ゲームの理論におけるUtilityの概念について

福　場　庸*

ゲームの理論においては，人間の合理的行為というものがあるとすれば，それは，utility を最大にするという人間の選択の行為を意味し，しかも，それは，利得を最大にする（損失を最小にする）行為でなければならない．というのは，utilityは,線型変換まで(up to linear transformation) 決定される数値的な表現をもちその数値は，ペイオフ函数 $M(x,y)=a_{ij}=$（混合戦略の場合は，$\sum_i \xi_i=1$ $\sum_j \eta_j=1$ の条件の下で，$M(\xi,\eta)$）によつて与えられるものと考えるからである。こゝに線型変換まで決定されるということは，ρ, ρ' という二つのutility の値に対して，

$$\rho'=\phi(\rho)=\omega_0\rho+\omega_1$$

という関係が成立することを意味する．たゞし，utility u に対し，その値として，$\rho=v(u)$ および $\rho'=v'(u)$ が存在し，ρとρ' との対応が線型函数 $\rho'=\phi(\rho)$ で表わされ，かつ，ω と ω_0 とは常数である.そして，$\cdot>$ という記号で選好関係を表現すれば，$\rho\cdot>\sigma$ は $\phi(\rho)\cdot>\phi(\sigma)$ を意味し，また，$\phi(\alpha\rho+(1-\alpha)\sigma)=\alpha\phi(\rho)+(1-\alpha\phi(\sigma)$ が成立する．

上述のことは，utility の理論を公理論的に建設する第一歩となるものであろうが〔1〕，実際問題からすれば，utility を最大にするという人間の行為を，ある特定の場合に，ゲームの形で表現し，それを解くことができるかどうかが問題となるであろう．こゝでは，ゲームの理論によつて数理統計学を解釈する方法，いわゆるGames against nature の方法によつて，人間の合理的行為の原則が，Wald のMinimax Principle や Savage の Minimax Loss Principle によつて与えられることを明らかにし，簡単な例について考えてみたい．（なお，utility の理論にかんしては，確率論的論理学（確認度理論）〔2〕，様相論理学〔3〕等からの試みがあり，それらは，一応，主観確率の考え方の線に沿うものと思われる。こゝでの叙述は，主として，〔4〕によつた．）

通例，zero-sum two-person game は，夫々，知能をもつた敵対者間のゲームとして，

$$G=(X,Y,M) \qquad (1)$$

で表わすことができる．たゞし，X,Yは，夫々，二人のプレーヤーの戦略の空間 $S=(x_1,\cdots x_m)$，$Y=(y_1,\cdots y_n)$ であり，Mは先にのべたペイオフ行列である．こういうゲームにおいては，偶然の手番が入つてくること，混合戦略が入つてくること等が大切なことであるが，こゝでは Games against nature の立場から，統計的なゲームとして，

$$G=(\Omega,D,\rho) \qquad (2)$$

が考えられることを示そう．たゞし，Ω はパラメター ω の空間，D は判定函数 d のクラス，ρ は risk function である．

こゝでは，zero-sum two-person game を自然と統計家との間のゲームとして考えるから，統計家がある実験を行う場合，その実験のあらゆる場合を記述する標本空間Zを考えねばならない．たとえば硬貨を投げる実験をn回やるとすれば，Zの要素は2^nコとなるであろう．標本空間Zに関連して，要素ωをもつたパラメター空間Ωを考え，さらに積空間$Z\times\Omega$上の確率分布pを考える．いま，ωが固定されゝば，p_ωなら確率分布は Z 上の分布となる．ところで，ω と Ω は，自然にとつての純粋戦略である．これにたいして，統計家は，かれがとりうる行為のクラスAの要素aをえらび，その際 $L(\omega,a)$なる形の損失函数を小にすることが要請されるだろう．その場合，ω にかんする情報が多いほどよいのであるが，例えば実験のコストは，その情報を集めることを妨げるものとなる．ところが，実際は，有限な標本の大きさをもつた実験を行つて，すなわち，標本空間 Z に基づいて，A の一点 a を選ぶと考えねばならない．この選択の基準となる規則は，いわば統計家の戦略の総体を示すものであるが，判定函数とよばれ，$d(z)=a$ で表わされる．すなわち，$d(z)$ のクラス D は，Z を A に写像するものと考えられる．一般に，Zの上で定義された函数$f(z)$を確率変数と考えれば，$E(f)=\sum_{z\varepsilon Z}f(z)p_\omega(z)$ は，離散的な場合の期待値を表わす．この意味で，$d(z)$ も確率変数である．そうすると，積空間 $\Omega\times A$ 上で定義された損失函数 $L(\omega,a)$ に関連して，積空間 $\Omega\times D$ 上で，次の形の risk function を考えることができる．

