消耗率の推定

近藤次郎*

要旨

工業用材料（機械部品，工具等）の補給と消費の状態からその消耗率を推定する問題を研究した．基礎方程式は Volterra 型第2種積分方程式となる．この方程式より消耗率——t 時間後に消耗する確率密度 $p(t)$——を推定する方法を述べる．とくに資料が離散的数値によって表わされている場合について補間公式を用い数値的に確率密度を求める方法について説明した．また，消耗率がガンマ分布やその他の分布であるときに資料から母数を推定する方法についても説明した．解析にはすべてラプラス変換を利用する演算子法によった．

1. 基礎方程式

工業用部品の寿命——消耗の確率——を知って補給方法を求めるいわゆる〃補給の問題〃は，1907年以来，Lotka, A.T. 等多くの研究者によつて取り上げられ Feller, W. 等は解の存在を厳密に証明した[1]．このような問題はわが国でも原野，松岡等によって研究されている．[2]

時刻 t における使用中の部品の数を $f(t)$ とする．このとき，部品の個数が十分大きくて整数値ではなく連続量で微分可能と考えることができるものとする．$t=0$ に新しくとりつけた部品中，$t=t$ までにその何パーセントかは消耗する．t と $t+dt$ との間に消耗する確率を $p(t)dt$ とすると，部品は何時かは消耗することを考えれば，

$$\int_0^\infty p(t)dt=1 \tag{1.1}$$

である．

時刻 t と $t+dt$ の間に補給される部品の数を $u(t)dt$ とする．$t=\xi$ と $\xi+d\xi$ の間に補給された部品 $u(\xi)d\xi$ が t と $t+dt$ との間に消耗する量は

$$p(t-\xi)\,u(\xi)\,d\xi\cdot dt$$

である．したがって補給が連続的に行われたとすると $t=0$ から t までに補給されたものが t と $t+dt$ との間に消耗する量は

$$dt\cdot\int_0^t p(t-\xi)\,u(\xi)\,d\xi$$

である．

---

* 東京大学工学部．昭和32年11月2日講演．同日原稿受理．

t と $t+dt$ との間に使用中の部品数の増加 df は補給 $u(t)dt$ と消耗との差であるからつぎの関係式がなりたつ.

$$\frac{df}{dt}=u(t)-\int_0^t p(t-\xi)\,u(\xi)d\xi \tag{1.2}$$

この式は $f(t)$ および $p(t)$ が既知で，補給 $u(t)$ が未知であるとすると $u(t)$ にかんする Volterra 型第2種積分方程式となる．また $f(t)$, $u(t)$ が既知で $p(t)$ が未知であるとすると Volterra 型第1種積分方程式となる.

もし機械部品の交換の多くの場合がそうであるように使用量が不変であるとすると (1.2) は

$$u(t)-\int_0^t p(t-\xi)u(\xi)d\xi=0$$

となる．これは $t-\xi=\tau$ とおいて積分変数を ξ から τ に変えれば

$$u(t)-\int_0^t p(\tau)u(t-\tau)d\tau=0$$

となる.

ここで初期補給 $u(0)$ が N_0 であることに注意して t について微分すると

$$u'(t)-\int_0^t p(\tau)u'(t-\tau)d\tau-p(t)\ N_0=0$$

となる．ここで $u'(t)/N_0=v(t)$ とおくと

$$p(t)+\int_0^t v(t-\tau)p(\tau)d\tau=v(t) \tag{1.2a}$$

となる．これも $p(t)$ にかんする Volterra 型第2種積分方程式である.

2. 消耗率の問題

積分方程式 (1.2) において消耗率を既知として任意の使用量 $f(t)$ に対する補給量 $u(t)$ を求める問題は従来多くの著者によつて取扱われてきた．しかし時には使用と補給の状況から消耗率を求めることが必要になることがある．これは工業において十分な耐用試験を未だ行つていない所謂，新製品の場合が多い．このような場合には市場調査によって消費者の使用量と卸または小売よりの補給量との資料を求めて解析する必要がある．このような場合には市場が拡大しているのが普通であるから (1.2a) のように使用量が不変と考えることはできない.

この場合には積分方程式 (1.2) を消耗率 $p(t)$ にかんする積分方程式と見て解を求めることが必要である．このとき $p(t)$ については第1種であるが (1.2a) のようにして第2種に変形することもできる.

