講 座　シンプレックス・タブローの構成について

大阪大学経済学部統計学研究室

シンプレックス・タブローは線型計画の問題の数値解の一般的な導出の方法としてよく知られているが，このタブローは，単なる数学的な計算方式を与えるためのものというよりも，むしろそこに算出される一つ一つの記入値が具体的な意味を有する如くに構成されているという点において，極めてすぐれたものであると言うことができよう．今特定の生産計画の問題について，その構成を見，それによつて併せて計算の基準を具体的に意味づけてゆくことにしよう[1]．

ある企業において，A, B, C なる3種の製品を，共通な生産要素，即ち労働者，原料及び機械を用いて生産しているものとする．今これらの製品を生産するために要する各生産要素の量，1日の生産可能量，製品の販売価格，及び生産要素の費用は，第1表に示されている如きものであるとする．ここに労働者は熟練労働者と未熟練労働者とを区別して別個の生産要素と見做し，又 A_1, A_2 はいずれも製品 A を生産する過程であるが，A_2 は熟練労働者を用いざる，より能率の低い生産過程を表わし，A_1 と区別されて一つの過程を構成している．線型計画の問題としては，これらの生産過程（プロセス）において，生産要素の使用可能量が，第1表の最右欄に示されている如き制限を受けているとした場合，利潤を最大ならしめる如き各製品の生産量，即ち各生産過程の使用水準（あるいは生産要素の配分）は如何という形で定式化される．即ち先ず第1表に示される，各プロセスにおいて必要とされる生産要素の量を，生産個数1個当りの数値（いわゆる生産係数）に直し，又求めようとする A_1, A_2, B, 及び C の生産量をそれぞれ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ で表わし，又制限の不等式を等式にするために更に λ_5, λ_6, λ_7 なる変数を導入すれば，われわれは，制限条件式として，$\lambda_i \geqq 0$, $i=1, 2, \cdots, 7$ 及び

$$
\begin{cases}
\frac{1}{4}\lambda_1 + \frac{6}{17}\lambda_4 + \lambda_5 = 10 \\
\frac{1}{10}\lambda_1 + \frac{2}{17}\lambda_2 + \frac{5}{17}\lambda_4 + \lambda_6 = 8 \\
\frac{3}{20}\lambda_1 + \frac{3}{17}\lambda_2 + \frac{1}{4}\lambda_3 + \frac{1}{17}\lambda_4 + \lambda_7 = 15
\end{cases}
\quad \cdots(1)
$$

をうる．一方最大ならしめるべき利潤函数は第1表の製品販売価格及び生産要素の費用から，各製品の単位当り利潤を求めることができ，それから，

$$
z_0 = 15\lambda_1 + \frac{200}{17}\lambda_2 + 10\lambda_3 + \frac{250}{17}\lambda_4 \quad \cdots(2)
$$

をうる．さて，シンプレックス法と呼ばれるこの問題の解法は，(1) 式を満足する非負の λ_i の値の組を次々に求めてゆき，その場合，ある解の組から次の解の組へと進む場合に，必らず利潤 z_0 が増加する如き方法で進み，最後に z_0 を最大ならしめる如き解の組に到達するという手続からなつている．このような (1) 式を満足する非負の λ_i の値の組をわれわれは許容解（あるいは実行可能解(feasible solution) と呼ぶ．しかしこれらの許容解の中，単体法では特に基底解 (basic solution) と呼ばれるものを問題にする．それは，(1) 式を満足する解が存在する時には何時でも基底解が存在し，しかもこの基底解において目的函数が最大な値をとるという性質があるためである．基底解とは，(1) の方程式体系に含まれる変数の中，丁度方程式の数に等しいものだけが正で，残りはすべて0であるような解をいう．(1) 式で，$\lambda_3=8$, $\lambda_5=10$, $\lambda_6=8$, $\lambda_7=13$ λ_1, λ_2, λ_4 $=0$ は一つの許容解であるが基底解ではない．

第　1　表

生産要素＼生産過程		A_1	A_2	B	C	生産要素一単位当り価格（円）	一日当り使用可能な最大単位量
労働力	熟練労働者（人）	5			6	400	10
	未熟練労働者（人）	4	10	10	2	250	制限なし
機械 M（台）		2	2		5	200	8
原料 F（単位）		3	3	5	1	100	15
1日当り生産個数		20	17	20	17		
製品の単位当り販売価格（円）		200	200	160	250		

