資料 Optimal Inventory Policy

(K. J. Arrow, T. Harris and J. Marschak)

福 場 庸*

こゝでは K. J. Arrow, T. Harris および J. Marschak による最適在庫量の決定方法 (K. J. Arrow, T. Harris, and J. Marschak: Optimal Inventory Policy, Econometrica, Vol. 19, No. 3-July, 1951). の概略をのべたいと思う．かれらは，最大ストック S および reordering point s について損失函数を最小にする方法を試みた．接近方法として，まず静的モデルについて考察が行われ，ついで動的モデルについて考えられている．動的モデルにかんしては，ある与えられた初期のストック y_0 にたいして全期間にわたる総期待損失を表現する損失函数を求め，そこから解をうる一般的な方法が提示されている．

損失函数を最小にするということは，政策決定者――この論文の場合，政策決定者は在庫量の保有者である――の純効用を最大にすることを意味している．この点に関連して，政策決定者が管理可能な条件（不連続な時点における注文量）と管理不可能な条件（需要，輸送時間注文費用等）とをもつていることは，この問題を考える上で重要なことである．

つぎに問題になるのは，上記の管理不可能な条件をどういうように評価するかである．Marschak らはこれら管理不可能な条件――こゝでは管理不可能な条件は需要だけに限定されている――がある確率変数で表現されるものとし，その確率分布が非確率的変数の集合に退化するとき，これを確実 (Certainty) の場合とよび，確率変数で表わされる場合を不確実 (Uncertainty) の場合とよんでいる．

§1. 確実の場合

さて，組織の生産物にたいする（単位時間当りの）既知の一定の需要率を x とし，この需要に対応して組織に入つてくる（単位時間当りの）粗効用を $ax+a_0$ とする．私企業の場合は，a は販売価格であるか，一単位のオペレーションについてのその組織にたいする価値である．この論文では，一般に予想される a と x との函数関係を考えず，x を定数とし，$a_0=0$ とされている．注文量 q, 購買価格 $b=b(q)$ について $b'(q)\leqq 0$ を仮定し，ストック z の維持費を c_0+2cz とする．たゞし，c_0 は経常の倉庫費である．一般に c_0 は最大ストック量とともに変動し，c は現在のストック z ならびに支払価格とともに変るが，こゝでは一定とされている．

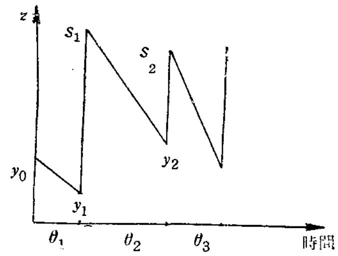
連続的な注文が行われるとは考えないで，離散的な時点における注文を仮定する．最初の注文は $t=0$ でなされ，i 番目の時間間隔を θ_i とすると，i 番目の区間の売上げは $x\theta_i$ となる．注文への即時の応答を仮定すれば

$$q_i = s_{i-1} - y_{i-1} > 0$$

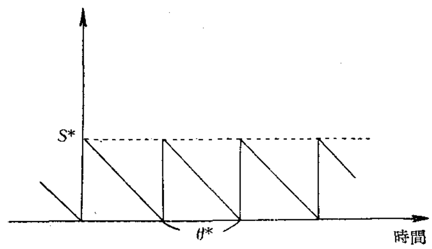
となる．たゞし，s_{i-1}, y_{i-1} は i 期の初めにおける補給前後のストックである．$x\theta_i=s_{i-1}-y_i$ より，

$$(1.1)\quad q_i=s_{i-1}-y_{i-1}=s_{i-1}-y_i+y_i-y_{i-1}$$
$$=x\theta_i+y_i-y_{i-1}, \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots)$$

第 1 図 (a)



第 1 図 (b)



i 期間中のストックは

$$(1.2)\quad \bar{z}_i=\int_0^{\theta_i}(s_{i-1}-xt)\,dt\Big/\int_0^{\theta_i}dt=\left(x\theta_i^2\Big/2\theta_i\right)+y_i$$
$$=(x\theta_i+2y_i)/2 \quad \because\ z(t)=s_{i-1}-xt,$$
$$\int_0^{\theta_i}(s_{i-1}-xt)\,dt=s_{i-1}\theta_i-\frac{x\theta_i^2}{2}=(x\theta_i+y_i)\theta_i-\frac{x\theta_i^2}{2}$$

かくして，time discount を認めなければ，i 期にえられる純効用は

$$(1.3)\quad u(\theta_i)=ax\theta_i-q_i\cdot b(q_i)-2c\bar{z}\theta_i-K$$

* 大阪大学経済学部統計学研究室

こゝに，$ax\theta_i$ は粗効用，$q_i \cdot b(q_i)$ は購買価格，$2c\bar{z}_i\theta_i$ は維持費，K は注文費，すなわち第二項から第四項までの和は総費用である．

(1.1) (1.2) により (1.3) は $y_i \geqslant 0$ の減少函数なる故 $u(\theta_i)$ はある θ_i および y_{i-1} にたいして $y_i=0$ において最大となる．

