気象サービスとORの一例

鈴　木　栄　一*

はしがき

1954年9月電々公社の気象サービス（222番）が24回線をもってはじめられ，10月には300回線になり，今日は460回線である．この他にもトウジョー・ウェザー・サービス・センターなどの民間気象サービスの会社もある．

ここでは，電話待ち合せ問題の1つの応用として，回線の増設問題，調整問題を模型的に考察し，若干の計算例を得たので，かなり近似的な結果ではあるが一応報告する．

2. 電話台数が充分大きいときの近似関係

電話台数 s コの場合，人が電話をかけてくる平均時間間隔 a，一人の平均所要時間を b とするとき，過程がエルゴード的であるための必要十分条件は $b/sa<1$ である．[(1)(2)] 電話をかける人数がポアッソン分布に従っているなら，その平均時間間隔は指数分布となり，a, b はそれら各分布の Parameter である．以下 $b/sa<1$ と仮定する．

ある人が電話をかけてきたとき，すぐ接続されず，ともかく待たされる確率は一般に[(2)]

$$\left.\begin{aligned} M&=\frac{1}{s!}\left(\frac{b}{a}\right)^s\frac{s}{s-\dfrac{b}{a}}p(0)\\ p(0)&=\left\{\sum_{r=0}^{s-1}\frac{(b/a)^r}{r!}+\frac{(b/a)^s}{s!}\left(\frac{s}{s-\dfrac{b}{a}}\right)\right\}^{-1}\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

で与えられる．そこで1日 N 人，電話をかけてきたとき，そのうち，何人待たされるかは第1近似として，

$$NM=p(0)\frac{N}{s!}\left(\frac{b}{a}\right)^s s\Big/\left(s-\frac{b}{a}\right)\tag{2.2}$$

となる．s が222番のごとく相当大きいときは，Stirling の公式により，

$$s!=(s/e)^s\sqrt{2\pi s}\left\{1+\frac{1}{12s}\right\}$$

となり，一方 $p(0)$ は，

* 気象研究所予報研究部，昭和32年6月15日発表，10月1日原稿受理，

$$p(0)=1/\left[e^{\frac{b}{a}}-\sum_{r=s}^{\infty}\frac{(b/a)^r}{r!}+\frac{(b/a)^s}{s!}\frac{s}{s-\frac{b}{a}}\right]$$

$$\fallingdotseq e^{-\frac{b}{a}} \qquad (\because\ b/sa<1)$$

と近似的にかける．したがって，第1近似としては，(2.2) が

$$\left.\begin{aligned} NM &\fallingdotseq Nke^{-\frac{b}{a}}\left(\frac{be}{sa}\right)^s \\ k &= \left[\sqrt{2\pi s}\left\{1+\frac{1}{12s}\right\}\right]^{-1}\frac{s}{s-\frac{b}{a}} \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

となる．この k はもちろん s の函数であるが，$(be/sa)^s$ の項に比べ変化が小さく $s=300\sim500$ 位のところを考えるなら略一定と考えられる．