1) 本講座はさきに大沢豊・津田瑶子："Simplex Tableau について"（大阪大学経済学，第3巻，第3号）として発表されたものを，編輯幹事の要望により，加筆訂正したものである．

次に A_1, A_2, B, C を生産する生産過程をそれぞれ，P_1, P_2, P_3, P_4 で示すことにしよう．すると λ_1 が例えば8という値をとるということは，P_1 という生産過程を，8単位の水準で活動させることによつて，A_1 を8単位生産することを意味する．一方 λ_5, λ_6, λ_7 に対しても同じように P_5, P_6, P_7 というプロセスを考えることが出来る．これらは具体的にある製品を生産するということではないが，例えば P_5 というプロセスをある水準で活動させるということは，熟練労働者をその単位だけ生産に参加させないで残しておくという活動を意味するものと解することが可能である．このようなプロセスは処分過程（disposal process）と呼ばれる．

さて制限式体系の中にかかる処分過程が含まれている場合には，われわれはその制限式体系に対する一つの基底解を求めることは容易である．即ち，(1) 式に含まれる処分過程 P_5, P_6, P_7 をそれぞれ10, 8, 15単位ずつのレベルで使用するという活動は明らかに一つの基底解である．即ち，熟練労働者を10人，機械を8台，原料を15単位，使用しないままに残しておくという一つの生産活動を行えば，最初の制限条件は満されているわけである．かくしてわれわれはこの基底解，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$, $\lambda_5=10$, $\lambda_6=8$, $\lambda_7=15$ を出発点としてシンプレックス・タブローを構成することができる．

シンプレックス・タブローの第I段階は第2表に示されている．この表の構成を考えることにしよう．まず

第　2　表

$c_j \longrightarrow$						15	200/17	10	250/17
↓	ベクトル	P_0	P_5	P_6	P_6	P_1	P_2	P_3	P_4
$\boldsymbol{c}_5$	$\boldsymbol{P}_5$	10	1			$\frac{1}{4}$			$\frac{6}{17}$
$\boldsymbol{c}_6$	$\boldsymbol{P}_6$	8		1		$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{17}$		$\frac{5}{17}$
$\boldsymbol{c}_7$	$\boldsymbol{P}_7$	15			1	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{17}$
	z_j								
	z_j-c_j					-15	$-\frac{200}{17}$	-10	$-\frac{250}{17}$

「ベクトル」と記入された欄の下には，今生産に使用されている過程，即ち $\boldsymbol{P}_5$, $\boldsymbol{P}_6$, $\boldsymbol{P}_7$ が記入される．今の問題では条件式は3つであるから，ここには常に3つのプロセスが表われることになる．一方「ベクトル」と記入された欄の右には，最初に P_0 と記入される．P_0 は各生産要素の使用可能な量を示すものである．そしてその下の記入値，10, 8, 15は，それぞれ現在生産に使用されているプロセスの活動水準を示す値を表わしている．数学的にはこのことは，P_0 というベクトルがこれら三つの基底に含まれるベクトル，$\boldsymbol{P}_5$, $\boldsymbol{P}_6$, $\boldsymbol{P}_7$ の線型結合として表現するための係数を，即ち $P_0=10\boldsymbol{P}_5+8\boldsymbol{P}_6+15\boldsymbol{P}_7$ なる関係のあることを示しているが，より具体的には，$\boldsymbol{P}_5$, $\boldsymbol{P}_6$, $\boldsymbol{P}_7$ という三つのプロセスをそれぞれの水準で使用することによつて，与えられているだけの生産要素がちようど一杯に使われて残りがないこと，即ち，$\lambda_5=10$, $\lambda_6=8$, $\lambda_7=15$ が (1) 式の条件を満足する一つの解であることを意味しているわけである．さて P_0 の右には通常先ず出発点の基底解を構成する三つのプロセスを示す P_5, P_6, P_7 が，次いでこの問題に含まれるすべてのプロセスを示す P_1, P_2, P_3, P_4 が順次記入される．ここにわれわれはこれら7つの可能を生産過程の中から，現在は出発点として，$\boldsymbol{P}_5$, $\boldsymbol{P}_6$, $\boldsymbol{P}_6$ という三つの生産過程を選び出して生産を行つているのであるということを想起しておきたい．

