謝 辞

この問題は三菱金属鉱業の菅波三郎君によつて提起されたものである．本論文の完成にあたり有益な助言と刺戟を与えられた同君に感謝する．また計算は東京大学工学部助手の小林竜一，小柳芳雄両君に負うところが大きい，ここに付記して感謝のしるしとする．

参 考 文 献

(1) Lotka, A. "A contribution to the theory of self-renewing aggragetes, with Special reference to industrial replacement" *Ann. of Math. Stat.*, **10** (1939), pp. 1～25

Feller, W. "On the integral equation of renewal theory" *Ann. Math. Stat.* **12** (1941), pp. 243-267.

この Lotka の論文には 1907 年から 1939 年までに発表された補給の問題にかんする 74 の文献のリストがあげられており，Feller のには 1941 年までの 18 の文献がある．

(2) 原野秀永・松岡由里子；補給に関する2，3の問題，品質管理シンポジウム報文集，(1956) pp. 270-273.

(3) たとえば，近藤次郎；演算子法，培風館，東京，(1956).

(4) 近藤次郎；積分方程式，培風館，東京(1954)， pp. 105-129.

リニヤ・プログラミングによる木取り計画

前 田 活 郎*

は し が き

与えられた原木から，何種類かの直方体の板を切り取る場合に，原木の本数に関する制限，製品の要求数に関する制限を満足してしかも原木の使用量をできるだけ少くしたい．これはすぐに LP の範疇に属することが想像できる問題であるが，この種の問題には2つの特徴が考えられるようである．1つの特徴は，ある切断のし方で与えられた原木を全部切ってしまうし方から容易に出発点となる基本解が作れることである．したがって調整変数だけで作った解のように最適解に程遠い解から計算をし始める必要がないという利点がある．もう1つの特徴は本来解が整数でないと具合が悪いという点から生じる困難であって，LP から求められた最適解を下手に丸める

---

* 鉄道技術研究所，計画管理研究室，昭和32年11月3日講演，11月14日受理

と最適解どころか可能解でさえもなくなるという点であって，種々の丸めを試みて見て条件からはみ出ないものを取らなくてはならない．もっとも一般には，LP の最適解を適当に丸めたものが整数解の中の最適解ではないのであって，この点に関しては将来の研究に俟つ外ない現状である．

1.　問題の説明

この問題は国鉄名古屋工場製材職場から提出された問題である．材質別に計画をたてることにして，今その一つとして「つが」について第１表のような数値が与えられたものとする．

第１表　つが（原木長さ10尺）木取り条件

原木		1				2				3				4				5				6				7			
在庫数		1116				1524				1143				1270				1143				889				508			
製品	体積	0 110				0 121				0 132				0 144				0.156				0.176				0.240			
	要求数	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
1	12730		1				2		2	4				4							4	7	6	2	5		2	6	6
2	990						2					2			3	2										2	5	2	1
3	4050											2	4		2	2		5	5										
4	4030	4						4	2											5					2				
5	9700		3	4	4	4					2						5						2	6		7			
6	3450										6		2	2		2	2	2	2	2	2					2		2	3
7	5950		1			2			2	2	1	2							2		2	2				2			1
8	1760	2	1	4	2	2	2	4	2				2	2				2		2	2		2	2	2				
9	4500	2			2										2		2								2				3
歩留り		56 2	52 0	56 2	54 9	53 0	57 1	52.4	58 3	50.7	55.3	51 8	56 1	55.4	56.1	50.4	54.1	55.5	56.9	52.1	58.1	68.1	65 3	58.8	61.8	56.7	45.4	54.8	57 9

原木の種類は径の相違によるものであり，各原木について ABCD 4 種の切り方が与えられている．これらはなるべく歩留りのよい方法であって，この点に関しても研究の余地があるがここでは与えられたものと考える．製品の種類は９種あってそれぞれ大きさが違っている．たとえば原木の１を A の方法で切ると製品４が４枚，8, 9 がそれぞれ２枚えられる．原木の在庫数および製品の要求数は本数であり，体積の単位は立方m，歩留りは%で与えられている．

最初総歩留りを最高にしたいという形で問題が提出されたのであるが，各原木を各方法で切る本数を未知数にとった時総歩留りは未知数の分数函数の形になり，簡単に解くことは難しいのでさし当り，使用する原木の総体積を最小にすることで満足することになった．条件は使用する原木の本数が高々在庫数という条件と，製品の製作数が少くとも要求数という条件とであって，LP で解くことについては問題はない．

