n	ε	$P=e^\varepsilon\ \dfrac{n^n}{\Gamma(n)}\cdot\dfrac{\Gamma(\nu)}{\nu^\nu}$
1.0	1	0	1.000
1.1	1	0.1	0.947
1.2	1	0.2	0.901
1.3	1	0.3	0.859
1.4	1	0.4	0.826
1.5	1	0.5	0.795
1.6	1	0.6	0.768
1.7	1	0.7	0.742
1.8	1	0.8	0.720
1.9	1	0.9	0.699
2.0	2	0	1.000
2.5	2	0.5	0.887
3.0	3	0	1.000
3.5	3	0.5	0.922
4.0	4	0	1.000
4.5	4	0.5	0.941
5.0	5		

$$P=\left(\frac{e}{\varepsilon}\right)^{\varepsilon}\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(n)}\left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right)^{\varepsilon}\left(\frac{n}{\nu}\right)^{n}$$

$$=e^{\varepsilon}\frac{n^{n}}{\Gamma(n)}\frac{\Gamma(\nu)}{\nu^{\nu}}$$

$$\nu=1(0,\ 1)\quad 2(0.5)5$$

について P の値を第1表に示す．なおこれを第1図にグラフとして示す．



第1図 ガンマ乱数発生のサンプリング効率 (P)

4. FACOM 128 によるガンマ乱数の作製手順

一般に自動計算機によってガンマ乱数をつくるには様々な方法がある．

たとえば，まったくあらたに計算機のなかでガンマ乱数をつくる場合，一様乱数から変換する場合，自由度が整数のガンマ乱数(すなわち指数乱数の和としてできる乱数)から変換する場合など．

一般に基本演算速度の速い電子計算機，たとえば UNIVAC 60, 120, UCT, IBM 650 などを用いる場合には余計なインプット操作をさけるため最初の方法によるのがよいと思われる．しかし，基本演算速度の低いリレー計算機，たとえば FACOM 128, Mark II など，による場合は，計算機の空いているときに，基礎的な乱数をつくりためておき，必要に応じてそれを変換して使うのがよい．

当，有隣電機精機においては一様乱数テープが豊富に貯蔵されているため，ここでは一様乱数からガンマ乱数へ変換する手順をごく簡単に説明しておく．

貯蔵されている一様乱数テープには 1 word 8 桁で 1×10^{7} の形で順次にパンチされている．すなわち $[0,\ 10^{8}]$ の上の一様乱数になっている．

これを数値読取機にかけ，ガンマ乱数の自由度 ν の値を操作台より特定記憶装置に入れて起動させれば，バーホレーターより自動的に自由度 ν のガンマー乱数がテープにうち出される．

計算機内での，ガンマ乱数作製機構は；

まず操作台より入った ν の整数部分 n がとり出され，それによって読取機から n 個の一様乱数が読みこまれ，それに 10^{-8} がかけられる．これによって $[0,\ 1]$ 上の一様乱数 $u_1,\cdots,u_n$ ができる．(n が小さければ，後から適当な操作をほどこすことによって，10^{-8} をかける手間をはぶくことができるが，n が大きいときは以下の計算で scale over になる恐れがある)．

$$t=-\frac{1}{q}\log_{e}(u_1,\ u_2,\ \cdots,u_n)$$

を計算する．これから

$$g(t)$$

を求め，つぎに更に1個の一様乱数を数値読取機から読みこみ，これに10^{-8}をかける．これを v とする．

$$v \text{ と } \frac{1}{M}g(t) \text{ を判別し}$$

$$v \gtrless \frac{1}{M}g(t) \quad \text{ならば} \begin{cases} t \text{ をパーホレータからうち出す．} \\ \text{つぎのステップにすすむ，} \end{cases}$$

これによって，パーホレータからうち出される数値がガンマ乱数となる．

〔文　　献〕

(I) Monte Carlo Symposium (1954) の中，
J. W. Butler; "Machine Sampling from Given Probability Distributions"

(II) Von Neumaunn; "Various Techniques used in Connection with Raudom Digits" Paper No. 13, in "Monte Corlo Methods" NBS Applied Mathematics Series No. 12, U. S. Gout. Printing Office (1951)

[文　献　紹　介]

H. Scarf, "A min-max solution of an inventory problem," *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production.* by Arrow-Karlin-Scarf. (1958), Chapt. 12.

c を単位量当りの買付け cost, r を単位量当りの売価，$\Phi(\xi)$ を需要の分布函数とする．(もちろん $r>c>0$)．量 y だけ仕入れると，利益の期待値は

$$r\int_y^\infty \min(y, \xi)\, d\Phi(\xi) - cy$$

である．これを最大にする y を求めるのは，$\Phi(\xi)$ が既知のときには易しい．それは微分して0とおいて得る

$$\int_y^\infty d\Phi(\xi) = \frac{c}{r} \qquad (*)$$

を解けばよい．この論文では，$\Phi(\xi)$ が平均値 μ と分散 σ^2 の値だけが既知でその他のことは未知のときに，max-min 的に扱って

$$\max_y \min_{\int \xi d\Phi = \mu,\ \int (\xi-\mu)^2 d\Phi = \sigma^2} \left[r\int_0^\infty \min(y, \xi)\, d\Phi - cy \right]$$

を求めてある．答は，最適買付政策が

$$y^* = \begin{cases} \mu + \sigma f\left(\frac{c}{r}\right), & \text{if } \frac{c}{r}\left(1+\frac{\sigma^2}{\mu^2}\right) > 1 \\ 0, & \text{if } \frac{c}{r}\left(1+\frac{\sigma^2}{\mu^2}\right) > 1 \end{cases}$$

となる．ただし

$$f(a) \equiv \frac{1-2a}{2\sqrt{a(1-a)}} \qquad (0<a<1).$$

この答のもつ経済的意味を説明し，さらに普通の場合，需要は Poisson 分布と考えられるわけであるが，このとき (*) から計算に最適政策と今の答 y^* とは，$0.05<\frac{c}{r}<0.95$ において殆んど一致することを示してある．つまり，この意味でもこの max-mim 的接近は充分合理的なのである．　(坂口　実)