こゝで時間についての割引を無視して，与えられた時間 T にわたつて，効用の総和 $U=\sum_1^n u(\theta_i)$ （たゞし $\sum_1^m \theta_i = T$）を，したがつて平均効用 $U/T=\sum_1^m \theta_i v(\theta_i)/\sum_1^m \theta_i$ （たゞし $v(\theta_i)=u(\theta_i)/\theta_i$）を最大にするものとしよう．すると，$v(\theta_i)$ の加重平均，U/T はすべての $v(\theta_i)$ が $v(\theta^*)=\max\ v(\theta_i)$ に等しいとき最大になる．

ところで $^{\theta j}$

(1.4) $v(\theta)=u(\theta)/\theta=ax-(q_i \cdot b(q_i)/\theta)-2c\bar{z}_i-(K/\theta)$
$\qquad =ax-[xb(x\theta)+cx\theta+K/\theta]=ax-C(\theta)$

$C(\theta)$ は単位時間にたいする総費用である．もし $v(\theta)$ が $\theta=\theta^*$ のとき最大となり，$C(\theta)$ が最小となるならば

(1.5) $C'(\theta^*)=0=x^2b'(x\theta^*)+cx-K/(\theta^*)^2$

これから最適注文区間 θ^* を計算できる．故に第一図 (b) で輸送時間を零とすると，最大ストックは

(1.6) $S^*=x\theta^*$

となり，最小ストックは $y=0$ となる．たゞし θ^* は (1.5) を満足する．

購買価格函数の線型性 ($b''(q)=0$) を仮定し，$b(q)=b_0-b_1q$ （たゞし $b_1 \geq 0$）とする．(1.5) から $C'(\theta)=x^2b'(x\theta^*)+cx-K/(\theta^*)^2=0$，ところが $b'(q)=-b_1$ なる故

(1.7) $\theta^*=\sqrt{K/x(c-b_1x)}$

よつて (1.6) より最適最大ストック S^* は

(1.8) $S^*=\sqrt{Kx/(c-b_1x)}$

かくして最適注文量ならびに最適注文区間が大きくなれば，それだけに注文処理費 K，単位費用にたいする注文量の効果 b_1 は大きくなり，単位（限界）貯蔵費用 c は小さくなる．

かりに注文と配達の間の一定の輸送時間 $\tau>0$ を仮定しても，S^* あるいは θ^* には影響なく，注文を発する時間が τ 時間単位だけ前にずれればよい．しかし，政策決定者は二つの注文間の期間を完全にコントロールすることはできない．（たとえば定期郵便船の場合）そこで，計画された期間，最善ではあるが実現できない期間最も実現の可能性のある期間等の間の関係が考察されねばならない．

§2. 不確実な場合の静的モデル

ある期間の需要にたいするその期間の始めのストックを $S \geqslant 0$ とし，その期間の需要を確率変数 $x \geqslant 0$ とする．また組織は x の累積分布 $F(x)$ を知つているものとする．製品の ξ 単位を配達することによつてえられる粗効用を

(2.1) $a\xi+a_0$ （a, a_0 は一定）

とする．配達はその期間にたいする確率変数であり，$\xi=\min\ [x, S]$ である．したがつて，(2.1) の期待値は

(2.2) $aS[1-F(S)]+a\int_0^S xdF(x)+a_0$

なぜなら $\int_0^\infty xdF(x)=\int_0^S xdF(x)+\int_S^\infty xdF(x)$，$x$ にたいしては ξ は S に等しいから $\int_S^\infty xdF(x)=\int_S^\infty SdF(x)$ $=S\int_S^\infty dF(x)=S[1-F(S)]$

$b(q)=b_0-bq$ の仮定から S 単位購買するのに費される額は

(2.3) $S(b_0-b_1S)+K,\ b_0>0,\ b_1 \geqslant 0$

と考えられる．また総ストック S は買入れられるものとし，需要をみたすことによつてその期末にはなんらの効用もえられないとする．さらに期間の始めに水準 S にあるストックをその期間維持する費用は

(2.4) const.$+cS$

の形であるとし，後述の "depletion penalty" を考慮しないならば，純期待損失額は次のようになる．

(2.5) const.$+S(c+b_0-b_1S)-aS[1-F(S)]$
$\qquad -a\int_0^S xdF(x)$

depletion penalty を π で表現すれば，それは次のように定義される．$x \leqslant S$ のときみたされない需要はなく $\pi=0$，$x>S$ のとき組織は超過需要 $x-S$ をみたすために $\pi>0$ を払う．こゝで penalty 函数 $\pi=\pi(x-S)$ は既知であるとしておく．

そこで次のような仮定をおく．すなわち，

$\pi=A+B(x-S)$,　　$x>S$ のとき
$\pi=0$,　　$x \leqslant S$ のとき

たゞし A, B は非負の零でない定数である．故に

(2.6)
$$\begin{aligned} E(\pi)&=\int_0^\infty \pi dF(x)=\int_0^S \pi dF(x)+\int_S^\infty \pi dF(x)\\ &=\int_S^\infty \{A+B(x-S)\}dF(x)\\ &=(A-BS)\int_S^\infty dF(x)+B\int_S^\infty xdF(x)\\ &=(A-BS)\ [1-F(S)]+B\int_S^\infty xdF(x). \end{aligned}$$

