$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 & & & +\frac{6}{17}x_4 & +x_5 & & & =10 \\ \frac{1}{10}x_1 & +\frac{2}{17}x_2 & & +\frac{5}{17}x_4 & & +x_6 & & =8 \\ \frac{3}{20}x_1 & +\frac{3}{17}x_2 & +\frac{1}{4}x_3 & +\frac{1}{17}x_4 & & & +x_7 & =15 \end{cases}$$

$$x_i \geqq 0 \qquad i=1,2.\cdots\cdots,7$$

なる条件の下に

$$z_0=15x_1+\frac{200}{17}x_2+10x_3+\frac{250}{17}x_4$$

を最大ならしめる如き解を求める問題について，次の各種の変化が与えられた時の最適解を追求してみよう．

1) c_4 が$\frac{250}{17}$から$\frac{420}{17}$に変る．（第3表）

2) 第2の条件式右辺が8から12に増える．（第4表）

3) 新たな生産プロセス，$P_8=(0\ 1/12\ 1/6)$, $c_8=12$ の附加．（第5表）

4) 新たな制限式，$x_1+x_2 \leqq 50$ の附加（第6表）．

引 用 文 献

1) 中瀬正雄，"焼結鉱配合に関する計算例"，経営科学，第1巻，第1号，1956.

2) 関和文，"生産計画の一例"，経営科学，第1巻，第1号，1956.

3) 大沢豊，"線型計画における与件変動に伴う最適解の調整について"，大阪大学経済学，第5巻，第3－4号，1956.

4) Charnes, A., Cooper, W. W., Henderson, A., "An Introduction to Lineer Programming", John Wiley and Sons, New York, 1953.

5) Dantzig, G. B., Orden, A., Wolfe, P., "The Generalized Simplex Method for Minimizing a Linear Form Under Linear Inequality Restraints —— Notes on Linear Programming I," *RAND*, 1954. 小林和夫，"Dantzig の Generalized Simplex method について"，経営科学，第1巻，第1号，1956.

6) Lemke, C. E., Charnes, A., "Extremal Problems in Linear Inequalities", *Technical Report*, No. 36, Carnegie Institute of Technology, Department of Mathematics, Pittsburgh, 1953.

7) "講座—シンプレックス・タブローの構成について，" 経営科学，第1巻，第1号，1956.

Dantzig の generalized simplex method について

小　林　和　夫*

こゝに紹介するのは，主に G. B. Dantzig, A. Orden, P. Wolfe による "The Generalized Simplex Method for Minimizing a Linear Form under Linear Inequality Restraints," Notes on Linear Programming Part I, (*RM*-1264), Rand co. により，シンプレックス・タブローの作成を中心としてこの方法の特徴を示すものである．

シンプレックス・タブローによつて線型計画の問題を解く場合，タブロー作成の手数を成可く少くしたいという事，及び縮退（degeneracy）の事態に如何に対処するかと云う事，この二つに関する問題が計算過程を推進めて行くに当つて生じて来る．前者はそれ自体としても勿論，計算過程中における計算誤差，計算の間違い，及び之等の蓄積して行く可能性を出来るだけ小さくするためにも望ましい事である[1]．次に後者について云えば，計算手続の上からは，それは基底（basis）を構成するベクトルに関する判定規準に関係して来る問題であり，シンプレックス法の一つの難点とされた問題である．而も縮退と云う事態は実際に屢々生じ，場合によつては線型汎函数（linear functional）の値が収斂せず基底が循環する可能性も考えられている．そこでこの事態を避ける必要があるがこの場合，縮退の起るが如き問題を考察の対象から除く事も考え得る手段である[2]．併し他面，縮退は実際上の問題でも屢々生ずるものであるから，之を積極的に解決するための努力乃至工夫がなされて来た[3]．

