# 最適発注量の問題〔II〕

原　野　秀　永*

## ま　え　が　き

第1報（経営科学第2巻第1号）においては需要分布が不連続な場合を取扱ったが，今回は需要分布が連続な各種の分布につき最適発注量を求め，最後に分布が正規分布で平均値未知，分散既知の場合のミニマックス的解を求めた．

## 1. 一　般　式

初刷の場合支払う金額を $\varphi_1(x)$，不足の場合再発注を $k$ 個行って支払う金額を $\varphi_2(k)$，売れ残ったとき処分した益金を $\varphi_3(l)$ とし，市場の要求が $x$ 以下である確率は $\int_0^x f(y)\,dy$ とする．この場合の全支払金額を

$$C=\varphi_1(x)+\int_x^\infty \varphi_2(y-x)f(y)\,dy-\int_0^x \varphi_3(x-y)f(y)\,dy$$

今つぎのような場合を考える．

$\varphi_1(x)=a_0x+a_1$

$\varphi_2(y-x)=b_0(y-x)+b_1 \quad y\geqq x$

$\varphi_2(y-x)=0 \quad y<x$

$\varphi_3(x-y)=c_0(x-y) \quad x\geqq y$

$\varphi_3(x-y)=0 \quad y<x$

この条件の下で $c$ を最少にする条件を求める．

$\dfrac{\partial C}{\partial x}=0$ の条件を導入すると

$$\varphi_1'(x)+\int_x^\infty \frac{\partial\varphi_2(y-x)}{\partial x}\cdot f(y)\,dy-\varphi_2(0)f(x)-\int_0^x\frac{\partial\varphi_3(x-y)}{\partial x}f(y)\,dy-\varphi_3(0)f(x)=0$$

上記の条件を導入すると

$$\int_0^x f(y)\,dy=\frac{b_0-a_0+b_1f(x)}{b_0-c_0} \tag{1}$$

となる．以下各種の $f(y)$ につき $x$ を求めるが，簡単のため $a_0\fallingdotseq b_0$, $c_0=0$. すなわち再発注の場合の1個当りの変動費は初刷のそれとほぼ同じであるとし，また余剰は処分できないとする．

$$\int_0^x f(y)\,dy=\frac{b_1}{b_0}f(x) \tag{2}$$

* 東京芝浦電気株式会社　昭和33年4月19日講演，11月18日受理

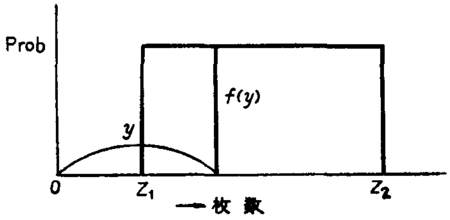
## 2. 一様分布の場合

分布 $f(y)=\dfrac{1}{z_2-z_1}$ とする (第1図)

$$\int_{z_1}^{x}\frac{1}{z_2-z_1}\,dy=\frac{b_1}{b_0}\,\frac{1}{z_2-z_1}$$

$x=z_1+\dfrac{b_1}{b_0}$ 但し $z_2\geqq x\geqq z_1$

発注量は再発注時の固定費と変動費の比によりきまる.




第 1 図

## 3. 三角分布の場合

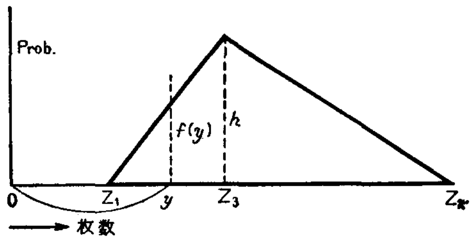
第2図の如き分布につき計算を行う. この場合実情を最も簡単化して考えたものがこの分布と考えてよいであろう.

分布の下限を $z_1$, 上限を $z_2$, 最大点の位置を $z_3$ とすると

*a*) $z_1\leqq x\leqq z_3$ の場合

$$\frac{f(y)}{h}=\frac{y-z_1}{z_3-z_1}\quad\left(\text{但し } h=\frac{2}{z_2-z_1}\right)$$

$$\int_{z_1}^{x}\frac{h}{z_3-z_1}(y-z_1)\,dy=\frac{b_1}{b_0}\cdot\frac{x-z_1}{z_3-z_1}h$$




第 2 図

$x=z_1+2\dfrac{b_1}{b_0}$ したがってこの場合には $\dfrac{b_1}{b_0}\leqq\dfrac{z_3-z_1}{2}$

*b*) $z_2\geqq x\geqq z_1$ の場合

$\displaystyle\int_{z_1}^{x}f(y)\,dy=1-\int_{x}^{z_2}f(y)\,dy$ であるから

$$1-\int_{x}^{z_2}f(y)\,dy=\frac{b_1}{b_0}f(x)$$

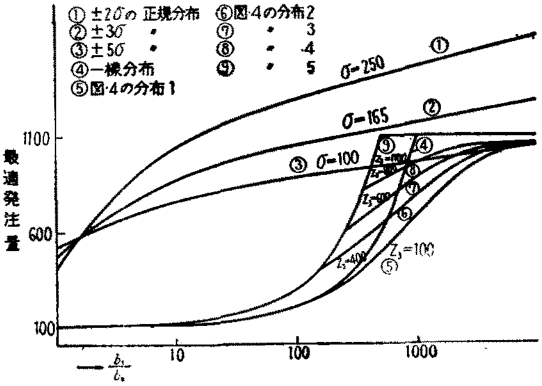
この解は $x=z_2+\dfrac{b_1}{b_0}-\sqrt{\left(\dfrac{b_1}{b_0}\right)^2+(z_2-z_1)(z_2-z_3)}$ となる.