したがつて期待純損失函数 $L(S)$ は，(2.5)，(2.6) から

$$\begin{aligned} L(S)&=\text{const.}+S(c+b_0-b_1S)-aS[1-F(S)]\\ &\quad -a\int_0^S xdF(x)+(A-BS)[1-F(S)]+B\int_S^\infty xdF\ (x)\\ &=\text{const.}+S(c+b_0-b_1S)+A[1-F(S)]\\ &\quad -(B+a)S[1-F(S)]+B\int_S^\infty xdF(x)-a\int_0^S xdF(x). \end{aligned}$$

ところが

$$\begin{aligned} B\int_S^\infty xdF(x)&=B\int_S^0 xdF(x)+B\int_0^\infty xdF(x)\\ &=-B\int_0^S xdF(x)+B\int_0^\infty xdF(x) \end{aligned}$$

こゝで const. を除くと，

(2.7)
$$\begin{aligned} L(S)&=S(c+b_0-b_1S)+A[1-F(S)]\\ &\quad -(B+a)\,S[1-F(S)]-(B+a)\int_0^S xdF(x), \end{aligned}$$

したがつて最適在庫水準 $S=S^*$ はすべての S にたいして $L(S^*)\leqq L(S)$ なる S^* である．L が $S=0$ においては absolute minimum にならないとすると $dL(S^*)/dS=0$, $d^2L(S^*)/dS^2>0$ から

(2.8) $[c+b_0-2b_1S^*]-Af(S^*)$
$\qquad -(B+a)[1-F(S^*)]=0,$

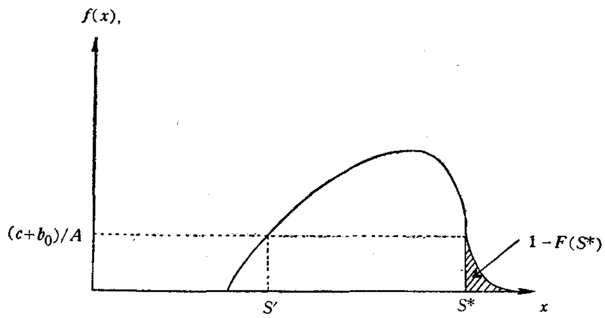
(2.9) $-2b_1-Af'(S^*)+(B+a)f(S^*)>0.$

こゝに $f(x)=dF(x)/dx$. (2.8) の第一項はストック追加分一単位にたいする限界費用にあたり，他の項は限界期待効用に対応する．(2.8) から最適水準 S^* は需要の分布函数 $F(x)$ と，効用および費用のパラメター $(c+b_0)$, b_1, A および $(B+a)$ によつて決定されることが分る．もし大きいロットを購入する場合の経済性が問題にならず，$b_1=0$ で，かつ $B=a=0$ (penalty がみたされない需要に関係なく 0 または A とする）とすれば，(2.8) (2.9) は夫々

(2.10) $f(S^*)=(c+b_0)/A$, $f'(S^*)<0$

となり，最適なストックの水準 S^* は下図のように求められる．

第 2 図



§3. 不確実な場合の動的モデル：問題

商品が離散的な時点 $i\theta_0(i=0, 1, 2, \cdots\cdots, t, \cdots\cdots; \theta_0$ は const.) で reorder されるとし，区間 $(t, t+1)$ にたいする需要を x_t (t は整数) とする．y_t を t 時点における利用可能なストック（たゞしこの時点で到着した補給分は含めない），z_t を t 時点における補給分を含めたストック，q_t を t 時点での注文量，注文と財をうけとる間の輸送時間を τ（整数）とすると，

(3.1) $y_t=\max(z_{t-1}-x_{t-1}, 0)$ $\quad(t=1, 2, \cdots\cdots)$

(3.2) $z_{t+\tau}=y_{t+\tau}+q_t$ $\quad(t=1, 2, \cdots\cdots)$

τ は非負の確率変数であるが，こゝで零とすると，

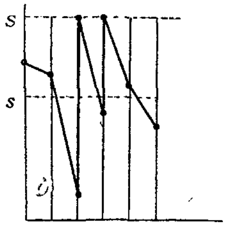
(3.3) $z_t=y_t+q_t$

$S>0$, $s>0$ なる二つの数にたいして次のような行動規則をきめる．

(3.4) $\begin{cases} \text{もし } y_t>s, \text{ ならば } q_t=0 \\ \text{もし } y_t\leqq s \text{ ならば } q_t=S-y_t \end{cases}$

S および s は夫々，最大ストックと reordering point であり，(3.4) は第3図で説明される．

第 3 図



さて次に以下のように仮定しよう．注文費は注文量に独立な変数 K である，depletion penalty $A=$ const.，単位時間ストックを維持するための限界費用は (3.4) におけるように c である．商品の単位当りの購買価格は購入量に独立であり，一単位の限界費用に等しい，（即ち $b_1=0$, $b_0=a$）すなわちオペレーションの効用は貯蔵や注文の費用に関係なく，一定 (a_0) とみなされる．一方，K, c は夫々任意の注文を行う費用ならびに貯蔵の限界費用である．

y_0, S, s を選ぶと，y_t はマルコフ連鎖を形成するのが普通であるが，こゝでは y_t が一定である場合と y_t が確率変数である場合，すなわち条件づきの場合と無条件の場合とにわけて損失函数を考える．