ラプラス変換を用い，像函数を対応する大文字であらわすことにすると (1.2) は像空間で

$$sF-f_0=U-PU \tag{2.1}$$

となる．ここで添数字0は $t=0$ における函数の値を示す．これを $P(s)$ について解けば

$$P(s)=\frac{U(s)-sF(s)+f_0}{U(s)} \tag{2.2}$$

となる．

像函数 (2.2) の原函数は求める消耗率 $p(t)$ でそれは $U(s)$ の零点を $s_0, s_1, \cdots$ とすれば一般に

$$p(t)=\sum_k A_k e^{s_k t}$$

の形となる．(3)

3. 離散的資料から消耗率を数値的に決定する方法

実際の場合には積分方程式 (1.2) において既知函数 $f(t)$, $u(t)$ が時間 t に対して毎月，毎年というように等間隔の時系列の資料で与えられることが多い．この間隔を単位にとるとき $t=0, 1, 2, \cdots\cdots\cdots$ に対応する数値をそれぞれ $f_0, f_1, f_2, \cdots\cdots; u_0, u_1, u_2, \cdots\cdots$ とする．

このとき，(1.2) の積分上限を順次に $t=0, 1, 2, \cdots\cdots\cdots$ にとり $p_0, p_1, p_2\cdots\cdots$ の連立方程式を導いてそれを順に解いて行く方法があるが p の級数の始めの部分の誤差が大きくなって，後の部分ではこれらの誤差が蓄積するから精度がわるい．$f(t)$, $u(t)$ が解析的に与えられているときには t の分割を十分に小さくしてこの精度を向上させることも可能であるが，前記のような統計資料の場合にはこのようなことは望めない．(4)

このような場合には階差表を作成しニュートンの補間公式を用いて $f(t)$ や $u(t)$ を t の n 次式で一旦表わしてその像函数を求め (2.2) より $P(s)$ を計算することが考えられる．このとき $p(t)$ についても同じ補間公式を用いると階差 $p_0, \Delta p_0, \Delta^2 p_0\cdots\cdots$ にかんする連立方程式が導かれる．たとえば $f(t)$ については

$$f(t)=f_0+\frac{t}{1!}\Delta f_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0+\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 f_0+\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}\Delta^4 f_0 + \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{5!}\Delta^5 f_0+\cdots\cdots$$

とし，$u(t)$, $p(t)$ も同様な式であらわす．このとき像函数は

$$F(s)=\frac{f_0}{s}+\frac{1}{s^2}\left(\Delta f_0-\frac{\Delta^2 f_0}{2}+\frac{\Delta^3 f_0}{3}-\frac{\Delta^4 f_0}{4}+\frac{\Delta^5 f_0}{5}-\cdots\right) +\frac{1}{s^3}\left(\Delta^2 f_0-\Delta^3 f_0+\frac{11}{12}\Delta^4 f_0-\frac{5}{6}\Delta^5 f_0+\cdots\cdots\right)+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

となる．$U(s)$, $P(s)$ も同様である．

これらの式を (2.1) に入れて s の同じ羃の係数を等しくおくとおのおの第5階差まで書いたとき，

$$\Delta f_0-\frac{\Delta^2 f_0}{2}+\frac{\Delta^2 f_0}{3}-\frac{\Delta^4 f_0}{4}+\frac{\Delta^5 f_0}{5}-\cdots=u_0,$$

$$\Delta^2 f_0-\Delta^3 f_0+\frac{11}{12}\Delta^4 f_0-\frac{5}{6}\Delta^5 f_0+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\left(\Delta u_0-\frac{\Delta^2 u_0}{2}+\frac{\Delta^3 u_0}{3}-\frac{\Delta^4 u_0}{4}+\frac{\Delta^5 u_0}{5}-\cdots\right)-u_0 p_0$$

$$\Delta^3 f_0-\frac{3}{2}\Delta^4 f_0+\frac{3}{4}\Delta^5 f_0-\cdots\cdots\quad=\left(\Delta^2 u_0-\Delta^3 u_0+\frac{11}{12}\Delta^4 u_0-\frac{5}{6}\Delta^5 u_0+\cdots\cdots\right)$$
$$-\left(\Delta u_0-\frac{\Delta^2 u_0}{2}+\frac{\Delta^3 u_0}{3}-\frac{\Delta^4 u_0}{4}+\frac{\Delta^5 u_0}{5}-\cdots\right)p_0$$
$$-u_0\left(\Delta p_0-\frac{\Delta^2 p_0}{2}+\frac{\Delta^3 p_0}{3}-\frac{\Delta^4 p_0}{4}+\frac{\Delta^5 p_0}{5}-\cdots\right),$$

