故に

$$(5.3)\quad H_\alpha(x)=\beta\frac{\alpha^{1/k}}{k}\int_0^x e^{-\beta u}\left(\sum_{j=1}^{k}\omega_j e^{\omega_j\alpha^{1/k}\beta u}\right)du$$

$f(x)=e^{-x}$ とすれば $\beta=k=1,\ F=1-e^{-x}$ より

$$H(x)=\int_0^x e^{-u}(e^u)du=x,$$

よつて
$$l_\infty=\frac{K+l(S)+\int_0^{S-s}l(S-x)dx}{1+S-s}=\frac{K+cS+Ae^{-S}+\int_0^{S-s}[c(S-x)+Ae^{-S+x}]dx}{1+S-s}=\frac{K+cS+Ae^{-S}+\frac{c}{2}(S^2-s^2)}{1+S-s}$$

$S-s=\varDelta$ として S を求めると（$l_\infty\to$ 最小化）簡単な計算で次の解をうる．

$$S=\log_e(A/c)-\log_e(1+\varDelta)-\varDelta$$

大体以上のような方法が Marschak らの論文の要旨であるが，問題をさらにこの方法で展開してゆくためには，第一に $a,\ b_0,\ b_1,\ B$ というような，この論文で省略された径数をどういうように評価するかが問題である．また第二には，こゝでは単位期間について既知とされている需要函数 $F(x)$ の観測につれて，（時点 t における）S および s は，$S_t\ (x_1,\cdots\cdots,\ x_t)$ および $S_t\ (x_1,\cdots\cdots,\ x_t)$ というような表現をとるかもしれない．最適注文量も $q_t\ (x_1,\cdots\cdots,\ x_t)$ のような函数となるであろうから，損失函数の構成が難しくなり，問題の複雑化が予想されるのである．

有界変数の問題について

小林和夫*

線型計画の問題は，一般にシンプレックス・タブローを用いて解いて行くのであるから，タブロー上の計算に要する労力を可能な限り少くするために努力が払われ，この点を中心とする計算上の理論が展開されて来たのは当然のことであろう．以下に紹介する理論及び計算手続もその一つであり，A. Charnes 及び C. E. Lemke によるComputational Theory of Linear Programmin I. (The "Bounded Variables" Problem) である．

所で，線型計画の問題においては，生産物の販売可能量についての市場制限や，生産技術上の制約から，或は在庫管理上の政策，更に生産量，引渡し量についての要請等々から，各プロセスの用いうる水準に関して，上限，下限が存在する如き場合に往々直面する．この種の条件を含む問題は，タブローの規模が大きくなることをいとわない限り，勿論，従来用いられて来たシンプレックス・タブローによつて解くことが出来る．しかしながら，問題に含まれる変数—プロセスの水準—の多くに亘つて，この種の条件が課せられる場合，従来の手法に従うと，徒らにタブローの規模を大きくする許りである．A. Charnes 及び，C. E. Lemke の理論によつて，この種の問題を，かゝる条件が課せられてない問題を解く場合に必要な規模のタブローによつて，解くことが可能となつた．以下において先ず問題を定式化し，次いでタブローの構成，計算手続，及び実際の計算例の順に従つて，このことを示してみよう．

* 大阪大学経済学部統計学研究室

問題の定式化

最初に次の問題を考える．

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n-m}a_{ij}\lambda_j\leqq s_i \qquad i=1,\cdots,m,\\ &\text{且つ}\ \lambda_j\geqq 0 \qquad j=1,\cdots,n-m,\\ &\text{の下で}\\ &z_0=\sum_{j=1}^{n-m}\lambda_j c_j=\max.\end{aligned}$$

シンプレックス法によつて，この問題を解く場合，勿論 m 個のスラック変数 $\lambda_j(j=n-m+1,\cdots,n)$ を導入して等式にするのであるが，こゝで，スラック変数を除いた変数 $\lambda_j(j=1,\cdots,n-m)$ に関して有界，即ち $a_j\leqq\lambda_j\leqq b_j$ なる条件が課せられたものとする．この条件は勿論，$0\leqq\lambda_j'\leqq b_j'$ の形に容易に改め得るが，更にこれは，$\lambda_j'+x_j'=b_j'$ 且つ $\lambda_j',\ x_j'\geqq 0$ なる形の条件として表わし得る．所でスラック変数についても，適当に上限を附けることが出来るから，有界変数の問題を次の形で定式化しよう．

$$\text{(II)}\quad \begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\lambda_j=s_i \qquad i=1,\cdots,m,\\ &\lambda_j+x_j=b_j \qquad j=1,\cdots,n,\\ &\text{且つ}\ \lambda_j,\ x_j\geqq 0\\ &\text{の下で}\\ &z_0=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j c_j=\max.\end{aligned}$$