区間 $(t, t+1)$ にたいしてある損失が起るが，その損失の条件づき期待値は y_t の一定値にたいして

(3.5) $l(y_t)=\begin{cases} cy_t+A[1-F(y_t)], \\ \qquad y_t>s \text{ に対して} \\ cS+A[1-F(S)]+K, \\ \qquad y_t\leqq s \text{ に対して} \end{cases}$

当然，

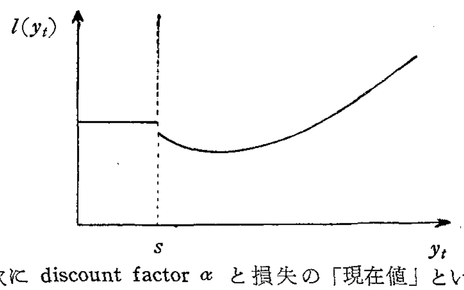
(3.6) $l(0)=l(s)+K$

y_t が確率変数の場合，損失の条件なしの期待値は

(3.7) $l_t=l_t(y_0)$

となる．y_0 は初期のストックの水準．明らかに $l_0(y)=l(y)$.

第 4 図



次に discount factor α と損失の「現在値」という考え方を導入する．y_{t_0} が与えられておれば，区間 (t_0+t, t_0+t+1) に起つた期待損失の t_0 における現在値は (3.5) と (3.7) から $\alpha^tE[l(y_{t_0+t})]=\alpha^tl_t(y_{t_0})$ となる．

こゝで函数：$L(y)=l_0(y)+\alpha l_1(y)+\alpha^2l_2(y)+\cdots\cdots$ を定義すると $L(y_t)$ は区間 $(t, t+1)$ およびすべての後続区間に起つた総期待損失の時点 t における現在値となる．$L(y)$ には当然パラメーター S および s が含まれており，政策決定者は $L(y_0)$ を最小化するようにこれ

らのパラメターを決定するわけである.

y_0 が与えられておれば y_1 の一定値にたいして全期間にわたる総期待損失の現在値は,

(3.8) $l(y_0)+\alpha l(y_1)+\alpha^2 Fy_1[l(y_2)] +\alpha^3 Ey_1[l(y_3)]+\cdots\cdots\cdots\cdots$

たゞし, $Ey_1[l(y_r)]$ は与えられた一定値 y_1 にたいする $l(y_r)$ の条件づき期待値を表わしている. ところが

$$Ey_1[l(y_r)]=l_{r-1}(y_1) \quad (r=1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots)$$

が成立つから, (3.8) は

(3.9)
$$\begin{aligned} & l(y_0)+\alpha l_0(y_1)+\alpha^2 l_1(y_1)+\alpha^3 l_2(y_1)+\cdots\cdots \\ &=l(y_0)+\alpha[l_0(y_1)+\alpha l_1(y_1)+\alpha^2 l_2(y_1)+\cdots\cdots] \\ &=l(y_0)+\alpha L(y_1). \end{aligned}$$

これは全期間にたいする全期待損失の現在値である.

y_1 を確率変数と考えればすべての期間にたいする総期待損失 $L(y_0)$ は (3.9) の期待値をとつて

(3.10) $L(y_0)=l(y_0)+\alpha E[l(y_1)]$

こゝで,

$$\begin{cases} \text{もし } y_0\leqq s \text{ なら, } z_0=S \text{ にして } y_1=\max(S-x_0,\ 0) \\ \text{もし } y_0>s \text{ なら, } z_0=y_0 \text{ にして } y_1=\max(y_0-x_0, 0) \end{cases}$$

とすると,

(3.10′)
$$\begin{cases} E[l(y_1)]=\int_{0^-}^{S} L(S-x)dF(x) \\ \qquad +L(0)\,[1-F(S)],\ (y_0\leqq s) \\ E[l(y_1)]=\int_{0^-}^{y} L(y_0-x)dF(x) \\ \qquad +L(0)\,[1-F(y_0)],\ (y_0>s) \end{cases}$$

(3.10) において $y_0=y$ とし, さらに (3.10′) を代入すると

(3.11) $L(y)=l(y)+\alpha\int_{0^-}^{S} L(S-x)dF(x) +\alpha L(0)[1-F(S)],\ (y\leqq s)$

(3.12) $L(y)=l(y)+\alpha\int_{0^-}^{y} L(y-x)dF(x) +\alpha L(0)[1-F(S)],\ (y>s)$

かくして, 問題は (3.11), (3.12) を満足する函数を見出して, $L(y_0)$ を S, s について最小化することになる. (たゞし $F(x)$ が $x=0$ で不連続となる可能性にたいして, Stieltjes 積分 $\int_{0^-}^{(\ )}(\quad)\,dF(x)$ が下限 0^- をもつものとする)

§4. 動的モデル：解法

さて, $F(x)$ が負の値をとらないことが仮定される. $0\leqq y\leqq s$ にたいして, $l(y)$, したがつて $L(y)$ は y に依存しないから (3.11) 式は次式と同値である.