$$\Delta^4 f_0-2\Delta^5 f_0+\cdots\cdots\quad=\left(\Delta^3 u_0-\frac{3}{2}\Delta^4 u_0+\frac{3}{4}\Delta^5 u_0-\cdots\cdots\right)$$
$$-\left(\Delta^2 u_0-\Delta^3 u_0+\frac{11}{12}\Delta^4 u_0-\frac{5}{6}\Delta^5 u_0+\cdots\cdots\right)p_0$$
$$-\left(\Delta u_0-\frac{\Delta^2 u_0}{2}+\frac{\Delta^3 u_0}{3}-\frac{\Delta^4 u_0}{4}+\frac{\Delta^5 u_0}{5}-\cdots\right)$$
$$\left(\Delta p_0-\frac{\Delta^2 p_0}{2}+\frac{\Delta^3 p_0}{3}-\frac{\Delta^4 p_0}{4}+\frac{\Delta^5 p_0}{5}-\cdots\right)$$
$$-u_0\left(\Delta^2 p_0-\Delta^3 p_0+\frac{11}{12}\Delta^4 p_0-\frac{5}{6}\Delta^5 p_0+\cdots\right),$$

$$\Delta^5 f_0-\cdots=(\Delta^4 u_0-2\Delta^5 u_0+\cdots)-\left(\Delta^3 u_0-\frac{3}{2}\Delta^4 u_0+\frac{3}{4}\Delta^5 u_0-\cdots\right)p_0$$
$$-\left(\Delta^2 u_0-\Delta^3 u_0+\frac{11}{12}\Delta^4 u_0-\frac{5}{6}\Delta^5 u_0+\cdots\right)$$
$$\left(\Delta p_0-\frac{\Delta^2 p_0}{2}+\frac{\Delta^3 p_0}{3}-\frac{\Delta^4 p_0}{4}+\frac{\Delta^5 p_0}{5}-\cdots\right.$$
$$-\left(\Delta u_0-\frac{\Delta^2 u_0}{2}+\frac{\Delta^3 u_0}{3}-\frac{\Delta^4 u_0}{4}+\frac{\Delta^5 u_0}{5}-\cdots\right)$$
$$\left(\Delta^2 p_0-\Delta^3 p_0+\frac{11}{12}\Delta^4 p_0-\frac{5}{6}\Delta^5 p_0+\cdots\right)$$
$$-u_0\left(\Delta^3 p_0-\frac{3}{2}\Delta^4 p_0+\frac{3}{4}\Delta^5 p_0-\cdots\cdots\right)\tag{3.1}$$

となる．これは $p_0, \Delta p_0, \Delta^2 p_0, \cdots\cdots$ に対する連立方程式であるが最初のものは基礎方程式 (1.2) において $t=0$ とした条件 $\left(\frac{df}{dt}\right)_0=u_0$ に他ならない，これはpを含まないから $f(t)$, $u(t)$ に対して $p(t)$ を同じ階差までとることにすると未知数に対して方程式の数が二つ不足する．(3.1) は基礎方程式に直接ニュートンの補間公式を入れて積分し t の同じ冪を比較しても得られるが，(2.1) のような代数式を用いた方が計算が容易である．

しかしこのとき (1.1) の条件から

$$\frac{1}{2}N^2\Delta p_0+\left(\frac{N^3}{3!}-\frac{N^2}{2.2!}\right)\Delta^2 p_0+\left(\frac{N^4}{4!}-\frac{N^3}{3!}-\frac{N^2}{2!}\right)\Delta^3 p_0$$
$$+\left(\frac{N^5}{5!}-\frac{3N^4}{2\cdot 4!}+\frac{11N^3}{4!}-\frac{3N^2}{4!}\right)\Delta^4 p_0$$
$$+\left(\frac{N^6}{6!}-\frac{2N^5}{5!}+\frac{35N^4}{4\cdot 5!}-\frac{50N^3}{3\cdot 5!}+\frac{12N^2}{5!}\right)\Delta^5 p_0+\cdots=0 \tag{3.2}$$

となる．ただし N は $t\geqq N$ のとき $p(t)=0$ となるような十分大きい値である．そして $p(t)$ は $t(0,N)$ でその数値が求まれば十分である．