問題 (II) は $(m+n)$ 個の条件式と，$2n$ 個の変数から成る問題であり，この問題は，従来の手法に従うと $(m+n)\times 2n$ の規模のタブローを必要とする．A. Charnes 及び C. E. Lemke の理論に従つて，これを $m\times n$ の規模のタブローで解き得ることを以下に示すのであるが，

そのために先ず次の様なベクトルを定義して，(II) をベクトル記号で表してみる．

$$P_0=\begin{pmatrix}s_1\\s_2\\\vdots\\s_m\end{pmatrix},\quad P_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix},$$ $j=1,\cdots,n$, 但し $j=n-m+1,\cdots,n$ はスラック・ベクトルである．

次に (II) の $\lambda_j+x_j=b_j,\ j=1,\cdots,n$ なる条件に関連して，次の様な n 次元空間 V_n におけるベクトルを定義する．

$$b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\\vdots\\\vdots\\b_n\end{pmatrix},\quad Q_j=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\text{—第 } j \text{ 番目；}\ j=1,\cdots,n$$

更にこれらのベクトルから V_{m+n} における次の様なベクトルを構成する．

$$\bar{P}_0=\begin{bmatrix}P_0\\b\end{bmatrix},\quad \bar{P}_j=\begin{bmatrix}P_j\\Q_j\end{bmatrix},\quad \bar{Q}_j=\begin{bmatrix}0\\Q_j\end{bmatrix};\ j=1,\cdots,n.$$

このベクトルによつて，(II) は次の様に表わしうる．

$$\bar{P}_0=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\bar{P}_j+\sum_{j=1}^{n}x_j\bar{Q}_j,\ \lambda_j,\ x_j\geqq 0;\ j=1,\cdots,n$$

の下で

$$z_0=\sum_{j=1}^{n}\lambda_jc_j=\max.$$

シンプレックス・タブローの構成とその意味

この問題を解いて行くに当つて先ず必要となるのは，一つの基底解と，それを構成する線型独立な $m+n$ 個のベクトルによる任意のベクトル $\bar{P}_j,\bar{Q}_j(j=1,\cdots,n)$ の表現である．しかし通常の線型計画の問題におけると同様に，この問題においても，少くとも一つの基底解は容易に求めることが出来る．従つてある基底解が求められたものとする．このことは $\bar{P}_1,\cdots,\bar{P}_n,\ \bar{Q}_1,\cdots,\bar{Q}_n$ の中から V_{m+n} の基底 B_{m+n} が選ばれたことを意味するが，$\bar{P}_j,\bar{Q}_j$ についての上の定義を考慮すれば，この B_{m+n} について，次の様な性質があることは明らかである．

i) どの一つの j についても，$\bar{P}_j$ 乃至 $\bar{Q}_j$ の何れもが B_{m+n} 中に存在しないと云うことはありえない．即ち $\bar{P}_j,\bar{Q}_j$ の少くとも一方は必ず B_{m+n} 中に存在する．

ii) B_{m+n} 中に含まれている $\bar{P}_j$ の数を s とすると，$m\leqq s\leqq n$ である．

iii) $\bar{P}_j$ と $\bar{Q}_j$ とが同じ j について同時に B_{m+n} に含まれている j の値の数は丁度 m 個である．更にこの様な j についての m 個の P_j の組は V_m の基底である．

ここで便宜上この B_{m+n} が次の様な $m+n$ 個のベクトルによつて構成されているものとする．即ち，$\bar{P}_1,\cdots,\bar{P}_m$，と $\bar{Q}_1,\cdots,\bar{Q}_m$ とは同時に B_{m+n} 中にある．$\bar{P}_{m+1},\cdots,\bar{P}_s$ が単独で B_{m+n} に含まれる $\bar{P}_j$ である．更に $\bar{Q}_{s+1},\cdots,\bar{Q}_n$ が単独で B_{m+n} に含まれる $\bar{Q}_j$ である．従つてこの B_{m+n} に含まれていないベクトルは $\bar{P}_j(s<j\leqq n)$ と $\bar{Q}_j(m<j\leqslant s)$ である．

この仮定と，上の基本的性質から，$[P_1,\cdots,P_m]$ は V_m における基底 B_m を構成するが，この B_m の逆行列における第 i 行を $a^i(i=1,\cdots,m$; これらは B_m に対する dual vector と云われる）で表わせば，P_j，P_0 は夫々次の様に表わし得る．

$$(1)\quad \begin{aligned}P_j&=\sum_{i=1}^{m}(P_j'a^i)P_i\qquad j=1,\cdots,n.\\P_0&=\sum_{i=1}^{m}(P_0'a^i)P_i\end{aligned}$$

こゝに P_ja^i はベクトル P_j とベクトル a^i の内積を表わし，勿論

$$P_j'a^i=\delta_{ij}\begin{cases}=1,\ i=j\\=0,\ i\neq j\end{cases}\quad i,\ j=1,\cdots,m.$$