たとえば，

$s=300,\quad a=1.1/300,\quad b=1$ ならば $k=0.25$

$s=400$ 〃 〃 $k=0.06$

$s=500$ 〃 〃 $k=0.04$

で，これのとき $(be/sa)^s \fallingdotseq e^s$ でこれは $s=300\sim500$ のところで非常に大きく変化する．

そこで一応の粗い近似計算では，このような s, a, b を考える限り，

$$NM\sim(be/sa)^s \qquad (2.4)$$

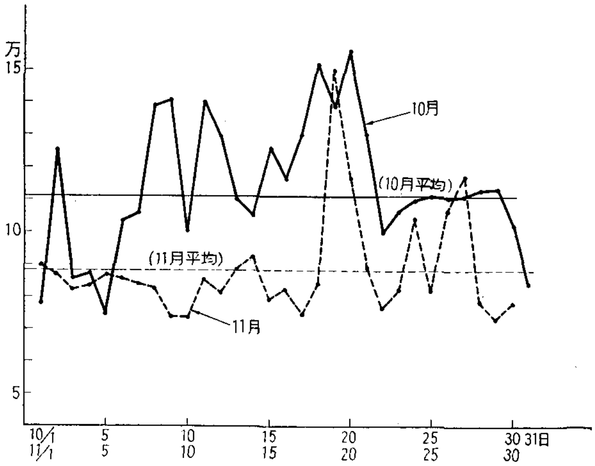
として以下の計算式をもとめることにした．

3. 回線増設の問題

222 番のごとく，現在，相当数の回線設備があるが，それを更に若干回線増設することによって能率よく，気象サービスをし，かつそれによって利潤を最大ならしめるにはどうすればよいかという問題を考える．

逆に，裏からいうと，そのような回線増設をした場合，通話料金をどの位まで値下げしてもよいかという問題にもなる．

既存回線の数 $s\gg1$ とし，さらにこれを t 回線だけ増設（t は比較的少い数）した場合の採算関係を定式



第1図 昭和29年10月，11月における1日呼数の変化

化する．

N: 通話総人数（1 年間の通話総人数×回線の寿命平均年数）

c_1：1 回線あたり増設に要する平均経費

c_2：1 通話の平均料金（加入電話の場合7円で公衆電話なら10円）

c_3：1 回線あたりの保守管理と維持に要する平均経費（年間経費×寿命年数で，年間経費には人件費も入る）

とすると，

$$F=\left\{\sum_{n=s}^{\infty} p(n)-\sum_{n=s+t}^{\infty} p(n)\right\} Nc_2-tc_1-(s+t)c_3 \tag{3.1}$$

但し，

$$\left.\begin{aligned} p(n)&=p(0)(b/a)^n/n! && n\leqq s \\ &=p(0)(b/a)^n/s!\,s^{n-s} && n\geqq s \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

なる F が1つの目安で，右辺第1項は回線増設に伴う収益総額見込，第2項は回線増設に伴う施設費総額，第3項は回線保守と維持に要する費用総額となり，$F>0$ なら回線増設で利益があがり，$F<0$ なら却って損失となる．純益推定 F を最大ならしめる t の値は，

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}&=-Nke^{-\frac{b}{a}}c_2\left\{\frac{be}{(s+t)a}\right\}^{s+t}\left[\log_e\frac{be}{(s+t)a}-1\right]-(c_1+c_3) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}&=-Nke^{-\frac{b}{a}}c_2\left[\left\{\frac{be}{(s+t)a}\right\}^{s+t}\left[\log_e\frac{be}{(s+t)a}-1\right]^2+\left\{\frac{be}{(s+t)a}\right\}^{s+t}\right. \\ &\qquad\left.\frac{\partial}{\partial t}\log\frac{be}{(s+t)a}\right] \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

により，$\partial F/\partial t=0$, $(\partial^2F/\partial t^2)<0$ のところをもとめれば得られることは明らかである．$\partial^2F/\partial t^2<0$ と考えられ，結局 $\partial F/\partial t=0$ をとくことになる．

但し，

$$\sum_{n=s}^{\infty} p(n)=ke^{-\frac{b}{a}}(be/sa)^s,\ \sum_{n=s+t}^{\infty} p(n)=ke^{-\frac{b}{a}}(be/(s+t)a)^{s+t} \tag{3.4}$$

とする．$\partial F/\partial t=0$ より，

$$\begin{aligned}(s+t)\log_{10}\left[\frac{be}{(s+t)a}\right]+\log_{10}\left[1-\log_{10}\frac{be}{(s+t)a}\log_e 10\right]&=\log_{10}e^{\frac{b}{a}} \\ &\quad+\log_{10}\frac{c_1+c_3}{Nkc_2}\end{aligned} \tag{3.5}$$

を満足する t をもとめるのであるが，これは

$$\log_e[be/(s+t)a]=x$$

とおけば，

$$\log_e(1-x)+\frac{be}{a}e^{-x}x=\frac{b}{a}+\log_e\frac{c_1+c_3}{Nkc_2} \tag{3.6}$$