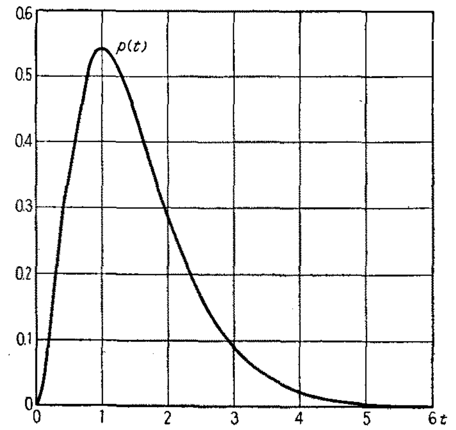
これでもなお方程式が一つ不足であるがそれは基礎方程式が $f(t)$ の第1次導函数を含んでいるので当然の結果である．よって $p(t)$ の N 個の時点における離散値を求めるためには $f(t)$ は $(N+1)$個の時点で，$u(t)$ は同じく N 個の時点でその数値が与えられていることが必要かつ十分である．このとき (3.1) および (3.2) は $p_0,\ \Delta p_0,\cdots\cdots,\Delta^{N-1}p_0$ にたいする連立方程式を与える．

4. 消耗率の母数を決定する問題

消耗率 $p(t)$ にかんする条件(1.2)は(3.2)では弱い意味でしか満足させられない．実用的には十分大きい N に対しては $t\geqq N$ に対して $p(t)=0$ が保証されるがそのためには $f(t)$ や $u(t)$ の資料が十分長期にわたつて与えられている必要がある．このような場合には連立方程式の元数が高くなって解法が困難となる．そこで消耗率 $p(t)$ に正規分布やガンマー分布などのような条件(1.2) が保証されている分布型をあてはめその母数を推定する方法が提案される．

$p(t)$ は $t(0,\infty)$ の範囲で与えられるべきであるからその分布型としては，カイ2乗分布やF分布のようなものが適当である．ここではラプラス変換の容易なピアソンⅢ型分布 (ガンマ分布)を用いる．それは母数が $a,\ \nu$ のとき

$$\left.\begin{array}{l} p(t)=Ce^{-at}\ t^{\nu-1},\quad (0<t<\infty) \\ \nu>0,\quad a>0,\quad c=a^{\nu}\Gamma/(\nu) \end{array}\right\} \tag{4.1}$$



第1図 ガンマー分布

である．その形は，$\nu=3,\ a=2$ のとき第1図のようになり消耗率の形としては適当なように見える．平均および分散を計算するとそれぞれ

$$E(x)=\nu/a,\quad V(x)=\nu/a^2$$

となる．

このときラプラス変換の公式(3)によれば

$$P(s)=C\frac{\Gamma(\nu)}{(s+a)^{\nu}}$$

$$=\frac{a^{\nu}}{(s+a)^{\nu}} \tag{4.2}$$

となる．また (2.2) 式の右辺を階差によつてあらわして

$$\frac{a^{\nu}}{(s+a)^{\nu}}=1-\Big[\frac{1}{s}\Big(\Delta f_0-\frac{\Delta^2 f_0}{2}+\frac{\Delta^3 f_0}{3}-\frac{\Delta^4 f_0}{4}+\frac{\Delta^5 f_0}{5}-\cdots\Big)$$

$$+\frac{1}{s^2}\Big(\Delta^2 f_0-\Delta^3 f_0+\frac{11}{12}\Delta^4 f_0-\frac{5}{6}\Delta^5 f_0+\cdots\cdots\Big)$$

$$+\frac{1}{s^3}\left(\Delta^3 f_0-\frac{3}{2}\Delta^4 f_0+\frac{3}{4}\Delta^5 f_0-\cdots\right)+\frac{1}{s^4}\left(\Delta^4 f_0-2\Delta^5 f_0+\cdots\right)$$

$$+\frac{1}{s^5}(\Delta^5 f_0-\cdots)\Bigg]$$

$$\times\left[\frac{u_0}{s}+\frac{1}{s^2}\left(\Delta u_0-\frac{\Delta^2 u_0}{2}+\frac{\Delta^3 u_0}{3}-\frac{\Delta^4 u_0}{4}+\frac{\Delta^5 u_0}{5}-\cdots\right)\right.$$

$$+\frac{1}{s^3}\left(\Delta^2 u_0-\Delta^3 u_0+\frac{11}{12}\Delta^4 u_0-\frac{5}{6}\Delta^5 u_0+\cdots\right)$$

$$\left.+\frac{1}{s^4}\left(\Delta^3 u_0-\frac{3}{2}\Delta^4 u_0+\frac{3}{4}\Delta^5 u_0-\cdots\right)+\frac{1}{s^6}(\Delta^5 u_0-\cdots)\right]^{-1} \tag{4.3}$$