2.　基　本　解

LP の中で輸送型の問題が割に容易に計算できる理由の一つは，最適解に近い基本解が簡単に作れるという点にある．ハウタッカーの方法[1]，あるいはフォーゲルの方法[2]等によって基本解を作ると，それはかなり最適解に近い．後者によれば 10 回の内８回は一度で最適解に達するといっ

た記事が出ているが，それは簡単な問題の場合であって，複雑な問題ではなお相当回数の計算を必要とするにしても，一般の LP の問題でスラック変数だけで作った基本解から出発するのに比較すると全く雲泥の差であろう．

この木取り計画の問題ではそれに近いことが可能であって，スラック変数だけで作った基本解よりもずっと最適解に近いところから出発することができる．この間の事情を第2表に示すような，より簡単な問題で説明しておこう．

$$\begin{cases}\text{原木在庫数の制限に対するスラック変数を } y_i \\ \text{製品要求数の制限に対するスラック変数を } z_j\end{cases}$$

としておこう．y_i は i 番目の原木に対する使用残を表わし，z_j は j 番目の製品に対する過剰すなわち要求数以上に作った場合に要求数を上まわる数を表わしている．

$$\begin{cases}x_1+x_2+y_1=50,\ x_3+x_4+y_2=40,\ x_5+x_6+y_3=30 \\ 2x_2+2x_4+4x_5-z_1=120 \\ 2x_1+3x_3+2x_4+x_6-z_2=200 \\ 4x_1+2x_2+x_3+x_5+3x_6-z_3=250 \\ x_i,\ y_i,\ z_i \geqq 0 \\ 2(x_1+x_2)+3(x_3+x_4)+4(x_5+x_6)\ ;\ \text{最小}\end{cases}$$

第2表　簡単な例題

原木	1		2		3		製品所要数
切り方	A	B	A	B	A	B	
製品 ＼ 本数	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
1		2		2	4		120
2	2		3	2		1	200
3	4	2	1		1	3	250
原木数	50		40		30		
体積	2		3		4		

製品要求数に関する条件は元来等式でよいのでるあが，等式にすると制限が相当きびしくなり，解が不能になることが起り易い．

Eisemann の問題[3]のようにこの例の ABCD に相当するものが非常に沢山あれば不能の起る心配が少くなるのであるが，この例では ABCD に相当するものを増すと，歩留りの低い切り方がはいって来るので好ましくないことになる．

さて基本解を作るには，各原木をたとえば A の切り方で全部切ってしまう計画を考えればよろしい．その場合には y_i はすべて 0 となるし，また x_2, x_4, x_6 は 0 だからベーシスには x_1, x_3, x_5 と z_j がはいることになる．その値は各原木を全部 A で切るのであるから，

$$x_1=50,\quad x_3=40,\quad x_5=30$$

となり，これから各製品の出来高がきまるから，したがって要求数に対する過剰 z_j がすぐにきまる．

$$z_1=4\times30-120=0,\quad z_2=2\times50+3\times40-200=20,$$
$$z_3=4\times50+1\times40+1\times30-250=20$$

またシンプレックス表の内 x_1, x_3, x_5, z_1, z_2, z_3 の列は単位行列をなすようにきまるから後は x_2, x_4, x_6 の列と y_i の列をきめればよい．

(1)　y_1 の列等

y_1 を1採用することは原木1を1本残すこと．したがって x_1 は1減少し，x_3, x_5 は不変．

それによって製品は1が不変，2が2枚減少，3が4枚減少．これから y_1 の列には $(1,0,0,0,2,4)$ が縦に並ぶ．

(2) x_2 の列等

x_2 を1採用するには x_1 を1本減少，x_3, x_5 は不変．それによって原木1の1本がAからBに移るので，製品1は2枚増加，2は2枚減少，3は2枚減少．そこで x_2 の列には $(1,0,0,-2,2,2)$ が縦に並ぶ．