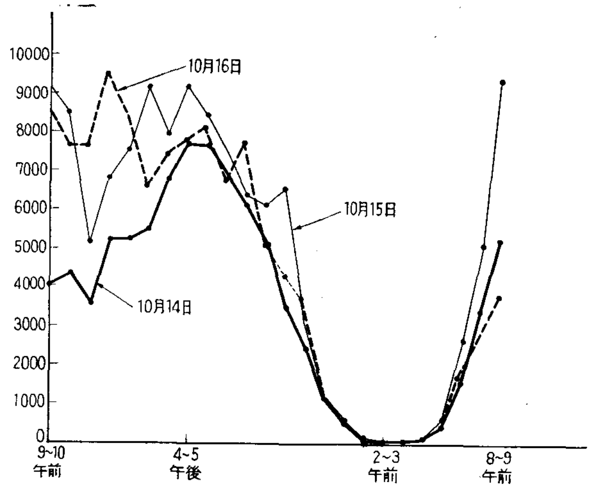
なる超越方程式をとくことになる．実際は一寸面倒なので試行錯誤法で適当にあてはめてみた．これと全く同じ形の超越方程式はつぎの回線調整問題にもあらわれる．

4. 回線調整の問題

222 番の時間別呼数変化をみると，図のごとく大体，気温の日変化にみるような顕著な日変化をしている．

従ってたとえば，昼間は 300 回線ぐらい必要だが，夜間，とくに深夜などは，そんな必要なくて，もつと少い回線でも充分であろう．

そして，回線保守管理に必要な費用（人件費その他）は，回線の数に関係するとすれば，そのような実状に合うように回線の数を昼と夜とで調整すれば，費用の節約にもなり，無駄が省けるのである．（茂垣氏によれば，このようなことは現用回線施設については，そう必要ではないらしいが，この問題のような考え方は他にも応用できると考え，敢て問題として提起してみた）



第2図　昭和29年10月14日～16日の時間別呼数の変化

たとえば，時間別 222 番の呼数 N_t の日変化が 1 日のうちで，

$$N_t=\overline{N}+a\ \sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\delta\right)\quad (t=1,2,\cdots\cdots,24) \tag{4.1}$$

であたえられるとすれば，

電話をかけたとき，〃話中〃である人数の近似的推定値

$$L=\sum_{t=1}^{24} N_t'\left(\frac{be}{s_t a}\right)^{s_t}\quad \left(N'_t=N_t k e^{-\frac{b}{a}}\right) \tag{4.2}$$

を最小にするような s_t は N_t' に対応して適宜増減するとして考察を進めることができる．s_t, N_t はそれぞれ時間 t での回線数，電話呼数である．そこで，いま回線保守管理に伴う一切の費用 c_t（1 時間あたり）は s_t に比例するとし，

$$c_t \propto s_t \qquad (t=1,2,\cdots\cdots,24) \tag{4.3}$$

と考え，総計費用 $\sum_t c_t$ は予算その他の制約から，一定とおさえられているとすると $\sum_t s_t$ も一定と考えられる．

$$\sum_t s_t=S=\text{一定} \tag{4.4}$$

の条件のもとで，L を最小にするには Lagrange の未定乗数 λ を導入してとく．

いま

$$U=L+\lambda\left(\sum_t s_t-S\right) \tag{4.5}$$

とおき，

$$\frac{\partial U}{\partial s_t}=N_t\frac{\partial}{\partial s_t}\left(\frac{be}{s_t a}\right)^{s_t}+\lambda=0 \tag{4.6}$$

を λ についてとくと，

$$\lambda=N_t\left(\frac{be}{s_t a}\right)^{s_t}\left\{1-\log_e\left(\frac{be}{s_t a}\right)\right\} \tag{4.7}$$