(4.1) $L(0)=l(0)+\alpha\int_0^S L(S-x)dF(x)+\alpha L(0)\,[1-F(S)]$

(3.12) において $y=S$ とすると

(4.2) $L(S)=l(S)+\alpha\int_0^S L(S-x)dF(x)+\alpha L(0)[1-F(S)]$

(4.1) から (4.2) をひくと (3.6) から

(4.3) $L(0)-L(S)=l(0)-l(S)=K$

すなわち,初期ストックが0であれば注文費 K で S を直ちに注文しうる. (3.12) の右辺にたいしては次の代入を行う.

(4.4) $\int_0^y L(y-x)\,dF(x)=\int_0^{y-s} L(y-x)\,dF(x)+L(0)\int_{y-s}^{y} dF(x)$

$0\leqq y-x\leqq s$ にたいしては $L(y-x)=L(0)$ だからである. 同時に変数変換:

(4.5)
$$\begin{aligned} & y-s=\eta \\ & L(y)=L(\eta+s)=\lambda(\eta) \end{aligned}$$

を行うと (3.12) は

(4.6) $\lambda(\eta)=l(\eta+s)+\alpha L(0)\,[1-F(\eta)]+\alpha\int_0^{\eta}\lambda(\eta-x)dF(x),\ (\eta>0)$

こゝで $F(x)$ の convolution としての分布函数 $F_n(x)$, $(n=1,\ 2,\cdots\cdots)$ を次のように定義する.

(4.7)
$$\begin{cases} F_1(x)=F(x) \\ F_{n+1}(x)=\int_0^x F_n(x-u)dF(u) \end{cases}$$

函数 $H_\alpha(x)$:

(4.8) $H_\alpha(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n F_n(x),\quad 0\leqq\alpha\leqq 1$

を定義すれば, $0\leqq\alpha\leqq 1$ にたいして, この級数が収斂することは明らかである.

(4.9) $R(\eta)=l(\eta+s)+\alpha L(0)[1-F(\eta)]$

とすれば (4.6) の解は

(4.10) $\lambda(\eta)=R(\eta)+\int_0^{\eta}R(\eta-x)dH_\alpha(x)=R(\eta)+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\int_0^{n}R(\eta-x)dF_n(x)$

すなわち

(4.11) $L(y)=L(y)+\alpha L(0)[1-F(y-s)]+\int_0^{y-s}\{l(y-x+s)+\alpha(0)[1-F(\eta-x)]\}dH_\alpha(x)$

$$=l(y)+\alpha l(0)[1-F(y-s)]+\int_0^{y-s}\{l(y-x)+\alpha L(0)[1-F(y-x-s)]\}dH_\alpha(x),\quad (y>s)$$

(4.3), (4.11) より

(4.12) $L(0)-K=l(s)+\int_0^{S-s}l(S-x)dH_\alpha(x)+\alpha L(0)\{1-F(S-s)+\int_0^{S-s}[1-F(S-s-x)]dH_\alpha(x)\}$

$L(0)$ は未知であるが，$\alpha>1$ なる限りその係数は零でないから(4.12)を $L(0)$ について解くことができる．$L(0)$ の係数は

(4.13) $1-\alpha\{1-F(S-s)+\int_0^{S-s}F(S-s-x)\,dH_\alpha(x)\}=1-\alpha\{1-F(S-s)+H_\alpha(S-s)$

$$-\int_0^{S-s}F(S-s-x)dH_\alpha(x)\}=1-\alpha\{1-F(S-s)+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n F_n(S-s)-\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\int_0^{S-s}F(S-s-x)dF_n(x)\}$$

$$=1-\alpha\{1-F(S-s)+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n F_n(S-s)-\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n F_{n+1}(S-s)\}=1-\alpha-\alpha H_\alpha+(S-s)\alpha\{F(S-s)+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n F_{n+1}(S-s)\}$$

$$=1-\alpha-\alpha H_\alpha(S-s)+H_\alpha(S-s)=(1-\alpha)[1+H_\alpha(S-s)]$$

かくして

(4.14) $$L(0)=\frac{K+l(S)+\int_0^{S-s}l(S-x)dH_\alpha(x)}{(1-\alpha)[1+H_\alpha(S-s)]}$$

これで (4.11) の $L(y)$ が求められるから，次には初期ストック y_0 にたいする $L(y_0)$ を最小にするような s および S の値を求めねばならない．しかしこゝでは $y_0=0$ の場合，すなわち $L(0)$ の最小化だけを考える．

こゝで確率密度 $f(x)$ について $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ を考えると (3.5) から $l(y)$ は$y>s$ にたいして $l(y)=A[1-F(y)]+cy$ で与えられる．

（イ） $S-s=$ 一定のとき：$L(0)[(4.14)]$ が $S-s=S(s=0)$ のとき最小にならないとすると，上の $l(y)$ の条件から $L(0)$ の最小化の条件は次の二つとなる．