このようにして第3表に示すように，すぐにシンプレックス表ができ上りこれから計算を進めることができる．

第3表　シンプレックス表

c_j	ベシ|ス	S	y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	z_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
									-2	-2	-3	-3	-4	-4
-2	x_1	50	1						1	1				
-3	x_3	40		1							1	1		
-4	x_5	30			1								1	1
	z_1	0			4	1				-2		-2		4
	z_2	20	2	3			1			2		1		-1
	z_3	20	4	1	1			1		2		1		-2

この例のように S 列に非負の数がでる時には後の計算は大したことはないが，場合によっては過剰を示す z の値が反対に負になって不足を示すことがある．この時にはこの負の値をなくするために若干回表を計算しなくてはならない．それにしてもスラック変数だけで作った基本解から出発するよりはましであると思われる．

3. 最　適　解

もとの問題に対して上のような方法で計算を行った．始めの問題は条件が16個，変数はスラック変数16個を含めて44個となるのであるが，歩留りの低い方は好ましくないという理由と計算を早くすましたいために，各原木に対して歩留りのよい2つの切り方による本数だけを structural variables に取って計算を始めた．しかし途中で製品5がどうしても不足するために，この製品を増加するような activity でしかもその step で要求数きっかり作られている製品を減少しないような activity として原木1に対するDの切り方をつけ加えなければならな

第4表　最　適　解

原　木	1			2		3		4		5		6		7	
切り方	A	C	D	D	B	D	B	B	A	D	B	A	B	D	A
未知数	x_1	x_2	x_{15}	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
値	245.5	0	920.5	1524	0	168	342	1084	186	901	242	0	889	0	508
在庫数	1166			1524		1143		1270		1143		889		508	
使用数	1166			1524		510		1270		1143		889		508	
使用残	0			0		633		0		0		0		0	

くなった．したがって structural variables は結局 15 個で最適解がえられた．これを第4表に示す．

もしも歩留りをやかましくいわないで，使用原木量最小の目的に徹するならば，はじめから28個の structural variables を入れ，適当な計算機械にかければ，使用原木量最小という点ではもっとよい最適解がえられたと思われる．

さて第4表を見ると x_1 と x_{15} が小数をもっており実施するには整数でなくてはならない．ところで四捨五入ということにすると，どちらも五入されて $x_1=246,\ x_{15}=921$ となり，原木1の使用数が 1167 となって在庫数を超過する．したがって一方を四捨し，一方を五入する外ない．どちらを四捨するかによって2つの場合が考えられ，その両者について製品の枚数を計算してみると，第5表のようになる．すなわちどちらの計画もアンダーラインをした値が示すように製品4か5で不足を生じることになる．

第5表　丸めた解による製作数

製品	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
要求数	12730	990	4050	4030	9700	3450	5950	1760	4500	
製作数	12730	4268	4050	4028	9702	6062	6692	9668	4500	$x_1=245,\ x_{15}=921$
	12730	4268	4050	4032	9698	6062	6692	9668	4500	$x_1=246,\ x_{15}=920$

この不足をなくするには，それらを増すような切り方でもう1本切ればよいが，使用残のある原木は3だけだから x_5 もしくは x_6 ならば増すことが可能である．このことを考え第1表を調べて不足をなくするように調整すると，$x_1=246,\ x_{15}=920,\ x_6$ を1増して $x_6=343$ とすればよいことがわかる．したがって最終の計画は第4表がこのように変り，原木3の使用残は 632 に変ってくる．

さてこの問題では小数部を有する変数が2つであったから，以上のようにして割に簡単に調整することができたのであるが，もしも多くの変数に小数部が表われたならば，最適解を条件に抵触しないように丸めることは必ずしも容易ではないと思われる．しかも最適解を丸めたものが，整数解の中の最適解であるという保証はないのであるから問題は更に深刻といわなくてはならない．

4. 原木の制限

今までは原木の在庫数の範囲で計画をたてることを考えたのであるが，計画は短時日の内に実行されるものではないから，計画をたてた後で必要な原木を購入するような手続きをとることは必ずしも不可能ではないであろう．一方計画を見れば製品を必要以上に沢山作るような製品もかなりあるし，これには原木の制限が相当にきいているように想像される．そこで今度は原木の使用数には制限をおかないで，製品の要求個数に関する制限だけにして解いてみた．この場合も総歩留りを低下しないよう，各原木に対して歩留りのよい 2 つの切り方だけを考えて計算を進め

た.