次にこれらの欄の下3行の記入値を求めよう．これらの各欄はいずれもプロセスの生産要素間の物理的な関係を示している．今 P_1 の欄についてみよう．P_1 というプロセスは現在の生産に加わつていない．そこでもし P_1 というプロセスを生産に加えることにすれば各生産要素を一定の割合で必要とする．ところが現在は $\boldsymbol{P}_5$, $\boldsymbol{P}_6$, $\boldsymbol{P}_7$ のプロセスが生産に使用されていて原料に余分はない．もし P_1 というプロセスを1単位の水準で生産活動に加わらしめるとすれば，それに要する生産要素は，現在使用されているプロセスの生産を一部中止することによつてしか生み出すことは出来ない．P_1 の1単位の水準での使用に要する生産要素は，(1) 式から明らかな如く，熟練労働者1/4人，機械1/10台，原料3/20単位である．これらの生産要素の量は，$\boldsymbol{P}_5$ を1/4単位，$\boldsymbol{P}_6$ を1/10単位，$\boldsymbol{P}_7$ を3/20単位の水準で生産を中止することによつて出てくるものと丁度等しいわけである．P_1 の下の記入値はこのような意味を示している．

他の生産過程についても全く同様であり，又特に現に生産に使用されているそれについては，第2表に見られる如く，自らと同一のものがあるので，そこに1が表われ，他の行は皆0となる．表中には0は省略されて空欄となつている．これらの記入値は，数学的には $\boldsymbol{P}_0$ の欄と同じく，基底ベクトル $\boldsymbol{P}_5$, $\boldsymbol{P}_6$, $\boldsymbol{P}_7$ によつて各ベクトル P_j を表現するための係数を示している．この例の如く処分過程が最初の基底解として用いられる場合には，これらの係数は最初の各プロセス1単位を生産するに要する生産要素の量そのものとして自働的に記入すればよいことになる．

以上の各行の下に第2表には更に z_j と z_j-c_j の2行が与えられている．この2行は上の各行が生産要素間の物理的な関係を示しているのに対して，各生産過程を使用することに対する利潤に関する情報を与えるものである．それに先立ち，左上隅の c_j に対応して，その欄の右側及び下に，それぞれの P_j に対応する単位利潤が記入される．P_1 の上の15は P_1 というプロセスを1単位生産することによつて得られる利潤を示す．$\boldsymbol{P}_5, \boldsymbol{P}_6, \boldsymbol{P}_7$ は何れも処分活動であるので，それからは利潤は生れず，0となつている．今説明の便宜上，これらの単位利潤を $\boldsymbol{c}_5, \boldsymbol{c}_6, \boldsymbol{c}_7$ で示しておこう．

第　3　表

	c_j → ↓						15	$\frac{200}{17}$	10	$\frac{250}{17}$
		ベクトル	P_0	P_5	P_6	P_7	P_1	P_2	P_3	P_4
I	←	P_5	10	1			$\frac{1}{4}$			$\frac{6}{17}$
		P_6	8		1		$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{17}$		$\frac{5}{17}$
		P_7	15			1	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{17}$
		z_j								
		z_j-c_j					-15	$-\frac{200}{17}$	-10	$-\frac{250}{17}$
II	→ 15	P_1	40	4			1			$\frac{24}{17}$
	←	P_6	4	$-\frac{2}{5}$	1			$\frac{2}{17}$		$\frac{26}{170}$
		P_7	9	$-\frac{3}{5}$		1		$\frac{3}{17}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{26}{170}$
		z_j-c_j	600	60				$-\frac{200}{17}$	-10	$\frac{110}{17}$
III	15	P_1	40	4			1			$\frac{24}{17}$
	→ $\frac{200}{17}$	P_2	34	$-\frac{17}{5}$	$\frac{17}{2}$			1		$\frac{13}{10}$
	←	P_7	3		$-\frac{3}{2}$	1			$\frac{1}{4}$	$-\frac{65}{170}$
		z_j-c_j	1000	20	100				-10	$\frac{370}{17}$
IV	15	P_1	40	4			1			$\frac{24}{17}$
	$\frac{200}{17}$	P_2	34	$-\frac{17}{5}$	$\frac{17}{2}$			1		$\frac{13}{10}$
	→ 10	P_3	12		-6	4			1	$-\frac{26}{17}$
		z_j-c_j	1120	20	40	40				$\frac{110}{17}$