$$\rho(\omega,d)=\sum_{z\varepsilon Z}L(\omega,d(z))p_\omega(z) \qquad (3)$$

かくして，われわれは (2) のような形のゲーム $G=(\Omega,$

---

* 大阪大学経済学部統計学研究室

D, ρ) を考えることができ，これを統計的ゲームと呼ぶ

以上のように，一般的なゲームも，統計的なゲームも，(X,Y,M) という形で表現され，しかも Mは，utility を表わす有限な数値函数となる．(プレーヤーⅡにとつては負の utility) したがつて，予想される様々の結果 (outcome) にかんする数値的な utility に対してどういう戦略を選べばよいかという原則を示す理論が，ここで求めようとするものである．したがつて，問題になるのは，結果の空間 R (R は $r \varepsilon R$ なる要素をもつていると考える．例えば，プレーヤーⅡがⅠに支払う額として $r=5$ ドルとか，$r=7$ ドルとかいう結果が，そのゲームのメカニズムによつて生れてくる) の上の確率分布 p の相対的な値 (utility !)である．

ここで硬貨投げの実験を考え，その結果（裏および表）に対して，三つの判定 d_1,d_2,d_3 が可能であると考える． d_1,d_2,d_3 の判定の内容は，夫々，表に1ドルを賭ける，裏に1ドルをかける，および，賭けないであるとする．つまり $R=(1,0,-1)$ と表わせる．ω が完全に未知であれば，Ω は $0\leq\omega\leq1$ という単位区間からなり，しかも，ω ($=p_\omega$) が「r=表が出る」という結果の確率であることは明らかである．そこで，われわれは，判定 d_i ($i=1,2,3$) の無作為な混合として $\eta=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ を考えることができ， $\eta \varepsilon H$ なる空間 H を考えることができる．ただし，$\sum_1^3\lambda_i=10$, $\lambda_i\geq0$で，λ_i は d_i を選ぶ確率．先に，われわれは R 上の確率分布 p (ここでは ρ_ω, $1-\rho_\omega$ 等) を問題にすればよいと考えたのであるが，この考え方を更に一歩進めて，あるいは，対応的に，η による混合を考慮に入れて，$\sum\lambda_n\rho_n$ という函数を問題にし，この Ω を P (ただし $p\in P$) に写像する函数 $k_\eta(\omega)$ を考えよう．例えば，ここでの例で， $R=(1,0,-1)$ 上の確率分布が $(\omega,0,1-\omega)$ であれば，$k_\eta(\omega)=\omega\lambda_1+(1-\omega)\lambda_2$ となる．かくして，decision m-aker は，$k_\eta\in K$ なる一つの k_η を選ぶことを要求されることになる．

R を任意の集合であると考え，P を R 上のすべての確率分布 p_i の集合であるとすると，前にものべたように， p_i 間の選好関係 (preference relation) が問題となる．この関係を$\cdot\geq$で表わすと，$i=1,2$ に対しては，$p_2\cdot\geq p_1$ か，$p_1\cdot\geq p_2$ かの何れかであり，また，もし，$p_3\cdot\geq p_2$ で，かつ，$p_2\cdot\geq p_1$ であれば，$p_3\cdot\geq p_1$である． $p_i\cdot\geq p_j$ は p_i は p_j に対して，選好されるか，あるいは，無差別であるか (preferred or indifferent) を意味する．$p_i\sim p_j$ によつて p_i は p_j と無差別であると読むことにする．

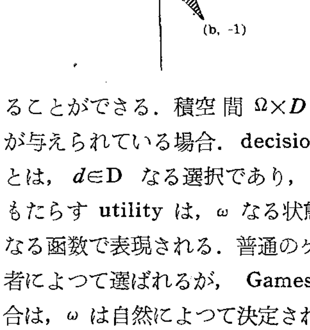
以上のような考察から，われわれがゲームの理論において問題にする有界な数値的 utility function は次の関係をみたさねばならないものとする．

(1) $u\left(\sum_1^\infty\lambda_np_n\right)=\sum_1^\infty\lambda_nu(p_n)$, ただし，$\lambda_n\geq0$, $\sum\lambda_n=1$