である．

そこで，この関係を考慮して，V_{m+n} における基底 B_{m+n} を構成する先に仮定した $m+n$ 個のベクトルによる基底解を求め，又その基底に含まれていない $\bar{P}_j,\ \bar{Q}_j$ の表現が如何になされるかを見る．

先ず $\bar{P}_j(s<j\leqq n)$ については，

$$(2)\quad \bar{P}_j=\bar{Q}_j+\begin{bmatrix}P_j\\0\end{bmatrix}=\bar{Q}_j+\sum_{i=1}^{m}(P_j'a^i)[\bar{P}_i+\bar{Q}_i],$$

次に $\bar{Q}_j(m<j\leqq s)$ については，

$$(3)\quad \bar{Q}_j=\bar{P}_j-\begin{bmatrix}P_j\\0\end{bmatrix}=P_j+\sum_{i=1}^{m}(-P_j'a^i)[\bar{P}_i-Q_i],$$

更に $\bar{P}_0$ については，

$$(4)\begin{cases}P_0=\begin{bmatrix}P_0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\b\end{bmatrix}=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}(P_0'a^i)[\bar{P}_i-\bar{Q}_i]\\[2ex]\quad+\displaystyle\sum_{j=1}^{n}b_j\bar{Q}_j=\sum_{i=1}^{m}(P_0'a^i)[\bar{P}_i-\bar{Q}_i]+\sum_{i=1}^{m}b_i\bar{Q}_i\\[2ex]\quad+\displaystyle\sum_{i=s+1}^{n}b_i\bar{Q}_i+\sum_{j=m+1}^{s}b_j[\bar{P}_j-\sum_{i=1}^{m}P_j'a^i(\bar{P}_i-\bar{Q}_i)]\\[2ex]\quad=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\phi_i\bar{P}_i+\sum_{i=1}^{m}(b_i-\phi_i)\bar{Q}_i+\sum_{j=m+1}^{s}b_j\bar{P}_j\\[2ex]\quad+\displaystyle\sum_{j=s+1}^{n}b_j\bar{Q}_j,\end{cases}$$

こゝに $\phi_i=P_0'a^i-\sum_{j=m+1}^{s}b_j(P_j'a^i)\qquad i=1,\cdots,m.$

(4) における $\phi_i,\ b_i-\phi_i,\ (i=1,\cdots,m),\ b_j\ (j=m+1,\cdots s$, 及び $j=s+1,\cdots,n)$ によつて基底解が表わされているが，この三つの式における $P_j'a^i$, $P_0'a^i$ は勿論 V_m におけるベクトルの内積であり，更に基底解における ϕ_i，従つて又 $b_i-\phi_i$ も，これらから求められるものであることを考えれば，(II′) で与えられた $(m+n)\times 2n$ の問題は，$m\times n$ のタブローで解き得ることが判る．表

表　I

b_j				$b_1\cdots\cdots b_m$	$b_{m+1}\cdots\cdots b_s$	$b_{s+1}\cdots\cdots b_n$
↓対応するスカラー→				$c_1\cdots\cdots c_m$	$c_{m+1}\cdots\cdots c_s$	$c_{s+1}\cdots\cdots c_n$
	B_m	P_0 a	P_0 b	$P_1\cdots\cdots i^1{}_m$	$P_{m+1}\cdots\cdots P_s$	$P_{s+1}\cdots\cdots P_n$
c_1	P_1	ϕ_1	$b_1-\phi_1$	$P_1'a^1\cdots\cdots P_m'a^1$	$P'_{m+1}a^1\cdots\cdots P_s'a^1$	$P'_{s+1}a^1\cdots\cdots P_n'a^1$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮　　⋮	⋮　　⋮	⋮　　⋮
c_r	P_r	ϕ_r	$b_r-\phi_r$	$P_1'a^r\cdots\cdots P_m'a^r$	$P'_{m+1}a^r\cdots\cdots P_s'a^r$	$P'_{s+1}a^r\cdots\cdots P_n'a^r$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮　　⋮	⋮　　⋮	⋮　　⋮
c_m	P_m	ϕ_m	$b_m-\phi_m$	$P_1'a^m\cdots\cdots P_m'a^m$	$P'_{m+1}a^m\cdots\cdots P_s'a^m$	$P'_{s+1}a^m\cdots\cdots P_n'a^m$
$z(P_j)\rightarrow$			z_0	$z(P_1)\cdots\cdots z(P_m)$	$z(P_{m+1})\cdots\cdots z(P_s)$	$z(_{s+1})\cdots\cdots z(P_n)$
$B_{m+n}\rightarrow$				＋, －, ……, ＋, －	＋ ………… ＋	－ ………… －