z_j の欄は，その欄の上の各記入値，（これを x_{ij} で示そう）の各々に，その行の左端にある $\boldsymbol{c}_j$ の値を乗じ，その結果を縦に加えたものとして定義される．即ち $z_j=\sum_{i=5}^{7}\boldsymbol{c}_i x_{ij}$ である．例えば $z_1=\frac{1}{4}\boldsymbol{c}_5+\frac{1}{10}\boldsymbol{c}_6+\frac{3}{20}\boldsymbol{c}_7=0$ となる．これらの値からその一番上に記入されている c_j を減じたものが z_j-c_j である．例えば $z_1-c_1=0-15=-15$ である．上に見てきた如く，P_1 は現在生産に使用されていないプロセスである．そしてもし P_1 を1単位の水準で使用するためには，$\boldsymbol{P}_5, \boldsymbol{P}_6, \boldsymbol{P}_7$ をそれぞれ，¼，1/10，3/20単位ずつの水準だけ生産を中止せねばならない．これらの現在用いられているプロセスは，それぞれ1単位当り，$\boldsymbol{c}_5, \boldsymbol{c}_6, \boldsymbol{c}_7$ の利潤を生み出すものと考えられる．従つて，z_1 の値は，P_1 を1単位新たに生産活動に加えるために，現在行われている生産を中止せねばならず，そのために惹起される現在得られている利潤の喪失分を表わしている．一方 c_1 は P_1 を1単位生産することによつて得られる利潤である．かくして z_1-c_1 は P_1 を一単位生産するとした場合，生産要素間の相互依然関係を考慮した上での，現在得られている利潤からの喪失分と，新たに加わる利潤増加分との大小関係を示すことになる．もしこの値が正であれば，現在使用されていないプロセス P_1 を新たに生産に加えることによつて，全体として利潤の純増加が見られず，むしろ現在よりも利潤が少くなることを意味し，又この例の如く，これが負であれば，P_1 を1単位生産する毎に z_1-c_1 の絶対値の大きさずつ純利潤が増してゆくことを意味する．

P_0 の下の z_0 は明らかに今のプログラムによつて得られる総利潤（この場合は0）を示している．

以上で第I段階の記入は完了した．ここでもしすべての j について $z_j-c_j \geqq 0$ であれば，上の考察から明らかな如く，現在採用されている生産過程の組合せをこれ以上改訂することによつて，より多くの利潤を求めることができないこと，即ち現在の組合せが利潤最大の解を与えることになる．しかしながらここでは未だ $z_j-c_j<0$ なる j がいくつか存在する．そこで現在の組合せから，この値が負なるプロセスを新たに導入した新しい組合せへと移行することによつて，尚利潤を増加せしめる余地のあることが判る．このプロセスの入れ換えは常に一つずつ行われる．

今 $z_j-c_j<0$ なるある j を選ぶ．この場合これが負

を示すものならどれでもよいが，その絶対値の最も大きいものを選ぶということが一応の目安となろう．そこで今 P_1 を新たに生産に参加せしめることにする．そこで P_1 の列の x_{i1} の中で正の値のみを考えて，それをその対応する行の λ_i の値を割る．即ち $10\Big/\frac{1}{4}=40$, $8\Big/\frac{1}{10}=80$, $15\Big/\frac{3}{20}=100$ が得られる．これらの数値は，今 P_1 を生産するとした場合，最大限どれだけの量の水準まで，現に使用されているプロセスを P_1 のために中止しうることが出来るかを示している．ところで λ_i の値は負になることができない．もし今 $\boldsymbol{P}_6$ を80単位の水準まで生産を中止するとすれば，P_1 を80単位生産出来るかというに，$\boldsymbol{P}_5$ からは，生産要素（この場合は熟練労働者）が P_1 を40単位の水準で使用するだけしか提供されえないので，そのような生産は不可能である．そこで $\lambda_i/x_{ik}=\min$ なる如きところ，即ち $\boldsymbol{P}_5$ の10単位まで，換言すれば P_1 は40単位までしか生産水準を増すことが出来ない．かくして次の段階では，われわれは $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_6, \boldsymbol{P}_7$ というプロセスの組合せを持つことになる．ここで x_{ik} の中で正のもののみを考えたが，これが負の場合には，P_k を新たに生産に加えようとする場合，負の x_{ik} に関連する $\boldsymbol{P}_i$ は，その生産を減ずることなく，逆にそれを増加せしめることによつて，丁度生産要素の過不足が無くなることを意味する．従つて負の値をとる $\boldsymbol{P}_i$ について考える必要はない．