(2) $p_i\cdot\geq p_j$ のとき，しかも，そのときにのみ $u(p_j)\geq u(p_i)$

便宜上，$u(p_i)$ を f_i で表わし，$f_i\in F$なる F を考え，$\lambda_i\geq0$, $\sum\lambda_i=1$ なるとき $\sum\lambda_if_i\in F$ なる条件がみたされるとしよう．ただし，f_i は Ω 上で定義された $f(\omega)$ (敵対者の戦略が ω のときの decision-marer の utility) なる形の函数とする．こういうように考えれば，先にあげた硬貨投げの実験における判定は，ω が表の出る確率である場合，点 $(\alpha,\beta)\in T$ の選択 (choice) となる．ただし， T は，$(b,-1)$, $(-1,b)$ および $(0,0)$ なる三点の凸閉苞 (convex hull) であり，$b>0$ である．

前と同じく $R=(1,0,-1)$ とする．P は$p_i\geq0$, $\sum p_i=1$なるときの分布 $p=(p_1,p_0,p-1)$ の集合である．選好関係は，$(1,0,0)\cdot>(0,1,0)\cdot>(0,0,1)$ と考えてよい．$u(0,1,0)=0$, $u(0,0,1)=-1$ と考えれば，$u(1,0,0)=b(b>0)$ とおいて差支えないであろう． そうすると，一般に，$u(p_1,p_0,p-1)=bp_1-p_{-1}$。そこで，decision-maker が利用しうる函数は，$f_1=b\omega-(1-\omega)$, $f_2=-\omega+b(1-\omega)$ および$f_3=0$ の凸な線型結合のすべてとなり，それらが，$(\alpha,\beta)\in T$ なる条件の下で，$f=\alpha\omega+\beta(1-\omega)$ なる形の函数のすべてとなることは明らかである．だから，判定 (α,β) によつて $f=\alpha\omega+\beta(1-\omega)$ なる utility が期待される．(α,β) は図の斜線の部分の中の一点である．(もちろん，頂点，辺上の点をも含む．)



したがつて，判定問題は，次のようにのべることができる．積空間 $\Omega\times D$ 上の有界な数値函数 u が与えられている場合．decision-maker のなすべきことは，$d\in D$ なる選択であり，しかも，この判定 d のもたらす utility は，ω なる状態においては，$u(\omega,d)$ なる函数で表現される．普通のゲームの場合，ω は敵対者によつて選ばれるが， Games against nature の場合は，ω は自然によつて決定される．一方，一般的な判定問題では，ω は自然にも，decision-maker と利害関係をもつた様々な人々によつても影響されると思われる．かくして，われわれは，次のような「ミニマックス原理」を「選択の原理」とすることができる．

「ミニマツクス原理」: $\inf_{\omega} u(\omega, d)$を最大化するように d を選択せよ.

ところが，このミニマツクス原理は，統計的ゲームについていえば，いわば，余りに大事をとりすぎているという欠点をもつている．この欠点に対する修正として，ミニマツクス・ロスの原理やベーイスの原理 (Bayes Principle) が考えられるが，しかも，なおこれらが，サンプリングや無作為化という統計学の手続きを無視するという欠陥を免がれがたいことを以下に説明しよう．

ここに，フユーズの製造業者がいるものと仮定し，生産工程における不良率が，一定にして，しかも未知なる ω であるとしよう．一ロツトは10^4コのフユーズからなるものとする．この場合，あるロツトをオシヤカにするかどうかについて，次の二つの action がとられるものとする．a_1: ロツトをオシヤカにする．a_2: 各フユーズを10セントで売る，ただし，不良品とわかつたフユーズについては売価の2倍の弁償金をだす．したがつて，かれの収入，つまり，utility は，a_1 の場合は零，a_2 の場合は1000 $(1-2\omega)$ ドルとなる．そこで，この製造業者がそのロツトを合格にする確率を λ とすると，$u(\omega, \lambda)=\lambda 1000(1-2\omega)$ となり，$\min_{\omega} u(\omega, \lambda)=-1000\lambda$ となる．かくして，この結果からミニマツクス原理に従つて action をきめるならば，ロツトを拒否せざるをえない．こういう事情は，サンプリングの手続きを導入しても変らない．いま，N コのフユーズを検査するものとし，その結果によつて，残りの (10^4-N) コをオシヤカにするか，売りにだすか決定するものとすると，判定の手がかりは，$0, \cdots, N$ なる整数のある部分集合 S を考え，$s \in S$ならばオシヤカ，$s \notin S$ならば合格とすることによつてえられる．ただし，s は標本中の不良個数である．かくして，

$$u(\omega,S)=(1-2\omega)(1000-0.1N)\sum_{s \notin S}\binom{N}{s}\omega^s(1-\omega)^{N-s},$$