以上をまとめると

$$\frac{z_3-z_1}{2}\geqq\frac{b_1}{b_0}\ \text{の場合}\quad x=z_1+2\frac{b_1}{b_0}$$

$$\frac{z_3-z_1}{2}<\frac{b_1}{b_0}\qquad x=z_2+\frac{b_1}{b_0}-\sqrt{\left(\frac{b_1}{b_0}\right)^2+(z_2-z_1)\,(z_2-z_3)}$$

## 4. 正規分布の場合




第 3 図

平均値 $m$, 標準偏差 $\sigma$ の正規分布では

$$\int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy=\frac{b_1}{b_0}f(x)$$

$x=m+k\sigma$ が解となる.

$k$ は $\frac{b_1}{b_0}$ の函数で下表の値である.

| $b_1/b_0$ | 1 | 10 | 100 | 1000 |
|---|---|---|---|---|
| $k$ | $-0.8$ | 1.69 | 2.72 | 3.46 |

三角分布の $z_2$ と $z_1$ の間に $\pm2\sigma$, $\pm3\sigma$, $\pm5\sigma$ の正規分布をあてはめたときの状況は第3図に示してある.

## 5. 3つの分布の比較

一様, 三角および正規分布における最適発注量を比較してみる. $z_2=1100$, $z_1=100$ とし, 三角分布における $z_3$ の位置は100, 400, 600, 800, 1100, の5通りにして,お互の比較をしたものが第3図である.この図より判明するごとく,分布が正規分布の場合には裾を無限に引くことにより,非常に多くの量を購入することとなり非現実的である (無限に需要のあることはないから).ただし $z_1$ と $z_2$ の間に $\pm5\sigma$ を入れる場合 (分布が非常に集中している) には $\frac{b_1}{b_0}$ が大きいところでは他の分布を考えるよりも経済的である. すなわち分布が集中していて, 固定費が変動費に比して大きいときには, 正規分布の取扱いがよいであろう.

三角分布の場合には不連続の部分があるので最適発注量と $\frac{b_1}{b_0}$ の曲線も2つの部分よりなる.
山の左の部分, すなわち

$z_3-z_1 \geqq 2\frac{b_1}{b_0}$ の場合では曲線は一致し,山の位置の多少の変化により左右されることが少ない.

また $\frac{b_1}{b_0}$ の大きな値でも山の位置の変化に対して最適発注量は大して変らない.

$\frac{b_1}{b_0}$ が $z_1$ と $z_2$ の間にあるときは山の位置により発注量が大きい変化をうける. その差が最大となるのは $\frac{b_1}{b_0}=\frac{z_2-z_1}{2}$ で, その差は $0.618(z_2-z_1)$ で山の位置のちがいによる最適発注量の差は最大 $z_2-z_1$ の約60%であるから, 山の位置は多少異ってもよいであろう. 現実的には正規分布を仮定するよりも $z_3=\frac{z_1+z_2}{2}$ のところに最高値のある三角分布で取扱う方がよいようである.

## 6. ミニマックス的解について

今迄のものは分布に関する情報は充分（パラメーターについて既知）あったが，この場合は分布型は既知（正規分布）で分散も既知であるが，平均値は未知で（但し上限はわかっている）あるとするときである．

市場の需要分布 $f(y)$ は

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{但し}\left(\begin{array}{l}\sigma^2=\text{既知}\\ m=\text{未知}\\ m\leqq m_0\end{array}\right)$$

とする．

市場は $m$ を変化させて製造者の支払金額を最大にせんとし，製造者は $x$ を変化させて支払金額を最少にせんとする．支払金額を $c$ とすると

$$\frac{\partial c}{\partial m}=\frac{\partial}{\partial m}\int_x^\infty \varphi_2(y-x)f(y\cdot m)\,dy-\frac{\partial}{\partial m}\int_{-\infty}^x \varphi_3(x-y)f(y\cdot m)\,dy$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_2(y-x)=b_0(y-x)+b_1\\ \varphi_3(x-y)=c_0(x-y)\end{array}\right\}\text{とすると　但し}\quad b_0\geqq c_0$$

$\frac{\partial c}{\partial m}>0$ となるから $c$ は $m$ と共に単調増大する．故に $m=m_0$ で最大となる．故に $m=m_0$ が $c$ を最大ならしむる値である．次に $\left|\frac{dc}{dx}\right|_{m=m_0}=0$ が $c$ を最少ならしむる $x$ の値で

この値は $x=m_0+k'\sigma$ となる．但し $k'$ は $\frac{b_1}{b_0-c_0}$ の函数で $\int_0^{k'}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\frac{b_1}{b_0-c_0}e^{-\frac{k'^2}{2}}$ を満足する値である．

以上のことよりわかるように平均値の上限以上に発注することとなり非常に不経済で非現実的である．余りに石橋をたたいて渡る必要はないであろう．