例えば A. Charnes による ε-perturbation procedure がそれであり，又こゝに紹介する方法もかゝる積極的な解決を果したものである．尚，縮退問題の攪乱（perturbation）による解決法と云う点から，A. Chardes によるものと，以下に示す G. B. Dantzig 其他によるものとを比較すれば，両者が何れも与えられた元の問題に対して攪乱を与え，攪乱の与えられた後の問題に関する解をもつて，元の問題に対する解とする事において，及び計算手続上結果する所においては同じである．

たゞ如何なる攪乱を与えるかについては，前者が極限概念を用いるのに対して，後者においては純粋に代数的に解決せられている点で異つている．

以上の如く，以下紹介する方法は計算上の手数を少くし，縮退の問題を代数的に解決する点に其特徴を有している．従つてこの様な問題点を中心として generalized

* 大阪大学経済学部統計学研究室

simplex method を簡単に紹介する事にした．

問題を出来るだけ簡単にするために，先ず実行可能解（feasible solution）の存在を仮定した上で，その場合には基本解（basic solution）も存在すると云う定理，更に最大解が存在し且つそれが一義的であれば，それは基本解であり．一義的でなければ，同じ最大値を有する基本解が存在すると云う定理を証明なしに認める事にする．

そこで次の問題を考える．

$x_0+\sum_{j=1}^{n-m} a_{0j}\, x_j=0$ として

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n-m} a_{ij}\, x_j \leqq b_i \quad (i=1,2,\cdots\cdots,m),\ b_i \geqslant 0 \\ \text{及び}\ x_j \geqslant 0 \quad (j=1,2,,n-m)\end{cases}$$

なる条件の下に x_0 を最大にする事．

こゝでスラック変数を導入し，generalized simplex method で用いる記号と関連せしめて，上の問題をベクトルで表現して見る，即ち

$$x_{n-m+i}+\sum_{j=1}^{n-m} a_{ij}\, x_j=b_i \quad (i=1,2,,\cdots\cdots m)$$

とし，$P_j=\begin{pmatrix} a_{0j} \\ a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj}\end{pmatrix}$，$P_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$，更に $P=[P_0,P_1,\cdots\cdots,P_n]$ とする．尚各 $P_j\ (j=1,2,\cdots\cdots n)$ は a_{0j} を含み，$(m+1)$ 次元ベクトルであり，其中 P_{n-m+i} $(i=1,2,\cdots\cdots,m)$ はスラック・ベクトルで，之に対応する $a_{0\cdot n-m+i}=0$ である事，及び P_0 も $(m+1)$ 次元ベクトルである事に注意すると，上の問題は次の如く表わし得る．

$$(I)\begin{cases} PX=\sum_{j=0}^{n} P_j\, x_j=Q, \\ \qquad x_j \geqq 0, \quad (j=1,2,\cdots\cdots,n) \\ \text{の下に}\ x_0\ \text{を最大にする事.}\end{cases}$$

さて，先に示した二つの問題点を中心にして，generalized simplex method が問題 (I) を如何に解決するかを見る事にしよう．解決は問題 (I) をその構成要素として有する他の問題に置換え，且つその際実変数 $x_j \geqslant 0$ を lexicographic に順序付けられたベクトル変数に置換える事によつてなされる．尚ベクトル変数を lexicographic に順序付けると云う事は，ベクトル変数 $X=(x_1, x_2,\cdots\cdots,x_m)$，$Y=(y_1, y_2,\cdots\cdots,y_m)$ がある場合，その相対応する要素の値を第一要素から比較して行き，x_i，y_i において初めて $x_i \neq y_i$ であり，而も $x_i > y_i$（代数的に）であつたとすれば，それ以後の対応要素の値の大小関係がどうであつても $X>Y$ とする事を意味している．$X>0$ は勿論，Y をゼロ・ベクトルと置けばよい．

そこで問題 (I) X，の x_j，$(j=0,1,\cdots n)$，Q，は夫々，其等を第一要素として含む次の様な $\tilde{X}$，$\bar{x}_j\ (j=0,1,\cdots,n)$，及び M に置換えられる．

