在庫量問題を例とした不確定モデルに関する考察

春日井　博*　加瀬谷　忠　美**

要　旨

今日までに現われているORの数学的手法の内で，最も実際的に広く応用されているものは，確率論および数理統計学的手法であり，そのような手法を用いたORモデルのほとんどは，数学的期待値の最適化という解法をとっている．この解法は，いわゆる mathematical expectation の原理として行動決定の一つの基準ではあるが，多数回の operations について意味を持つものであって，個々の operation についての行動決定の基準としては危険な場合がある．そこで，この欠陥を補う意味で，許容できる最高限度の損失を目安とした別の解法を提案すると共に，いわゆる Minimax 原理との比較を行う．

1. 数学的期待値の問題点

ORにおける確率モデル，特に在庫量管理に関するそれは，数学的期待値として費用・損失・収益などを定式化し，その函数を微分して極値を求めるという手法がきわめて多く用いられている．しかし，数学的期待値それ自体にはいろいろな問題がある．

最も極端な形で数学的期待値の欠陥を指摘したのは，Daniel Bernoulli の有名な St. Petersbrug の逆説である．彼はこの問題を提起すると共に，金額それ自体が意味を持つのではなく金額の utility がわれわれにとつて意味を持つのであるとして，いわゆる moral expectation の原理を提案したが， utility の概念について幾多の問題を生じ（もちろん，それ以外の批判もあつたが)，これが決定的な解決案でなかつたことは周知の通りである．

この St. Petersburg の問題は，有限な期待値が存在しないという，むしろ例外的な場合を用いて逆説的に問題を提起したもので，このような形での問題提起は妥当ではないという意見もあるが，有限な期待値が存在する場合であっても，客観論的確率概念が多数回の繰り返し操作（現象）を通じて意味を持つのと同様に，数学的期待値も多数回の繰り返しを通じて意味を持つのである．したがって，端的にいえば，数学的期待値として収益が黒字であっても，一時的にはいろいろな値が実現し，赤字を生ずることも，ときにはあるかも知れないのである．

さらに現実の問題として，需要の分布函数を求めることの困難な場合が多く，需要が確率的現象であると見なし得るかどうかが，問題になることも少くない．需要の確率分布がわからなければ，数学的期待値が計算できないことはもちろんである．

---

*　早稲田大学第一理工学部，　**　早稲田大学大学院，昭和32年11月3日講演，11月28日受理．

そこで，これらの欠陥を補う解法が望まれることになる．

2. 安全範囲を求める解法

最も簡単で典型的な例として，つぎのような問題をとって考えよう．

y＝仕入数，

d＝需要量，

P＝単位当り販売利潤，

L＝単位当り売残り損失，

π＝d が y より上回つたとき 1 単位ことわる毎にこうむる損失，

であって，需要量 d が確率密度函数 $dF(d)$ を持つとき，最適な仕入数はいくらかという問題である．これは有名な問題であって，数学的期待値としての損失を最小化する解法をとれば，

$$\int_0^y dF(d)=\frac{P+\pi}{L+P+\pi} \tag{1}$$

なる y がその解であることが知られている．(この解法の計算は，たとえば，水野幸男 “在庫量管理講座” オペレーションズ・リサーチ誌 Vol. 1, No. 4 に詳しく説明されているので，ここでは省略する．)

ところで，このモデルの損失函数は，

$d\leqq y$ のとき；

$$L(y-d)-Pd=Ly-d(L+P) \tag{2}$$

$d\geqq y$ のとき；

$$-Py+\pi(d-y)=-(P+\pi)y+\pi d \tag{3}$$

であり，この損失高は d と y とによって定まるのであるから，一般には 3 次元空間内の曲面であるが，この場合は $d=y$ にて交る 2 つの平面を考えることになる．ここで，

$d\leqq y$ のとき；

$$Ly-d(L+P)=K \tag{4}$$

$d\geqq y$ のとき；

$$-(P+\pi)y+\pi d=K \tag{5}$$

とおけば（K はある定数)，(4) 式および (5) 式は損失高が K である等損失高線となる．また ある点 $(y_1,\ d_1)$ における損失高に等しい等損失高線を求めたければ，