さて第Ⅱ段階のタブローへの移行を考察しよう．Ⅰの段階の左縦欄の $\boldsymbol{P}_5$ の左側に，外向きの矢印がつけられ，次の段階で $\boldsymbol{P}_5$ が表から除かれることを示す．次の表では $\boldsymbol{P}_5$ のあつたところへ $\boldsymbol{P}_1$ が内向きの矢印と共に記入される（第3表参照）．そして $\boldsymbol{P}_1$ の1単位当りの利潤 $\boldsymbol{c}_1$ が記入される．

さて P_0 の下は新しい解，λ_1, λ_6, λ_7 の値が記入されるべきである．これらの値は，先ず，上で述べた如く，$\lambda_1'=\lambda_5/x_{51}=40$ が求められる．ここにダッシュを附したのは，新しい段階の記入値を，附さないものは前の段階におけるそれを示す．$\boldsymbol{P}_1$ を40単位の水準で生産することになつたのであるから，$\boldsymbol{P}_6$ は $40\times1/10$ 単位の水準で生産を減少して生産要素を $\boldsymbol{P}_1$ の生産のために提供することになる．かくして $\lambda_6=8-40\times\frac{1}{10}=4$ となる．同様に $\lambda_7=15-40\times\frac{3}{20}=9$ となる．この組合せから得られる利潤は $15\times40=600$円である．

他の生産要素間の関係を示す記入値も，同様な考察により求められる．即ち $\boldsymbol{P}_1$ というプロセスが新たに生産に使用されるようになつたのである．そしてそれは前の生産における $\boldsymbol{P}_5, \boldsymbol{P}_6, \boldsymbol{P}_7$ をそれぞれ1/4, 1/10, 3/20単位の水準で使用する場合と同一の生産要素を必要とするプロセスである．一方例えば P_4 はそれらをそれぞれ6/17, 5/17, 1/17 単位の水準で使用するのと同等である．ところで今 P_5 の生産を中止したわけである．従つて P_4 は P_5 を6/17単位の水準で用いるだけの原料を $\boldsymbol{P}_1$ から求めようとすれば，$\frac{6/17}{1/4}=24/17$ 単位だけの水準が必要となる．一方 $\boldsymbol{P}_1$ を24/17単位の水準使用するとすれば，それは同時に $\boldsymbol{P}_6$ 及び $\boldsymbol{P}_7$ の原料と同等のものを各々 $\frac{24}{17}\times\frac{1}{10}$, $\frac{24}{17}\times\frac{3}{20}$ 単位ずつ齎らすことになる．従つて $\boldsymbol{P}_6$ 及び $\boldsymbol{P}_7$ をはじめの5/17, 1/17単位ずつまでは必要とせず，$\frac{5}{17}-\frac{24}{170}=\frac{26}{170}$, 及び $\frac{1}{17}-\frac{36}{170}=-\frac{26}{170}$ だけで充分であることが判る．結局新しいプロセスの組合せに対して，P_4 を1単位生産するに必要とされる生産要素の量は，$\boldsymbol{P}_1$ を24/17, $\boldsymbol{P}_5$ を26/170単位ずつの水準で中止し，$\boldsymbol{P}_7$ を更に26/170単位の水準だけ余計に生産することによつて，丁度それと等しいものが得られることになる．

他の記入値も全く同様である．今これの移行を一般的な式で表現してまとめてみると次の如くになる．

1) $z_j-c_j<0$ なる j の中，その絶対値の最大なものを選び，そのプロセスを P_k で示す．

2) $x_{ik}>0$ につき λ_i/x_{ik} を求め，その最小なる i によつて除かるべきプロセス $\boldsymbol{P}_r$ を定める．

3) 新しい記入値は次の如くして求められる．

$$\begin{cases}\lambda_k'=\dfrac{\lambda_r}{x_{rk}}\\[2ex]\lambda_i'=\lambda_i-\left(\dfrac{\lambda_r}{x_{rk}}\right)x_{ik}\\ \qquad\qquad\qquad (i\neq k)\end{cases}\qquad\begin{cases}x'_{kj}=\dfrac{x_{rj}}{x_{rk}}\\[2ex]x'_{ij}=x_{ij}-\left(\dfrac{x_{rj}}{x_{rk}}\right)x_{ik}\\ \qquad\qquad\qquad (i\neq k)\end{cases}$$

この規則は z_j-c_j の欄についても同様に適用しうる．このことはこのタブローのもつ別の一つの利点でもあることに注目してよかろう．