Iがこのタブローを示している．

ところで表Iのもつ意味に関しては，二，三の注釈を加えなければならない．先ず B_{m+n} 欄における＋，－の意味が問題である．之は次のことを意味している．

P_j 列のこの欄が＋であれば，$\bar{P}_j$ が B_{m+n} に含まれている．

P_j 列のこの欄が－であれば，$\bar{Q}_j$ が B_{m+n} に含まれている．

P_j 列のこの欄に＋と－とが同時に記入されている部分については（表においては $j=1,\cdots,m$）$\bar{P}_j$ と $\bar{Q}_j$ とが共に B_{m+n} に含まれていることを意味する．

即ちこれは，基底 B_{m+n} の構成を＋及び－の符号で表わしているのである．尚，以下の（8）（9）式と関連して次の点に注目しておくことは，従来のタブローとの比較において表Iのもつ特徴を明らかにするものと思う．即ち B_{m+n} 欄に＋をもつ j の値（表Iでは $m<j\leqq s$）に関しては $\bar{P}_j$ が B_{m+n} に含まれていて，$\bar{Q}_j$ は含まれていない．その際，この $\bar{Q}_j$ の基底 B_{m+n} による表現が（3）式であるが，（3）における $[\bar{P}_i-\bar{Q}_i]$ の係数は $(-P_j'a^i)$ である．所で表Iにおいて之に相当する係数は，他の係数と同じく $(P_j'a^i)$ で表わされている．即ちこの様に表Iの B_{m+n} 欄に＋の値をもつ j についての $\bar{Q}_j$ の表現の係数は，もしこの問題を従来の手法に従つて $(m+n)\times 2n$ のタブローで解く場合に求められる $\bar{Q}_j$ についての表現の係数とは，それぞれ互に符号が逆になつているのである．同様のことは，勿論次の $z(P_j)$ についてもあてはまる．

更に，$z(P_j)$ は次の意味をもつものである．

（5）　$z(\bar{P}_j)=0+\sum_{i=1}^{m}(P_j'a^i)c_i-c_j=z(P_j)$

$$s<j\leqq n,$$

（6）　$z(\bar{Q}_j)=c_j-\sum_{i=1}^{m}(P_j'a^i)c_i-0=-z(P_j)$

$$m<j\leqq s.$$

即ち，表中の $z(P_j)$ の欄は通常のタブローにおける z_j-c_j の欄に相当する．又（5），及び（6）によつて表において，B_{m+n} の欄に－を持つ j の値については，その $z(P_j)$ は $z(\bar{P}_j)$ と一致し，他方この欄に＋を持つ j についての $z(P_j)$ は $-z(\bar{Q}_j)$ を表わすことが判る．そこでこのことと，上で述べた B_{m+n} 欄の＋，－の意味を考え併すると，上の表が最適解を与えるものであれば，次の関係のあることは明らかである．即ち，

B_{m+n} 欄に－をもつ j の値，即ち $s<j\leqq n$ に関しては，

$$z(Pj)\geqq 0,$$

この欄に＋をもつ j の値，即ち $m<j\leqq s$ に関しては，

$$z(P_j)\leqq 0$$

さて上の関係が成立していない場合には，新しい解へ進むことになるが，こゝで基底の入換えのための判定規準が問題となる．

この場合，次の段階で新に基底 B_{m+n} に入るベクトルとしては，勿論，上の $z(P_j)$ についての関係を満足していない $\bar{P}_j$，或は $\bar{Q}_j$ を選べばよいが，一応通常のシンプレックス・タブローにおけるルールに従うことにする．即ち

B_{m+n} 欄に－をもつ j の値について $(s<j\leqq n)$

（7）　$\min_j z(P_j)<0,$

（この場合 $\bar{P}_j$ が基底 B_{m+n} に入る）

B_{m+n} 欄に＋をもつ j の値について，$(m<j\leqq s)$

（7′）　$\max_j z(P_j)>0,$

（この場合 $\bar{Q}_j$ が基底 B_{m+n} に入る）

次に必要となるのは，基底 B_{m+n} からどのベクトルを除くべきかについての判定規準である．先ず（7′）に従つて $\bar{Q}_k(m<k\leqq s)$ が基底に入るものとする．$\bar{Q}_k$ が入りうる水準を $\theta>0$ とし，（2）及び（4）を考慮すると，

$$\bar{P}_0=\bar{P}_0-\theta\bar{Q}_k+\theta\bar{Q}_k$$
$$=\bar{P}_0-\theta\{\bar{P}_k\sum_{i=1}^{m}(P_k'a^i)[\bar{P}_i-\bar{Q}_i]\}+\theta\bar{Q}_k$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\{\phi_i+\theta P_k'a^i\}\bar{P}_i+\sum_{i=1}^{m}\{(b_i-\phi_i)-\theta(P_k'a^i)\}\bar{Q}_i$$
$$+(b_k-\theta)\bar{P}_k+\sum_{\substack{j=m+1\\(j\neq k)}}^{s}{}' b_j\bar{P}_j+\sum_{j=s+1}^{m}b_j\bar{Q}_j+\theta\bar{Q}_k$$