となる．過程がエルゴード的なるための必要且十分条件はすでにのべたごとく $b/s_t a<1$ だから，$be/s_t a<e$ である．本質的にいうと $b/s_t a\ll 1$ ではサービスはかなり行きとどくが，s_t を多くするので経費がかかる，さりとて，$b/s_t a\sim 1$ ではサービスとしてはあまり良くないが，s_t は少くてすむ，$\sum s_t$ を一定とする条件のもとで，L を最小にするのに $b/s_t a$ はどのように調整するかが問題である．上の式で，

$$x=\log\frac{be}{s_t a}$$

とおくと，

$$\log\lambda=\log N_t-\frac{be}{a}e^{-x}\cdot x+\log_e(1-x) \tag{4.8}$$

となり，前節と全く同じ，超越方程式が導びかれた．$b/s_t a$ は 1 に比しあまり小さくても，またあまり 1 に近くても問題だから，その間の 1 つの適当な見当として

$$b/s_t a\sim e^{-1}$$

位のところを一応考えてみよう．そうすると $be/s_t a\sim 1$ となり，

$$\log\frac{be}{s_t a}\fallingdotseq\log\left[1+\left(\frac{be}{s_t a}-1\right)\right]\fallingdotseq\frac{be}{s_t a}-1$$

$$\log\left\{1-\log\frac{b_e}{s_t a}\right\}\fallingdotseq\log 1=0$$

となるから，結局 λ の式は近似的に，

$$\log\lambda\fallingdotseq\log N_t+s_t\left(\frac{be}{s_t a}-1\right)\fallingdotseq\log N_t+\frac{be}{a}-s_t \tag{4.9}$$

となる．

ここで $\sum_t s_t=S$ なる条件をつかって λ をもとめると，

$$-\log\lambda=\frac{1}{24}\left\{S-24\frac{be}{a}-\sum_t\log N_t\right\}$$

$$s_t=\frac{1}{24}S+\log N_t-\frac{1}{24}\sum_t\log N_t \tag{4.10}$$

となる．この関係は直観的につぎのことを示すと考えられる．

″(4.10) は非常に粗い近似で，一寸特殊な場合であるが，1 時間総呼数 N_t にあまり顕著な

時間的変化がなければ，$\log N_t-\frac{1}{24}\sum_t \log N_t$ は充分小さく，$s_t=S/24=$一定となるが，図のごとく顕著な変化があれば，この補正が必要でこの補正の値は，N_t が多いとき正，少ないとき負で，多いときは同線を増し，少ないときは減らす方がよいという常識的なことを示す．〃

補正項 $\log N_t-(\sum \log N_t)/24$ は実際的には少なすぎるであろうから，単に大きさの見当をつける程度の意味しかもっていない．もっと正確にやるには λ を正確にもとめねばならない．ここでは要するにこの補正項が正なら回線を増し，負なら回線を減らすという極めて大雑把なことがいえるだけである．

5．2，3 の具体例

i）回線増設問題

222 番について考える．すでに 300 回線の設備があり，1日平均 10 万人の利用者があり，1通話平均所要時間1分，1回線の寿命年数 10 年．1 回線増設平均費用 10 万円，1 通話料金10円とすると*，(3.5) の右辺は

$$\log_{10}e^{\frac{b}{a}}+\log\frac{c_1+c_3}{Nkc_2}\doteqdot 273\log_{10}e+\log\frac{100000}{100000\times10\times365\times10\times0.2}\doteqdot 114.68693$$

で (3.5) 式の左辺はもし $t=100$ とすると

$$(300+100)\log\frac{2.718}{400\times\frac{1.1}{300}}+\log\left[1-0.43429^{-1}\log_{10}\frac{300\times2.718}{400\times1.1}\right]\doteqdot 106.868$$

となり，一方 $t=50$ とするとその左辺は

$$(300+50)\log_{10}\frac{2.718}{350\times1.1}\times300+\log\left[1-0.43429^{-1}\log_{10}\frac{300\times2.718}{350\times1.1}\right]\doteqdot 114.2990$$