この S は，未知にして一定なる ω にかんして，s を指定するものであるから，$J^*=(0,1,\cdots,N)$ の部分集合 S のクラス上に，ある確率分布 $\eta(S)$ を考えることができる．故に，

$$U(\omega, \eta)=\sum_{S}\eta(S)\,u(\omega, S)$$

$\frac{1}{2}<\omega<1$なるとき，$S=J^*$でなければ，$u(\omega, S)<0$ であるから，$\eta(J^*)=1$ でなければ，$\frac{1}{2}<\omega<1$ にたいして，$U(\omega,\eta)<0$. したがつて，ミニマツクス原理からすれば，たとい，N コの標本中に不良品が皆無でも，もし，製造業者が$\frac{1}{2}<\omega<1$なる可能性が少しでもあると考えればロツトの残余をオシヤカにせねばならない．これは，前の結果と同じであり，サンプリングの結果が無視されているわけである．そこで，次の形で，ミニマツクス原理の修正を考える．

「ミニマツクス・ロスの原理」: $v(d)=\inf_{\omega}[u(\omega, d)-\sup_{d} u(\omega, d)]$ を最大化するように d を選択せよ.

$\sup u(\omega, d)$ は，ω なる状態において可能な最大の utility，すなわち，最低の risk であるから，函数 v を最大化することは，最大なるロスを最小化することを意味している．

先のフユーズの例に帰り $\gamma(\omega)=\sup_{d} u(\omega, d)$ とおけば，$u_1(\omega, d)=u(\omega, d)-\gamma(\omega)$ にミニマツクス原理を適用することになる．

$\omega \leq \frac{1}{2}$なるときは $\gamma(\omega)=(1-2\omega)(1000-0.1N)$ だから，

$$u_1(\omega, S)=(2\omega-1)(1000-0.1N)\left[1-\sum_{s \notin S}\binom{N}{s}\omega^s(1-\omega)^{N-s}\right]$$
$$=(2\omega-1)(1000-0.1N)\sum_{s \in S}\binom{N}{s}\omega^s(1-\omega)^{N-s}$$
$$\left(\because \sum_{s}\binom{N}{s}\omega^s(1-\omega)^{N-s}=\{\omega+(7-\omega)\}^N=1\right)$$

$\omega \geq \frac{1}{2}$なるときは $\gamma(\omega)=0$で，$u_1=u_0$.

N を $N=2k+1$ なる奇数とすると，$S^*=(k+1,\cdots,2k+1)$ なる集合は，標本の半分以上が不良品である場合に，しかもそのときに限つて，そのロツトを不合格にすることを意味するミニマツクス・ロスの戦略であることが示される．すなわち，それは，ペイオフが $\rho_1(\omega, S)=-u_1(\omega, S)$ であるゲームにおけるプレーヤーIIのミニマツクス戦略である．ここでは，$u_1 \neq u$ の場合を考えるから，$0 \leq \omega \leq \frac{1}{2}$なる条件をみたす ω_1 が

$$\rho_1(\omega_1, S^*)=\max_{\omega}\rho_1(\omega, S^*)=v$$

を満足するとする．この場合，$\rho_1(\omega, S^*)=\rho_1(1-\omega, S^*)$ である．

ξ を ω_1 と $1-\omega_1$ とを等分に混合したプレーヤーIの混合戦略とすれば，

$$\rho_1(\xi, S)=\tfrac{1}{2}(1-2\omega_1)(1000-0.1N)\left(\sum_{s=0}^{N}\binom{N}{s}h(s, S)\right)$$

ただし，$s \in S$ のとき $h(s, S)=\omega_1^s(1-\omega_1)^{N-s}$

$s \notin S$ のとき $h(s, S)=(1-\omega_1)^s\omega_1^{N-s}$

かくして，$\min_{S}\rho_1(\xi, S)$ をうるには，各 s について $h(s, S)$ を最小化すればよい．すなわち，$s \in S$ となるのは，$\omega_1^s(1-\omega_1)^{N-s} \leq (1-\omega_1)^s\omega_1^{N-s}$ のときに限る．すなわち，

$$(\omega_1/1-\omega_1)^{2S-N} \leq 1,$$

ところが $\omega_1 \leq \frac{1}{2} \rightarrow (\omega_1/1-\omega_1) \leq 1$より，このとき $2s-N \geq 0$たるを要するから $s \geq N/2$ となり，