但し，$\sum_{\substack{j=m+1\\(j\neq k)}}^{s}{}' b_j\bar{P}_j$ は $j=k$ の部分を除いたことを示す．Q_k が θ なる水準で実行される新しい基底解を構成するに当つては，θ は勿論次の判定規準に従うことが判る．

（8）　$\theta=\min\{[\min_i\phi_i/(-P_k'a^i)\ \text{for}\ P_k'a^i>0],$
$[\min_i(b_i-\phi_i)/(P_k'a^i)\ \text{for}\ P_k'a^i>0],\ b_k\}$

次に $\bar{P}_k\ (s<k\leqq n)$ が基底に入るものとする．上と同様，$\bar{P}_k$ が入り得る水準 $\theta>0$ について，次の判定規準が求められる．

（9）　$\theta=\min\{[\min_i\phi_i/P_k'a^i\ \text{for}\ P_k'a^i>0],$
$[\min_i(b_i-\phi_i)/(-P_k'a^i)\ \text{for}\ P_k'a^i<0],\ b_k\}$

以上の判定規準によつて，新たに基底 B_{m+n} に入るベクトルと基底から出るベクトルが決定せられた．そこで以下において，次の解に関するタブローを構成するために必要な計算手続の規則を掲げておこう．

計算手續の規則

(A)　$\bar{Q}_k\ (m<k\leqq s)$ が基底 B_{m+n} に入る場合．

この場合，B_{m+n} についての基本性質乃至（8）を考えれば，次の三つの場合について見ればよい．

i)　同一の $k\ (m<k\leqq s)$ について $\bar{P}_k$ が出る（$\theta=b_k$）場合．

この場合には基底 B_m は全く変化せず，タブローにおける変化は次の如くである．

イ）P_k の列の B_{m+n} 欄における＋を－にかえる．

ロ）P_0 の下の a 及び b の列における $\phi_i\ (i=1,\cdots\cdots,m)$ は $\phi_i^*=\phi_i+b_k(P_k'a^i)$ となる．（* は次のタブローにおけるものを示す．）

ハ）$z^*=z_0+b_kz(P_k)$ となる．

ii)　$1<r\leqq m$ なる r について $\bar{P}_r$ が出る（$\theta=\dfrac{\phi_r}{-(P_k'a^r)}$）場合．

この場合には基底 B_m は変化する．タブローにおける変化は次の如くである．

イ）$(P_j'a^i)^*=P_j'a^i-\dfrac{(P_k'a^i)}{(P_k'a^r)}(P_j'a^r)$ for $j=1,\cdots\cdots,n$, 但し $j\neq k$, 及び $i=1,\cdots\cdots,m$, 但し $i\neq r$.

$(P_j'a^r)^*=\dfrac{(P_j'a^r)}{(P_k'a^r)}$　; $j=1,\cdots\cdots,n$.

$$(P_k'a^i)^*=\begin{cases}0\cdots\cdots\cdots\cdots i\neq k\\1\cdots\cdots\cdots\cdots i=k\end{cases}$$

ロ）$z(P_j)^*=z(P_j)-[(P_j'a^r)/P_k'a^r)]z(P_k)$, $j=1,\cdots\cdots\cdots,n$

ハ）P_0 の下の a 及び b の列における ϕ_i については，$\theta=\dfrac{\phi_r}{-(P_k'a^r)}$ に対して，

$\phi_i^*=\phi_i+\theta(P_k'a^i)$　; $i=1,\cdots\cdots,m$,　但し $i\neq r$, 又 ϕ_r に代つて $b-\theta$ が入り，$b_r-\phi_r$ に代つて θ が入る．

ニ）B_m 列の P_j に代つて P_k が入り，対応するスカラーの列の c_r に代つて c_k が入る．

ホ）P_k 列の B_{m+n} 欄には＋，－が同時に記入される．P_r 列の B_{m+n} 欄には，＋，－に代つて－が記入される。

へ）$z_0^*=z_0+\theta z(P_k)$, 勿論この $k\ (m<k\leq s)$ については $z(P_k)>0$ である（(7′) 参）

iii)　$1\leq r\leq m$ なる r について $\bar{Q}_r$ が出る（$\theta=\dfrac{b_r-\phi_r}{P_k'a^r}$）場合．

この場合には ii) と同様，B_m は変化し，ii) のイ)，ロ)，ニ) 及びへ) が適用される．その他については，

ハ）P_0 の下の a 及び b の列における ϕ_i については，$\theta=\dfrac{b_r-\theta_r}{P_k'a^r}$ に対して，

$\phi_i^*=\phi_i+\theta(P_k'a^i)$　; $i=1,\cdots\cdots\cdots\cdots,m$, 但し $i\neq r$, ϕ_r に代つて $b_k-\theta$ が入り，$b_r-\phi_r$ に代つて θ が入る．