となり，この場合は $t=50$ の方が充分近く，一応 50 回線増設すればよいことになる．たゞ

(イ) 利用人数（呼数）は今後もっと増える可能性があること．

(ロ) 通話料金は加入電話を入れていないこと．

といった条件を用いている．この点，より実際的にきめる必要もあろう．そして今後天気予報の精度が向上すれば，利用者も増すだろうし，将来の諸条件の変化を考慮し，また公共事業としての気象サービスの意義を考えるときは，〃話中〃の人をなるべく少くすることに相当重点をおく意味でも，現在 160 回線も増加して 460 回線の設備があることはサービスとしては先ず必要且十分ところなであろう．あまり細い内容的分析に立入らずモデル的な一例だけを大雑把に概算した．

電々公社では呼損率を 100^{-1}，50^{-1}，25^{-1} とし，保留時間1分 $(=b)$ として回線必要数を決定しているらしいが，呼損率の意味がよくわからない．おそらく，上にのべた〃話中〃の人に何らかの関係をもつものであろう．

ii）回線調整問題

* $b/sa\ll1$ なら増設の必要ないだろうから $b/sa\lesssim1$ のところという意味でこのような模型を採用した．

時間別予報サービス(222)呼数は昭和29年10月14, 15, 16日ともに図に示すごとく，明瞭な日変化があり，夜半少く，午後 2～6 時に多い.

$$N_t=\bar{N}+a\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right) \qquad (t=1,2,\cdots\cdots,24)$$

$$\sum_{t=1}^{24}N_t=N$$

N は1日中の総呼数，$\bar{N}$ は1時間当りの平均呼数である.

昭和29年10月14日では，

$$\bar{N}=88795/24\fallingdotseq 3698$$

$$N_t=3698+3903\sin\frac{2\pi}{11.5}(t-17)$$

となっている. この資料によって s_t の補正項の大きさを見積ると次表のごとくなり，極めて小さいが，要するに，大雑把にいって 14^h～20^h は回線を増し，0^h～6^h は減らしてよいように思われる. 何回線，ふやしたり，へらしたりするかは正確に§5の式を計算しなければならない. この表では，ふやしてよさそうなところ，減らしてよさそうなところの見当位しかつけられないであろう.

第 1 表　時間別呼数と補正

時間間隔	N_t	$\log N_t$	補正
9～10	4011	3.60325	
10～11	4346	3.63809	
11～12	3670	3.56467	
12～13	5261	3.72107	
13～14	5255	3.72057	
14～15	6582	3.81836	+
15～16	6819	3.83372	+
16～17	7887	3.89691	+
17～18	7729	3.88762	+
18～19	6902	3.83897	+
19～20	6127	3.78725	+
20～21	5188	3.71500	
21～22	3504	3.54456	
22～23	2474	3.39240	
23～ 0	1126	3.05154	
0～ 1	505	2.70329	−
1～ 2	157	2.19590	−
2～ 3	96	1.98227	−
3～ 4	81	1.90849	−
4～ 5	120	2.07918	−
5～ 6	456	2.65896	−
6～ 7	1575	3.19728	
7～ 8	3483	3.54195	
8～ 9	5206	3.71650	
total	88795	78.99780	
Mean	3698	3.291575	

あ　と　が　き

以上，電話による気象サービスの問題について，OR とまではいかないが，OR の序の口みたいな計算を若干試みてみた. 実際問題として線型計画 (L　P) のような考え方が電話増設や調整その他の問題に浸透してゆくことが望ましいが，関与する要因が，社会的，経済的に甚だ複雑多岐で，そう簡単に取扱うことがむつかしく，L　P の方向に定式化されていない. 公共事業としての気象サービスには種々の面倒な問題が包蔵されているが，ここではかなりこまかい近似計算を試みて，このような問題にも関心をもたれている方々の御参考に供したい. 正確な計算をするとよかったが，その余裕がなかったのは残念である.

終りに，資料を貸与された上，有益な御注意を与えられた，電々公社・荻窪電気通信工作工場業務課長・茂垣春洋氏に厚く御礼申上げたい.

文　　献

(1) 河田竜夫：確率の応用　新初等数学講座　7巻 2, 91～46

(2) 国沢清典：情報理論とその応用　第1章　100～101頁

時系列および情報の理論とその応用　日科技連　昭和28年