$\bar{x}_0=(x_0, 1, 0,\cdots\cdots 0)$　各 $\bar{x}_j$ の要素は $(m+2)$ 個

$\bar{x}_j=(x_j, 0, 0,\cdots\cdots 0)$，$1 \leqslant j \leqslant n-m$

$\bar{x}_{n-m+i}=(x_{n-m+i}, 0,\cdots\cdots 0, 1, 0,\cdots 0)$，$1 \leqslant i \leqslant m$，尚1は $(i+2)$番目．

$M=[Q, U_0,\cdots\cdots,U_m]$，

$\tilde{X}=\begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n\end{pmatrix}$，

こゝで Q は問題 (I) におけると同じ．U_i は i 番目に1をもつ単位ベクトルであり，従つて M は $(m+1)$ 行 $(m+2)$ 列の行列で階数は $(m+1)$ である．

問題 (I) を含む generalized simplex method の問題は，之等を用いて次の様に表わされる．

$$(II)\begin{cases} P\tilde{X}=\sum_{j=0}^{n} P_j\, \bar{x}_j=M & (1) \\ \quad \bar{x}_j \geqslant 0 \qquad (j=1, 2,\cdots\cdots,n) & (2) \\ \text{の下に}\ \bar{x}_0\ \text{を最大にする事.}\end{cases}$$

問題 (I) の最適解は問題 (II)の最適解の第一要素から得られる事になる．処で初めに，基本解の存在を仮定したから，その基本解を，$V=\begin{pmatrix} \bar{v}_0 \\ \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_m\end{pmatrix}$ とすると，

$$BV=P_0\bar{v}_0+\sum_{i=1}^{m} P_{j_i}\, \bar{v}_i=M, \quad (\bar{v}_i \geqslant 0,\ j_i \neq 0) \qquad (3)$$

とする事が出来る．こゝで $B=[P_0, P_{j_1},\cdots\cdots,P_{j_m}]$，且つ問題は $\bar{v}_0$ を最大にする事になる．

さて，M の階数は $(m+1)$ であるから（3）において，B 及び V の階数も同様 $(m+1)$ であり，B の各列（column）はベクトル P_j の空間における基底を構成し，且つ B について V は一義的に決定される事になる．更に V の階数$=(m+1)$ は V の各行（row）が，ゼロ・ベクトルになりえない事を意味する．そこで $\bar{v}_i \geqslant 0$ $(i \neq 0)$ を考慮すると，この事は基本解においては基底を構成するベクトル P_{j_i} に関連する全てのベクトル変数 $\bar{v}_i$ は正である事（他は0）を意味する．即ち，

$$\bar{v}_i > 0 \qquad (i=1,2,\cdots\cdots m), \qquad (4)$$

之は勿論 lexicographic な意味においてゞある．そこで β_i を基底 B の逆行列の第 i 行とすると，

$$B^{-1}=[P_0, P_{j_1},\cdots\cdots,P_{j_m}]^{-1}=\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m\end{pmatrix}. \qquad (5)$$

（3）及び M の定義式より V は，

$$V=B^{-1}M=[B^{-1}Q\,;\ B^{-1}] \qquad (6)$$

従つて $\bar{v}_i$ は

$$\bar{v}_i=(\beta_i Q\,;\ \beta_i)=(v_i, \beta_{i0}, \beta_{i1},\cdots\cdots,\beta_{im}) \qquad (7)$$

で表わされる．

$(m+1)$ 次元のベクトル空間における任意のベクトルは，この空間における基底 B を構成する $(m+1)$ 個のベクトルの一次結合で表わしうるから，今基底を構成し

ていない一つのベクトルを P_s で表わすと,

$$P_s=BY_s \tag{8}$$

こゝで $Y_s=B^{-1}P_s=\begin{pmatrix}\beta_0 P_s\\ \vdots\\ \beta_m P_s\end{pmatrix}$ であり,