ホ）P_k 列の B_{m+n} 欄には＋，－が同時に記入される．P_r 列の B_{m+n} 欄には，＋，－に代つて＋が記入される．

(B)　$\bar{P}_k\ (s>k\leqq n)$ が基底 B_{m+n} に入る場合．

(A) と同様，次の三つの場合があり得る．

i)　同一の $k\ (s<k\leq n)$ について $\bar{Q}_k$ が出る（$\theta=b_k$）場合．

イ）P_k 列の B_{m+n} 欄における－を＋にかえる．

ロ）P_0 の下の a 及び b の列における $\phi_i\ (i=1,\cdots\cdots,m)$ は

$\phi_i^*=\phi_i-b_k(P_k'a^i)$.

ハ）$z_0^*=z_0-b_kz(P_k)$

ii)　$1\leq r\leq m$ なる r について $\bar{Q}_r$ が出る（$\theta=\dfrac{b_r-\phi_r}{-P_k'a^r}$）場合．

(A) の ii), iii) と同じく B_m は変化する．(A) ii) のイ）ロ）及びニ）が適用され，その他についてはハ）P_0 の下の a, 及び b の列における ϕ_i については $\theta=\dfrac{b_r-\phi_r}{-(P_k'a^r)}$ に対して，

$\phi_i^*=\phi_i-\theta(P_k'a^i)$, $i=1,\cdots\cdots,m$, 但し $i\neq r$.

ϕ_r に代つて θ が入り，$b_r-\phi_r$ に代つて $b_k-\theta$ が入る．

ホ）P_k 列の B_{m+n} 欄には＋，－が同時に記入される．P_r 列の B_{m+n} 欄には，＋，－に代つて＋が記入される．

へ）$z_0^*=z_0-\theta z(P_k)$, 勿論 $z(P_k)<0$ である．

iii) $1\leq r\leq m$ なる r について $\bar{P}_r$ が出る $\left(\theta=\dfrac{\phi_r}{P_k'a^r}\right)$ 場合．

上の ii) と同じく (A) ii) のイ）ロ）及びニ）が適用される．その他については，

ハ）F_0 の下の a, 及び b の列における ϕ_i については $\theta=\dfrac{\phi_r}{P_k'a^r}$ に対して，

$\phi_i^*=\phi_i-\theta(P_k'a^i)$ $i=1,\cdots\cdots,m$, 但し $i\neq r$.

ϕ_r に代つて θ が入り，$b_r-\phi_r$ に代つて $b_k-\theta$ が入る．

ホ）P_k 列の B_{m+n} 欄には＋，－が同時に記入される．P_r 列の B_{m+n} 欄には，＋，－に代つて－が記入される．

へ）$z_0^*=z_0-\theta z(P_k)$.

実際の計算例

以上によつて示された理論及び計算手続に従つて，次の様な有界変数の問題を解くことにしよう．問題としては，経営科学第１巻，第１号における講座で用いられた問題を用い，之に条件を附加えることにした．附加えた条件としては，製品 A, B, C の生産量が市場制限等により，それぞれ40，20，17単位以下であることが求められ，更に，技術的制限により，プロセス A_1 及び A_2 を用いうる水準は，それぞれ20，30単位以下であることが課せられているものとする．必要な係数（但しプロセス１単位水準についての係数）と条件とを示せば，表Ⅱの如くになる．

表　Ⅱ

生産過程		A_1	A_2	B	C	生産要素一単位当り価格（円）	一日当り使用可能な最大単位数
労働力	熟練労働者（人）	1/4			6/17	400	10
	未熟練労働者（人）	1/5	10/17	1/2	2/17	250	制限なし
機械 M（台）		1/10	2/17		5/17	200	8
原料 F（単位）		3/20	3/17	1/4	1/17	100	15
１日当りの最大生産個数		20	30	20	17		
		全体として 40					
製品の単位当り販売価格（円）		200		160	250		