とする．この右辺を $R(s)$ とおくと

$$\frac{a^\nu}{(s+a)^\nu}=R(s) \tag{4.4}$$

である．常用対数をとると

$$\nu[\log a-\log(s+a)]=\log R(s) \tag{4.4a}$$

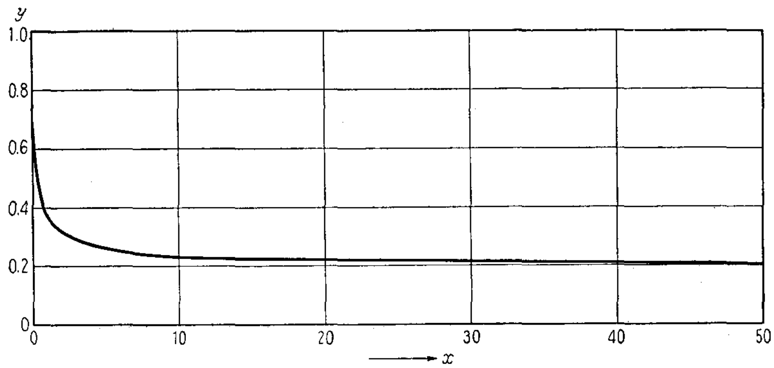
となる．これを s にかんして恒等式とみて任意の2つの s の値を入れて ν と a とを決定すればよい．この計算では $R(s)$ が負にならない限り十分大きい s の値を用いるのが都合がよい．たとえば $s=100$, 200 が用いられれば各因数の第1項だけで十分であるが，あまり極端に大きくすると $u(t)$ の適合性が悪くなる．(4.4a) に $s=1$, $s=5$ を入れてその比をとると

$$\frac{\log a-\log(1+a)}{\log a-\log(5+a)}=\frac{\log R(1)}{\log R(5)}$$

となる．これから a の値を決定するには

$$y=\frac{\log x-\log(1+x)}{\log x-\log(5+x)}$$

のグラフを書いておいて $\log R(1)/\log R(5)$ に対する横座標をよめばよい．a がきまれば(4.4)から ν を決定することができる．



第 2 図

ラプラス変換が容易でない場合には確率密度函数を級数展開して項別に変換し上と同様にして母数の関係式を導びくか，3節の始めに述べたように原方程式 (1.1) から $t=0,1,2,3,\cdots$ として直接に連立方程式を導びくのがよい．

謝　辞

この問題は三菱金属鉱業の菅波三郎君によつて提起されたものである．本論文の完成にあたり有益な助言と刺戟を与えられた同君に感謝する．また計算は東京大学工学部助手の小林竜一，小柳芳雄両君に負うところが大きい，ここに付記して感謝のしるしとする．

参　考　文　献

(1) Lotka, A. "A contribution to the theory of self-renewing aggragetes, with Special reference to industrial replacement" *Ann. of Math. Stat.*, **10** (1939), pp. 1～25

Feller, W. "On the integral equation of renewal theory" *Ann. Math. Stat.* **12** (1941), pp. 243-267.

この Lotka の論文には 1907 年から 1939 年までに発表された補給の問題にかんする 74 の文献のリストがあげられており，Feller のには 1941 年までの 18 の文献がある．

(2) 原野秀永・松岡由里子；補給に関する2，3の問題，品質管理シンポジゥム報文集，(1956) pp. 270-273.

(3) たとえば，近藤次郎；演算子法，培風館，東京，(1956).

(4) 近藤次郎；積分方程式，培風館，東京(1954)，pp. 105-129.

リニヤ・プログラミングによる木取り計画

前　田　活　郎*

は　し　が　き

与えられた原木から，何種類かの直方体の板を切り取る場合に，原木の本数に関する制限，製品の要求数に関する制限を満足してしかも原木の使用量をできるだけ少くしたい．これはすぐに LP の範疇に属することが想像できる問題であるが，この種の問題には2つの特徴が考えられるようである．1つの特徴は，ある切断のし方で与えられた原木を全部切ってしまうし方から容易に出発点となる基本解が作れることである．したがって調整変数だけで作った解のように最適解に程遠い解から計算をし始める必要がないという利点がある．もう1つの特徴は本来解が整数でないと具合が悪いという点から生じる困難であって，LP から求められた最適解を下手に丸める

* 鉄道技術研究所，計画管理研究室，昭和32年11月3日講演，11月14日受理