$d\leqq y$ のとき；

$$Ly-d(L+P)=Ly_1-d_1(L+P)$$

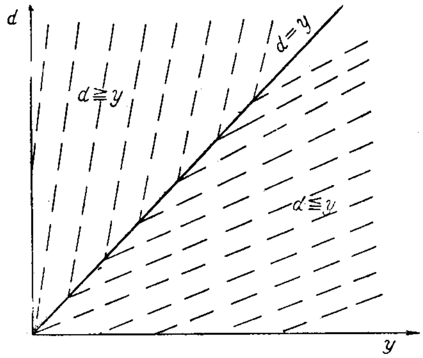
$$\therefore\quad d=\frac{L}{L+P}y-\frac{L}{L+P}y_1+d_1 \tag{4'}$$

$d\geqq y$ のとき；

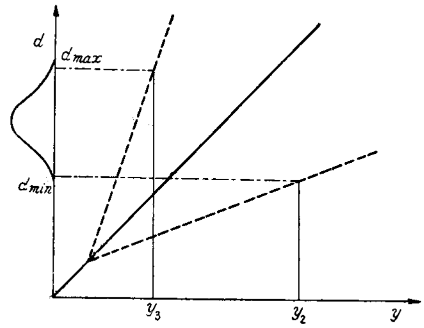
$$-(P+\pi)y+\pi d=-(P+\pi)y_1+\pi d_1$$

$$\therefore \quad d = \frac{P+\pi}{\pi} y - \frac{P+\pi}{\pi} y_1 + d_1 \tag{5'}$$

すればよい．いろいろな損失高に対する等損失高線群を画くと第1図の破線のようになる．原点 $y=0$, $d=0$) においては，もちろん損失0であり，原点から出る等損失高線は損失高0の線(損得なしの線)である．$d=y$ の線は仕入数と需要量とがちょうど等しい点をつらねた線であるが，右上に上るほど損失はマイナスで絶対値が大きくなる(すなわち純利益が大きくなる)．このことから損失函数の幾何学的形態が明らかである．



第1図　等損失高線群



第2図　安全範囲の存在

ここで許容し得る最高損失高に対応する等損失高線を選び(第2図)，$d \leqq y$ の範囲では，その線上で需要量の最小値 d_{min} に対応する点の y 座標を求め（これを y_2 とする)，$d \leqq y$ の範囲ではその線上で需要量の最大値 d_{max} に対応する点の y 座標（これを y_3 とする）を求めれば，第2図のように $y_3 < y_2$ なるときは，

$$y_3 < y < y_2 \tag{6}$$

なる y をとれば，ほとんど確実に許容し得る範囲内の損失高となる．なお，第2図で選んでいる等損失高があるマイナスの値をとる線であるから，これは最悪の場合でも少くともいくらかは純利益を得たいという考え方である．

数学的期待値最適化による解が（6）式で表わされる安全範囲に入つていれば，そのような y の値をとればよいが，数学的期待値最適化による解が必ずしもこの安全範囲には入らないので，その場合は長期的立場（数学的期待値最適化）からの最大利潤追求をあきらめて各期毎における安全性を重んじて（6）式で示される y をとるか，または，各期毎にはときどき大きな損失を生ずるというリスクをおかしても数学的期待値の最適化をねらうかという判断が必要になる．

なお上述の安全範囲を求める解法は，需要量の分布函数を必要とせず，需要量の最大値と最小値（需要量の範囲）を予測するだけで足りるという点が長所である．

ところが，このような安全範囲は存在しない場合がある．第3図のように $y_2 < y_3$ となつた場合がそれで，このようなときは，いかなる y の値をとっても，許容できざる大きな損失をこうむる危険をともなうので，経営管理の合理化の必要に迫られていることが示される．第3図のように $d_1 = y_1$ なる点で目安をつけて計算するとすれば，（4′）（5′）から，