この問題を先に示した問題の形で表わせば下の様になる．

点線以下の４つの条件式は，最初の４つの条件式からして，スラック変数 λ_5, λ_6, λ_7 及び λ_8 はそれぞれ 10, 8, 15 及び 40以上にはなりえないことを考慮して，附け加えた条件である．従つて従来の手法を用いるならば，この点線以下の式を除いた８×12の問題として，８×12の規模のタブローで解くことが出来る．尚上の式においてに $\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_8$ 対応するプロセスが問題 (II′) で示した $\bar{P}_j$（こゝでは $j=1,\cdots\cdots,8$）に相当し，$x_1,\cdots\cdots,x_8$ に対応するプロセスが $\bar{Q}_j$（$j=1,\cdots\cdots,8$）に相当する．前述の理論によつて，この問題は４×８の規模のタブローで解くことが出来るが，先ず最初の解は第１表に示されている如く構成することが出来る．尚最大にすべき目的函数は前号の講座と同じく

$$z_0=15\lambda_1+\frac{200}{17}\lambda_2+10\lambda_3+\frac{250}{17}\lambda_4$$

$$\begin{array}{l|l}
1/4\lambda_1 + 6/17\lambda_4 + \lambda_5 & =10 \\
1/10\lambda_1 + 2/17\lambda_2 + 5/17\lambda_4 + \lambda_6 & =8 \\
3/20\lambda_1 + 3/17\lambda_2 + 1/4\lambda_3 + 1/17\lambda_4 + \lambda_7 & =15 \\
\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_8 & =40 \\
\hline\hline
\lambda_1 + x_1 & =20 \\
\lambda_2 + x_2 & =30 \\
\lambda_3 + x_3 & =20 \\
\lambda_4 + x_4 & =17 \\
\hdashline
\lambda_5 + x_5 & =10 \\
\lambda_6 + x_6 & =8 \\
\lambda_7 + x_7 & =15 \\
\lambda_8 + x_8 & =40
\end{array}$$

	b_j				10	8	15	40	20	30	20	17
	c_j 対応するスカラー →								15	200/17	10	250/17
	↓	B_m (B_4)	P_0 a	b	P_5	P_6	P_7	P_8	P_1	P_2	P_3	P_4
第1表	0	P_5	10	0	1				1/4			6/17
	0	P_6	8	0		1			1/10	2/17		5/17
	0	P_7	15	0			1		3/20	3/17	1/4	1/17
	0	P_8	40	0				1	1	1		
				$z(P_j)$→					−15	−200/17	−10	−250/17
	B_{m+n} (B_{12})				+ −	+ −	+ −	+ −	−	−	−	−
第2表		P_5	5	5	1				1/4			6/17
		P_6	6	2		1			1/10	2/17		5/17
		P_7	12	3			1		3/20	3/17	1/4	1/17
		P_8	20	20				1	1	1		
			300	$z(P_j)$→					−15	−200/17	−10	−250/17
	B_{m+n}				+ −	+ −	+ −	+ −	+	−	−	−
第3表	250/17	P_4	85/6	17/6	17/6				17/24			1
		P_6	11/6	37/6	−5/6	1			−13/120	2/17		
		P_7	67/6	23/6	−1/6		1		13/120	3/17	1/4	
		P_8	20	20				1	1	1		
			1525/3	$z(P_j)$→	1/253				−55/12	−200/17	−10	
	B_{m+n}				−	+, −	+, −	+, −	+	−	−	+ −
第4表	250/17	P_4	85/6	17/6	17/6				17/24			1
	200/17	P_2	187/12	173/12	−85/12	1/72			−221/240	1		
		P_7	101/12	79/12	13/12	−3/2	1		13/48		1/4	
		P_8	53/12	427/12	85/12	−17/2		1	461/240			
			2075/3	$z(P_j)$→	−1/253	100			−185/12		−10	
	B_{m+n}				−	−	+, −	+, −	+	+, −	−	+, −
第5表	250/17	P_4	85/6	17/6	17/6				17/24			1
	200/17	P_2	187/12	173/12	−85/12	17/2			−221/240	1		
		P_7	41/12	139/12	13/12	−3/2	1		13/48		1/4	
		P_8	53/12	427/12	85/12	−17/2		1	461/240			
			2675/3	$z(P_j)$→	−125/3	100			−185/12		−10	
	B_{m+n}				−	−	+, −	+, −	+	+, −	+	+, −
第6表	250/17	P_4	62/5	23/5		17/5		−2/5	−3/50			1
	200/17	P_2	20	10		0		1	1	1		
		P_7	233/85	1042/85		−1/5	1	−13/85	, 39/1700		1/4	
		P_5	53/85	797/85	1	−6/5		12/85	461/1700			
			15600/17	$z(P_j)$→		50		100/17	−70/17		−10	
	B_{m+n}				+, −	−		−	+		+	+, −

である.