(4.15) $c-Af(S)+\int_0^{S-s}[c-Af(S-x)]dH_\alpha(x)=0$

(4.16) $-Af'(S)-\int_0^{S-s}Af'(S-x)dH_\alpha(x)>0,$

$$\because\quad K+l(s)+\int_0^{S-s}l(S-x)dH_\alpha(x)=K+A[1-F(s)]+cs+\int_0^{S-s}\{A[1-F(S-x)]+c(S-s)\}dH_\alpha(x)$$

微分すると $-Af(s)+c+\int_0^{S-s}[c-Af(S-x)]dH_\alpha(x).$

（ロ） $S-s\neq$ 一定のとき：与えられた y_0 にたいして最小に（この場合 $y_0=0$）$L(y_0)$ をする S および s の値を $S^*(y_0)$ および $s^*(y_0)$ で表わそう．また $0<s^*<S^*$ としよう．とすれば問題は (4.14) の $S-s$ にかんする導函数を零とし，さらに第二次の条件を考えることとなる．

$$L'(0)=\frac{[l(S-x)h_\alpha(x)]_0^{S-s}(1-\alpha)[1+H_\alpha(S-s)]-\{K+l(S)+\int_0^{S-s}l(S-x)dH_\alpha(x)\}(1-\alpha)h_\alpha(S-s)}{(1-\alpha)^2[1+H_\alpha(S-s)]^2}=0,$$

たゞし $H_\alpha(x)=\int_0^x h_\alpha(t)dt$, こゝで S は一定，s は可変とする．

$$\therefore\quad l(s)h_\alpha(S-s)(1-\alpha)[1+H_\alpha(S-s)]-\{K+l(S)+\int_0^{S-s}l(S-x)dH_\alpha(x)\}(1-\alpha)h_\alpha(S-s)=0,$$

$$\therefore\quad l(s)[1+H_\alpha(S-s)]-\{K+l(S)+\int_0^{S-s}l(S-x)dH_\alpha(x)\}=K+\int_0^{S-s}l(S-x)dH_\alpha(x)+l(S)$$

$$=K+\int_0^{S-s}l(S-x)h_\alpha(x)dx+l(S)=K+[H_\alpha(x)l(S-x)]_0^{S-s}-\int_0^{S-s}H_\alpha(x)[c-Af(S-x)]dx+l(S)$$

$$(\because l(y)=A[1-F(y)]+cy)$$

$$\therefore\quad l(s)[1+H_\alpha(S-s)]=K+l(S)+[H_\alpha(S-s)l(s)]-\int_0^{S-s}H_\alpha(x)[c-Af(S-x)]dx=0$$

$$\therefore\quad l(s)-l(S)=K-\int_0^{S-s}H_\alpha(x)[c-Af(S-x)]dx$$

故に

(4.17) $A[F(S)-F(s)]=c(S-s)+K-\int_0^{S-s}[c-Af(S-x)]H_\alpha(x)dx.$

この条件から (4.14) の最小化の数値解がえられると予想することができる．

これまで α は任意のパラメターと考えてきたが，こゝで $\alpha\to1$ とすると $L(0)\to\infty$ となることは明らかである．そこで $(1-\alpha)L(0)$ の有限な極値を求めることが必要である．y_t および l_t（区間 $(t_1\ t+1)$ にたいする期待損失）が $t\to\infty$ のとき y_t に独立な極限分布 y_∞, l_∞ をもつと仮定する．

$L(0)=l_0(0)+\alpha l_1(0)+\alpha^2 l_2(0)+\cdots\cdots$ で，$t\to\infty$ のとき $l_t(0)\to l_\infty$ なる故，

(4.18) $L(0)(1-\alpha)=l_0(0)+\alpha[l_1(0)-l_0(0)]+\alpha^2[l_2(0)-l_1(0)]+\cdots\cdots\cdots$

$$\therefore\ \lim_{\alpha\to1} L(0)(1-\alpha)=l_\infty \quad (\because l_0(0)+[l_1(0)-l_0(0)]+[l_2(0)-l_1(0)]+\cdots\cdots\cdots\cdots\to l_\infty)$$

よつて (4.14) から

(4.19) $$l_\infty=\frac{K+l(S)+\int_0^{S-s} l(S-x)dH(x)}{1+H(S-s)}$$

たゞし $H(x)=\lim\limits_{\alpha\to1} H_\alpha(x)=\lim\limits_{\alpha\to1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha^n F_n(x)=\lim\limits_{\alpha\to1}\{\alpha F_1(x)+\alpha^2F_2(x)+\cdots\cdots\cdots\}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}F_n(x)$