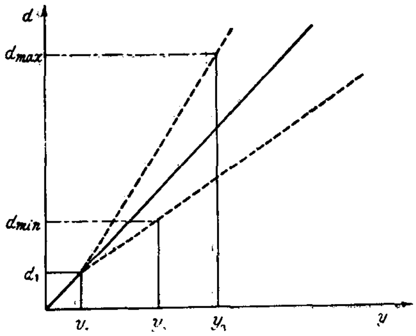
$$y_2 = y_1 + (d_{min} - d_1)\frac{L+P}{L} \tag{7}$$

$$y_3 = y_1 + (d_{max} - d_1)\frac{\pi}{P+\pi} \tag{8}$$

となるから，第３図のごとき現象は，

$$\frac{d_{max} - d_1}{d_{min} - d_1} > \frac{(L+P)(P+\pi)}{\pi L} \tag{9}$$

のとき起ることになる．すなわち，需要予測（または需要量のバラツキ）の幅をせばめるとか，L, P, π の値が変るよう合理化を進めて第２図の状態に持つて行けば，安全性を確保できることを意味する．



第３図　安全範囲の存在しない場合

第３図のような場合でも，需要量の確率分布が既知であれば，許容し得る範囲内に損失高がおさまる確率を最大化する y を，次善の策としてとることも考えられる．この考え方は確率最大化の原理と呼ぶべきであろうが，この解は必ずしも容易に求まるとは限らない．（矩形分布の場合は $y=y_3$ とすればよい．ただし損失函数が上述のものでないときは，矩形分布の場合でも必ずしも簡単ではない．）

以上に述べたのは，前期からの繰越量がない場合であるが，このような場合，一般に，仕入数 y と需要量 d とによつて損失 $W(y, d)$ が定まるとし，許容し得る最大損失が K であれば，需要量がある考えられ得る範囲 $d_{min} \sim d_{max}$ の中に実現すれば，必ず，

$$W(y, d) \leqq K \tag{10}$$

であるような y の範囲を求めるということである．一般的に函数 $W(y, d)$ について，このような解（y の範囲）を求める普遍的な手法はないようであるが，実際にＯＲに現われる損失函数は，比較的簡単なものであって，たかだか二次函数程度であるから，このような解法を利用できると考えられる．

前期よりの繰越しがある場合は，当期々首に追加分を仕入れる場合と仕入れない場合とに別けて（返品も許される場合は，返品するかしないかという場合を考慮して），同様な方法で解くことができる．もちろん，この場合には損失函数に新しいパラメータが加わることになる．

3.　Minimax 解との比較

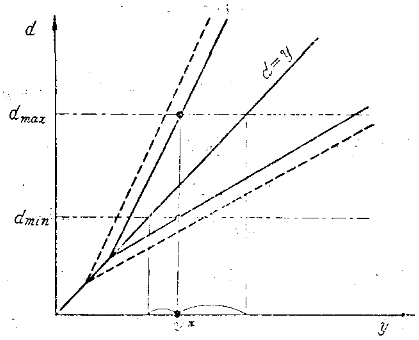
需要の確率分布が未知であつても，上述の方法が適用できることはすでに述べたが，同じく需要の確率分布未知でその範囲だけが既知の場合に利用できる解法として，Minimax 解があることは周知の通りである．従来，在庫量問題に対して考えられて来た Minimax 解法は，市場がある mixed strategy（需要の確率分布）をとるがその分布函数の集合がある程度想定され，その範囲内でどの分布函数が実現するかが不確定であるという場合である．しかし，実際的立場からすれば，これを一段簡素化して，分布函数の集合の想定をするのではなく，pure strategy を

ある範囲内で選ぶものと考えて見る方がよいと思う．

前述の例題をこの考え方で解くと，起り得べき最大損失を最小化する y を求めることであるから，第 4 図のようになる y^*，すなわち，

$$W(y^*,\ d_{min})=W(y^*,\ d_{max}) \qquad (11)$$

なる y^* を求めると，（この例題の場合は）それが Minimax 解である．この事実は，第4図における実線で示した等損失高線と破線で示した等損失高線とを比較して見れば容易に理解できる．（破線の方は実線の方よりも大きな損失高に対応する．）この他の損失函数の場合は，(11) 式を満足する y^* が必ずしも Minimax 解ではないから注意を要する．