第1表においては，基底 B_{m+n}（こゝでは B_{12}）は，$\bar{P}_j$（$j=5,\cdots\cdots,8$）及び $\bar{Q}_j$（$j=1,\cdots\cdots,8$）によつて構成されている．B_{m+n} 欄は先のルールに従つて，同じ j について $\bar{P}_j$ と $\bar{Q}_j$ とが同時に基底に含まれるものについては，＋，－を共に記入し，$\bar{Q}_j$ 単独で含まれるものに対しては，－を記入してある．尚 $\bar{P}_j$ が単独に含まれているものはない．

そこで次の段階で基底 B_{m+n} に入るベクトルはこの第1表では勿論，その B_{m+n} 欄に－をもち，而もその $z(P_j)$ 欄が－であるものから選ばれる．（7）に従つて $\bar{P}_1$ が選ばれる．

次に現在の基底から出るべきベクトルの則定規準としては（9）が用いられ $\theta=b_1$ (20) が決定される．即ち $\bar{P}_1$ が入つて $\bar{Q}_1$ が出ることになつた．従つて第2表作成のための計算手続は，先に示した計算手続の(*B*)（i）に従えばよい．

更にこの第2表によつて与えられる基底解から第3表へ進むが，上と同様にして次に基底に入るベクトルとして $\bar{P}_4$，出るベクトルとして（9）より $\bar{P}_5$ が決定される．よつて計算手続は (*B*) iii) に従えばよい．以下同様である．但し（7），（7′）には必ずしも従つていない．

先に示した所から，最適解は第6表で与えられる．最適解は $\bar{P}_1$ を20単位，$\bar{P}_2$ を20単位，$\bar{P}_3$ を20単位，$\bar{P}_4$ を62/5単位のそれぞれの水準で用いること，即ち，製品 *A* を40単位（工程 A_1 によつて20，A_2 によつて20），製品 *B* を20単位，同じく *C* を62/5単位生産することを表わしている．$z_0(\max)=15,600/17$（円）である．

最後に，有界変数の問題を以上に示した手法に従つて解くに当つても，勿論，A. Charnes, C. E. Lemke による madified simplex method 或は，同じことであるが，G. B. Dantzig 其他による Generalized simplex method を用いることが出来ようが，これらは有界変数の問題にのみ関係するものではなく，又有界変数の問題の解法が持つている特徴を明らかにするためにも，こゝではこれらの方法との関係については触れなかつた．

Simplex Method の發展について

横　山　保

線型計画の問題の計算法として Dantzig により考案された単体法 (simplex method) は，その後，計算上の観点から幾つかの進歩が為されている．そこでこの進歩を跡附けてみる為に，通常の simplex tableau の考え方から如何なる方向への進展が可能であるかを検討する．（1）先ず第一に考えられることは，単体法の計算の各段階に於いて，その計算に必要とされる最小限度の情報を明確にし，これを用いて計算を遂行することである．これは計算の上で考えられる理論的限界であり，Charnes, Lemke の言う如く誤差を control する方法でもある．（2）計算機 (computer) を用いて計算する配慮から，最終過程に到達する為に，各段階に於いて必要とされる情報の stock しなければならぬ量を最小にし，且つ計算の単純化を考えること．（3）技術行列 (technology matrix)…制限条件の不等式の係数から作られる行列…の特殊なタイプを利用すること．勿論この場合特殊なタイプを考えることは，それが実際に屢々起る可能性があることの保証を必要とする．

以上の三つの方向が考えられるのであるが，（1）については，Dantzig によつて展開された計算の各段階に於いて基底行列の逆行列を求めて行く方法がある．そうして Dantzig は同時に縮退 (degeneracy) の問題を解決している．この方法の紹介は本誌1巻1号所載の「Dantzig の Generalized Simplex Method について」に於いて為されている．（2）については，Dantzig, Orchard-Hays による Product Form を用いる方法がある．高度の計算機を用いる際はこの方法は極めて優れているようであるが，特にこの方法では，単位行列に一つの行が埋没しているような行列 elementary matrix を情報として stock すること，及び inner product の計算が容易であることの二つの条件を満足しうる計算機にとつては優れた方法であると考えられる．I.B.M. の701計算機を用いてこの方法を実行したと報ぜられている．これについては本誌次号で紹介が行われる予定である．

（3）については，先ず輸送計画の問題が考えられる．このタイプの問題が屢々起るものであることは充分了解されるであろう．この場合については良く知られている計算方法があり，勿論それは simplex method を技術行列の特殊なタイプを利用して単純化したものであることは容易にわかる．次に同様に屢々起る問題として有界変数の問題が考えられる．線型計画をオペレーションズ・リサーチの一つの技法として用いるときは，変数の値が現実のそれと余りにひどく異なることは，政策決定の参考としての意義を小にするのみならず，現実の状態から設定された線型計画の条件を変化させるか，乃至は新しい制限を追加せしめる如き結果に落ち入り，解の意義を失わせる可能性が充分存在する．従つて変数に対して上，下限が附される如き線型計画の問題は実際上の見地から屢々起ると考えられる．この種の問題に対する simplex method の単純化が本誌に於いて紹介された Charnes, Lemke の有界変数の問題に対する解法である．この有界変数の問題では，基底行列が，基底行列の部分行列の逆行列を知るならば容易に求まることを利用し Simplex tableau の縮小を考える方法である．以上 Simplex Method の発展について簡単に述べ，線型計画の計算法についての紹介の間の関係を示して置く．