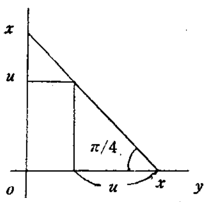
このようにして，目的は y_0 に独立な l_∞ の最小化ということになる．

§5. 動的モデル：例

函数 $F(x)$ が次の形をもつているものと仮定しよう．

(5.1) $$F(x)=\frac{\beta^k}{(k-1)!}\int_0^x u^{k-1}e^{-\beta u}du,\quad k>0,\quad \beta>0$$

$$F_2(x)=\int_0^x F(x-u)dF(u)=\left\{\frac{\beta^k}{(k-1)!}\right\}^2\int_0^x\int_0^{x-u} y^{k-1}e^{-\beta y}dy u^{k-1}e^{-\beta u}du$$



$$\left(\begin{array}{ll} y+u=z \text{ とおくと} & y:0\to x-u \\ & z:u\to x \end{array}\right)$$

$$=\frac{\beta^{2k}}{\{\Gamma(k)\}^2}\int_0^x\int_u^x(z-u)^{k-1}e^{-\beta z}u^{k-1}dzdu$$

$$(z:u\to x \quad u:0\to z)$$

$$=\frac{\beta^{2k}}{\{\Gamma(k)\}^2}\int_0^x e^{-\beta z}\int_0^z(z-u)^{k-1}dudz$$

$$=\frac{\beta^{2k}}{\{\Gamma(k)\}^2}\int_0^x e^{-\beta z}\int_0^z z^{2k-2}\left(1-\frac{u}{z}\right)^{k-1}\left(\frac{u}{z}\right)^{k-1}dudz$$

$$=\frac{\beta^{2k}}{\{\Gamma(k)\}^2}\int_0^x e^{-\beta z}\int_0^z z^{2k-1}\left(1-\frac{u}{z}\right)^{k-1}\left(\frac{u}{z}\right)^{k-1}d\left(\frac{u}{z}\right)dz$$

（ところで $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ なる故）

$$=\frac{\beta^{2k}}{\{\Gamma(k)\}^2}\int_0^x e^{-\beta z}z^{2k-1}B(k,k)dz=\frac{\beta^{2k}}{\{\Gamma(k)\}^2}\int_0^x e^{-\beta z}z^{2k-1}\frac{\{\Gamma(k)\}^2}{\Gamma(2k)}dz$$

$$=\frac{\beta^{2k}}{\Gamma(2k)}\int_0^x e^{-\beta z}z^{2k-1}dz=\frac{\beta^{2k}}{(2k-1)!}\int_0^x e^{-\beta z}z^{2k-1}dz$$

一般に $F_n(x)=\dfrac{\beta^{nk}}{(nk-1)!}\displaystyle\int_0^x e^{-\beta z}z^{nk-1}dz,$

したがつて

(5.2) $$H_\alpha(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n F_n(x)=\int_0^x e^{-\beta u}\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^{nk}\alpha^n u^{nk-1}}{(nk-1)!}\}du,$$

こゝで k を整数とし，ω_i $(i=1,\cdots\cdots\cdots\cdots,k)$ を 1 の k 乗根とすると，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^{nk}\alpha^n u^{nk-1}}{(nk-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\beta u)^{nk-1}}{(nk-1)!}\alpha^n\cdot\beta=\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\beta u)^{nk-1}}{(nk-1)!}\cdot\alpha^n=\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\beta u)^{nk-1}}{(nk-1)!}\cdot\alpha^{\frac{nk-1}{k}}\cdot\alpha^{1/k}$$

$$=\beta\alpha^{1/k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\beta u)^{nk-1}}{(nk-1)!}\cdot(\alpha^{1/k})^{nk-1}=\beta\alpha^{1/k}\left\{\frac{(\beta u\alpha^{1/k})^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{(\alpha^{1/k}\beta u)^{2k-1}}{(2k-1)!}+\cdots\cdots\cdots\right\}$$

$$\left(\text{明らかに } e^{\beta u\alpha^{1/k}}=\sum_{nk=1}^{\infty}\frac{(\beta u\alpha^{1/k})^{nk-1}}{(nk-1)!},\ \omega_j{}^k=1 \text{ から } \sum_{j=1}^{k}\omega_j{}^{nk}=k \text{ なる故}\right)$$

$$H_\alpha(x)=\int_0^x e^{-\beta u}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^{nk}\alpha^n u^{nk-1}}{(nk-1)!}\right\}du=\frac{\beta\alpha^{1/k}}{k}\sum_{j=1}^{k}\omega_j{}^{nk}\int_0^x e^{-\beta u}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\beta u\alpha^{1/k})^{nk-1}}{(nk-1)!}\right\}du$$

$$=\frac{\beta\alpha^{1/k}}{k}\int_0^x\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\beta u}\cdot\frac{(\alpha^{1/k}\beta u)^{nk-1}\omega_j{}^{nk}}{(nk-1)!}du=\frac{\beta\alpha^{1/k}}{k}\int_0^x e^{-\beta u}\sum_j\omega_j e^{\omega_j\alpha^{1/k}\beta u}\cdot e^{-\omega_j\alpha^{1/k}\beta u}\cdot$$

$$\sum_{nk=1}^{\infty}\frac{(\omega_j\alpha^{1/k}\beta u)^{nk-1}}{(nk-1)!}du=\frac{\beta\alpha^{1/k}}{k}\int_0^x e^{-\beta u}\sum_j\omega_j e^{\omega_j\alpha^{1/k}\beta u}\left\{\sum_{nk=1}^{\infty}\frac{(\omega_j\alpha^{1/k}\beta u)^{nk-1}}{(nk-1)!}\cdot e^{-\omega_j\alpha^{1/k}\beta u}\right\}du$$

$$=\frac{\beta\alpha^{1/k}}{k}\int_0^x e^{-\beta u}\sum_j\omega_j e^{\omega_j\alpha^{1/k}\beta u}\,du$$