この場合の最適解には多くの変数に小数部が表われ，条件からはみ出さないように丸める点があまり簡単でなく，このような場合に使えるうまい手法の必要なことを痛感した．ただこの場合には制限が製品要求数に関するものだけであるから，原木使用本数にも制限がある場合よりも楽である．最適解を適当に丸めた結果を第6表に示す．前の場合と比較すると全体として使用原木は少くなっているが，まだ製品によってはかなりの過剰を生じている.

第6表　原木制限をはずした時の最適解

原木	1		2		3		4		5		6		7	
切り方	A	C	D	B	D	B	B	A	D	B	A	B	D	A
未知数	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
値	1008	1302	0	0	0	0	0	0	0	810	1109	0	828	642
在庫数	1166		1524		1143		1270		1143		889		508	
使用数	2310		0		0		0		810		1109		1470	
使用残	—		1524		1143		1270		333		—		—	

製品	1	2	3	4	5	6	7	8	9
製作数	12731	2112	4050	4032	9702	5388	5950	7224	4500
要求数	12730	990	4050	4030	9700	3450	5950	1760	4500

第7表　原木制限有無比較

		使用原木本数	製品総体積	使用原木総体積	総歩留り
原木使用制限	有	7011本	592.5m³	1019.6m³	58.1%
	無	5699	550.1	928.4	59.2%

使用原木，製品，総歩留りについて比較したのが第7表であって原木使用本数に制限をおかない方が原木消費が明らかに少ない.

更に一歩を進めるには，製品に過剰を生じた場合の経費すなわち次期に持ち越す場合の費用を見積り，過剰を表わす変数にこの経費をかけて目的函数の中に入れておく方がよいと思われる．はじめの条件式で製品の方の条件を等式にしてしまうのではこの変数の罰金が非常に大きくとられ(一般に M で表わしている)．シンプレックス計算を行うと，この変数が残ったまゝでシンプレックス規準が非負になり，不能の判定をする可能性が多いことになる．一方条件を不等式のまゝ進めると過剰が上例のようにかなり大きくなってあまり好ましくない．そこで過剰を示す変数の罰金を適当な費用で見積るという折衷的な立場を取った方がよいように思われる.

あ　と　が　き

この木取り計画の問題の経験からつぎのような問題の理論的な解析が望ましいと考えられる.

1. 一定半径の円と，この円からはみ出さないような数種の矩形とが与えられていて，この円から矩形の若干個をくり返しを許して切り取り，歩留りを最高にする（切り取る矩形の面積の和を最大にする）にはどう取ればよいか.

2. 整数の最適解が必要な場合に，小数部を有する解を条件にふれないように丸める一般的な方法.

3. 上のようにして丸めた解が整数解の中の最適解であるための条件.

最後に種々の便宜を与えて頂いた国鉄名古屋工場の管調査課長，羽澄正彦氏等に感謝の意を表します.

引　用　文　献

1) Houthakker, H. S., "On the Numerical Solution of the Transportation Problem," *J. Opns. Res. Soc. Am.*, 3 (1955), pp. 210～214.

2) Nyles V. Reinfeld, "Vogel's Approximation Method," *Tooling and Porduction*, April, 1957.

3) Kurt Eisemann, "The Trim Problem," *Management Science*, 3 (1957), No. 3, pp. 279～284.

カメラ修理サービスにおける待合わせの問題

山　田　隆　一*

I　ま　え　が　き

この研究は，当社のカメラ修理部門で，そこに配置すべき修理工の人員を，修理カメラの到着状況とその修理所要時間との関連において，待合わせの問題の一例として考察したものである．われわれの周囲には，たとえば販売の第一線における顧客の受付係や，品出係の適正要員の問題とか，フイルム現像設備の適正規模の問題とか，その他多くの待合わせ行列の問題があり，それぞれ興味ある研究対象であると思う．ここに報告するカメラ修理の問題は，カメラメーカーにとってはアフターサービスの重要な一分野であり，近来各メーカーは，こぞって良好な品質とサービスを顧客に提供することに努力するようになった．そこで会社のポリシーとして，顧客の待合わせ時間を一定限度以内に押さえたとき，修理カメラの到着数の変動に対して，修理工を何人位持つたらよいかを決める必要がおこってきた．そこで修理カメラの到着数およびその修理所要時

* 小西六写真工業(株)管理本部，昭和32年11月2日講演，11月25日原稿受理