第4図　Minimax 解の位置

(11) 式より y^* を求めると，

$$y^*=\frac{d_{min}(L+P)+\pi d_{max}}{L+P+\pi} \qquad (12)$$

となつて，この例題の Minimax 解は，需要の最大値に等しい仕入数と需要の最小値に等しい仕入数との間を，$\pi:L+P$ の比に内分する値となる．すなわち，

$$\frac{d_{max}-y^*}{y^*-d_{min}}=\frac{L+P}{\pi} \qquad (13)$$

ということである．

しかしながら，この Minimax 解をとったとき起り得る最大損失が許容し得る範囲内の値であるかどうかは，全く別問題である．

一般に Minimax 解は需要（相手の手）の確率分布が全々未知であっても使える解法であり（確率分布についてある程度わかっていても全々未知としてしまうことにもなるが），さらに，安全第一の慎重な解であるという点では優れている．しかし，その反面，Minimax strategy 以外のある strategy をとったとき起り得る最大損失（これは Minimax strategy のときのそれよりも大きい）が，なおかつ大して痛手でない場合は，Minimax 解にこだわる必要はないのであるし，逆に，Minimax strategy において起り得る最大損失がすでに許容限度を超えているならば，Minimax strategy をとっても危険であることになる．

前者の場合（Minimax 解にこだわる必要がない場合）は前節に述べた安全範囲の存在する場合であり，後者の場合にはもちろん安全範囲が存在しない．このことから，前節に述べた安全範囲を求める解法は，Minimax 解の一種の修正であるとも見なせる．しかし前述の K の値を一方的にあたえるために，解が存在しなくなる（安全範囲が存在しなくなる）場合が生ずるわけであり，この点において，従来研究されている ε-Minimax とは異ると考えてよいであろう．

4. 不確定モデルと Decision

同一の問題に対してこのようにいろいろな解法が考えられるのであるから，OR worker は解法を選択しなければならない．さらに，一般的にいつて，OR モデルに組織的因子（横の関連因子）および時間的因子（縦の関連因子）をどうとり入れて定式化するか，各係数および確率分布などを具体的にどう決めるか，そしてこのような解法をどう選択するかが OR worker のなすべき decision であり，ここまで分解したときには，やはり主観的判断が介入して来る．そして OR の結論は，決して decision そのものではなく，decision の基準であるに過ぎないのであって，OR の結論から実際の decision への過程に主観的判断が再び介入することを認めなければならない．全面的に主観論を認めることは危険であって，われわれとしては，できるだけ客観論的に取扱える範囲をひろげる努力をすべきであると思うのであるが，本論文において扱つた解法の問題についても，どの解法が絶対に良いと断言する理由は今日のところではないのであって，解法の選択も当事者の責任と判断とにまたなければならないのである．

O R の 体 系

——O R の 適 用 性 と そ の 限 界——

目　崎　憲　司*

O Rは経験科学に属し，また一つの実践科学である．そして，O Rの理論を実践に応用してえた結果は経験科学としてのO Rの素材となり，より精密なO Rの理論の発展に役立つのである．かかる意味において，O Rにおいては，経験科学としての性格と実践科学としての性格が統合せられていると思う．

O Rは経営者（または執行部）executive departments に，彼等の管理下にある諸活動に関する決定を与えるための計量的基礎を供給する一つの科学的方法である[1]．

この定義に含まれている概念要素のうち，さしあたり二つの要素をとりあげた．その一つは経営者（または執行部）executive であり，他の一つは計量的分析方法である．そこでまず経営者（または執行部）という要素について吟味を加えよう．

通常経営者という場合には，企業の経営者を指すようである．また最近わが国でO Rを経営科学と訳しているのであるがこの場合の経営も企業の経営を意味しているように解せられる．それでは，経営とは何を意味するのであろうか．私はいまさらここで周知のような経営の概念を説明

---

*　下関商業短期大学，昭和32年11月2日講演，12月6日原稿受理

1)　McCloskey, J. F. and Trefethen, F. N., Operations Research for Management, p. 89.