故に

$$(5.3)\quad H_\alpha(x)=\beta\frac{\alpha^{1/k}}{k}\int_0^x e^{-\beta u}\left(\sum_{j=1}^{k}\omega_j e^{\omega_j \alpha^{1/k}\beta u}\right)du$$

$f(x)=e^{-x}$ とすれば $\beta=k=1,\ F=1-e^{-x}$ より

$$H(x)=\int_0^x e^{-u}(e^u)du=x,$$

よつて

$$l_\infty=\frac{K+l(S)+\int_0^{S-s}l(S-x)dx}{1+S-s}=\frac{K+cS+Ae^{-S}+\int_0^{S-s}[c(S-x)+Ae^{-S+x}]dx}{1+S-s}=\frac{K+cS+Ae^{-S}+\frac{c}{2}(S^2-s^2)}{1+S-s}$$

$S-s=\varDelta$ として S を求めると ($l_\infty\rightarrow$ 最小化) 簡単な計算で次の解をうる.

$$S=\log_e(A/c)-\log_e(1+\varDelta)-\varDelta$$

大体以上のような方法が Marschak らの論文の要旨であるが, 問題をさらにこの方法で展開してゆくためには, 第一に $a,\ b_0,\ b_1,\ B$ というような, この論文で省略された係数をどういうように評価するかが問題である. また第二には, こゝでは単位期間について既知とされている需要函数 $F(x)$ の観測につれて, (時点 t における) S および s は, S_t ($x_1,\cdots\cdots,x_t$) および S_t ($x_1,\cdots\cdots,x_t$) というような表現をとるかもしれない. 最適注文量も q_t ($x_1,\cdots\cdots,x_t$) のような函数となるであろうから, 損失函数の構成が難しくなり, 問題の複雑化が予想されるのである.

有界変数の問題について

小　林　和　夫*

線型計画の問題は, 一般にシンプレックス・タブローを用いて解いて行くのであるから, タブロー上の計算に要する労力を可能な限り少くするために努力が払われ, この点を中心とする計算上の理論が展開されて来たのは当然のことであろう. 以下に紹介する理論及び計算手続もその一つであり, A. Charnes 及び C. E. Lemke による Computational Theory of Linear Programmin I. (The "Bounded Variables" Problem) である.

所で, 線型計画の問題においては, 生産物の販売可能量についての市場制限や, 生産技術上の制約から, 或は在庫管理上の政策, 更に生産量, 引渡し量についての要請等々から, 各プロセスの用いうる水準に関して, 上限, 下限が存在する如き場合に往々直面する. この種の条件を含む問題は, タブローの規模が大きくなることをいとわない限り, 勿論, 従来用いられて来たシンプレックス・タブローによつて解くことが出来る. しかしながら, 問題に含まれる変数—プロセスの水準—の多くに亘つて, この種の条件が課せられる場合, 従来の手法に従うと, 徒らにタブローの規模を大きくする許りである. A. Charnes 及び, C. E. Lemke の理論によつて, この種の問題を, かゝる条件が課せられてない問題を解く場合に必要な規模のタブローによつて, 解くことが可能となつた. 以下において先ず問題を定式化し, 次いでタブローの構成, 計算手続, 及び実際の計算例の順に従つて, このことを示してみよう.

* 大阪大学経済学部統計学研究室

問題の定式化

最初に次の問題を考える.

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n-m}a_{ij}\lambda_j\leqq s_i && i=1,\cdots,m,\\ &\text{且つ }\lambda_j\geqq 0 && j=1,\cdots,n-m,\end{aligned}$$

の下で

$$z_0=\sum_{j=1}^{n-m}\lambda_j c_j=\max.$$

シンプレックス法によつて, この問題を解く場合, 勿論 m 個のスラック変数 $\lambda_j(j=n-m+1,\cdots,n)$ を導入して等式にするのであるが, こゝで, スラック変数を除いた変数 $\lambda_j(j=1,\cdots,n-m)$ に関して有界, 即ち $a_j\leqq\lambda_j\leqq b_j$ なる条件が課せられたものとする. この条件は勿論, $0\leqq\lambda_j'\leqq b_j'$ の形に容易に改め得るが, 更にこれは, $\lambda_j'+x_j'=b_j'$ 且つ $\lambda_j',x_j'\geqq 0$ なる形の条件として表わし得る. 所でスラック変数についても, 適当に上限を附けることが出来るから, 有界変数の問題を次の形で定式化しよう.

$$\text{(II)}\quad \begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\lambda_j=s_i && i=1,\cdots,m,\\ &\lambda_j+x_j=b_j && j=1,\cdots,n,\\ &\text{且つ }\lambda_j,\ x_j\geqq 0\end{aligned}$$

の下で

$$z_0=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j c_j=\max.$$

問題 (II) は $(m+n)$ 個の条件式と, $2n$ 個の変数から成る問題であり, この問題は, 従来の手法に従うと $(m+n)\times 2n$ の規模のタブローを必要とする. A. Charnes 及び C. E. Lemke の理論に従つて, これを $m\times n$ の規模のタブローで解き得ることを以下に示すのであるが,