$$\min_{S}\rho_1(\xi, S)=\rho_1(\xi, S^*)=v=\max_{\omega}\rho_1(\omega, S^*)$$

で，S^* がミニマツクス・ロスの戦略となる．

すべての ω に対して $\gamma(\omega)=0$ なる場合，上述の二つの原理は一致する．これらの原理に対する非難は，ある ω が絶対に存在不可能だという情報以外，decision-maker が ω についてもつている情報をこれらの原則が考慮していないという事実に向けられている．それに対して，たとえば，ω にかんするかれの情報が，Ω 上の確率分布 $\xi(\omega)$ であるとしよう．この $\xi(\omega)$ は系の真の状態が ω であるという確率を，かれの情報に基ずいて，表現したものである．すると，判定 d の utility は

$$U(\xi, d)=\sum_{\omega}\xi(\omega)u(\omega, d).$$

かくして，

「ベーイスの原理」：$U(\xi, d)$ を最大化するように d を選択せよ．

という原則がえられる．このような d を，われわれは，ξ に対する「ベーイス解」とよぶ．

要約すれば，ミニマツクス原理は

$$\sup_{\omega} \rho(\omega, d_1) \leq \sup_{\omega} \rho(\omega, d_2)$$

なる場合にのみ，$d_1 \cdot\geq d_2$ なる関係をもたらし，一方，ア・プリオナな分布 ξ に関連するベーイスの原理は，

$$\sum\xi(\omega)\rho(\omega, d_1) \leq \sum\xi(\omega)\rho(\omega, d_2)$$

なる場合にのみ，$d_1 \cdot\geq d_2$ なる関係をもたらす．

多くの統計的なゲームにおいて，ξ は，decision-maker の個人的な主観にもとずくものであり，データを集める前の判断がプレーヤー相互で相異つておれば，集められた同一のデータからひきだされる結論も異つてくるであろう．しかも，Ω 上のア・プリオリな分布 ξ を仮定しなければ，選択の原理からえられないということは，ベーイスの原理が無作為化を必要としないことと共に，判定の問題 (Ω, D, ρ) の根本問題なのである．

参考文献

〔1〕 ..v. Neumann and O. Morgenstern: Theory of Games and Economic Behavior.

〔2〕 R. Carnap: The Continuum of Inductive Methods.

〔3〕 Decision Process, edited by R.M.Thrall, C.H. Coombs, and R.L.Dauis.

〔4〕 D.Blackwell and M.A.Girshick: Theory of Games and Statistical Decisions.

オペレーションズリサーチについての一考察

万　代　三　郎*

(1)

ここ数年来実際科学の諸分野において，とくに，オーガンゼーションのオペレーションの問題の研究に関連して，オペレーションズ・リサーチという言葉が散見されるようになつた．作戦研究という訳語の示すごとく，その発生においては，軍事的オペレーションの問題の解決のための科学的方法ないし用具であつた．しかし内容はかならずしも軍事的目的のみを指向するものではなく，現在平和的目的のオペレーションズ・リサーチの充実が急がれ，かなりの成果をのこしている分野がある．通常，科学者が軍隊に動員されるのは，新しい装備の発明・考案に関してというかたちでであるが，第二次大戦中その作戦目的達成のため，科学の方法，とくに数学および物理学の方法を転用し，作戦結果の検討を通じて，すなわちデータとしての作戦結果の数量的検討を通じて，装備および人間の使い方について，たとえば護送船団の規模の決定，対潜哨海の方法などについて，作戦首脳部に判断のための数量的基礎を与えようとするような事態が生じてきた．

「オペレーションズ・リサーチは戦時および平時におけるオペレーションの検討に対する科学的技法の適用である。」[1] しかし，この方法は本質的には人間と物との組織化の方法である．オペレーションズ・リサーチは，とくに数学および物理学とオペレーションの水準における実践を，一つに結びつけて，意識的に学ぶべき学習科目とする上での最初の途である．そして工業生産については，もちろん他の分野においてもそうであるが，とくに．この共通の学科は，戦争が意味するよりも，はるかに広い内容をもつものである．第二次大戦後において，この方法は産業および政府機関のアドミニストレイティブな問題に対する応用としての業績をあげつつある．

オペレーションズ・リサーチがその研究対象とするものは，オペレーションの水準における実践である．すなわち，人間と装備からなるチームが仕事に着手するとき，どうなるかということを分析・理解しようとするものである．われわれは，このオペレーションズ・リサー

*大阪大学経済学部統計学研究室