$\beta_i P_s=y_{is}$, とおくと,

$$P_s=B\begin{pmatrix}y_{0s}\\ y_{1s}\\ \vdots\\ y_{ms}\end{pmatrix}=\sum_{i=0}^{m}P_{j_i}\,y_{is} \tag{9}$$

そこで(3), 及び(8)又は(9)より形成される解,

$$B[V-Y_s\bar{\theta}]+P_s\bar{\theta}=M$$

又は

$$P_0[v_0-y_{0s}\bar{\theta}]+\sum_{i=1}^{m}P_{j_i}[v_i-y_{is}\bar{\theta}]+P_s\bar{\theta}=M \tag{10}$$

について考えて見る. (4)によつて $\bar{v}_i>0\ (i=1,2,\cdots,m)$ であるから, (10)における P_s 及び各 P_{ji} に関連するベクトル変数を非負にし且つ $\bar{\theta}>0$ (lexicographic) なる $\bar{\theta}$ を持つ解が存在する. それは(1)及び(2)に対する解——実行可能解——でもある. 尚(1)を満足し, lexicographic な意味で(2)を満足する解を実行可能解と云う.

こゝで二つの場合が考えられる. 即ち $y_{0s}\geqq 0$, と $y_{0s}<0$ の場合である. 前者の場合, かゝる $\bar{v}_0$ は既に最大であり, V は最適解を与える. 後者の場合, ある s について, 全ての $y_{is}\leqq 0\ (i=1,2,\cdots\cdots m)$ ならば, $\bar{\theta}$ (その第一要素) を任意に大きくする事によつて, その解の値が無限大である如き実行可能解を構成する事が出来る. 之に対し $y_{0s}<0$ なる s について, ある i に関して $y_{is}>0$ なる場合には, (10) より $\bar{\theta}>0$ なる $\bar{\theta}$ を含み且つ其値が前の解のそれより確実に大なる新しい基本解を構成する事が出来る. この $\bar{\theta}$ を含む新しい解の値 $\bar{v}_0{}^*$ は

$$\bar{v}_0{}^*=\bar{v}_0-y_{0s}\bar{\theta}>\bar{v}_0,\quad (y_{0s}>0,\ \bar{\theta}>0) \tag{11}$$

であり, 従つて与えられた $\bar{\theta}>0$ に対しては, この値の最大の増加は,

$$y_{0s}=\beta_0 P_s=\min_{l}(\beta_0 P)<0 \tag{12}$$

なる s について支えられる. 勿論 $\bar{\theta}$ については,

$$\max\bar{\theta}=(1/y_{rs})\bar{v}_r=\min_{y_{is}>0}(1/y_{is})\bar{v}_i>0 \tag{13}$$

で与えられ, 又かゝる r は一義的に決定される. と云うのは, 上の min は lexicographic に min をとると云う事であり, 且 V の階数 $=(m+1)$ より V のどの二つの行も比例的ではありえず, 若し(13)で r が一義的に決まらないとすると, それは比例的な行が存在する事になるからである. こうして与えられた $\bar{\theta}$ によつて, 其値が確実に大である基本解 V^* が新しい基底 $B^*=[P_0,P_{j_1}\cdots\cdots P_S,\cdots\cdots P_{jm}]$ の下に得られた. かくして有限個のベクトル P_j 間からの選択による新しい基底は循環する事なく, 縮退の問題は純粋に代数的に解決せられた.

次に初めに述べたタブローの計算を少くする事が, この方法では可能であることを示す. 上の様に, 基底に入るベクトルと, 出るベクトルとが夫々 P_s 及び P_{jr} と決定されると, (10) 及び (13) によつて新しい基本解 $V^*=\begin{pmatrix}\bar{v}_0{}^*\\ \bar{v}_1{}^*\\ \vdots\\ \bar{v}_m{}^*\end{pmatrix}$ は次の様になる.

$$\begin{cases}\bar{v}_0{}^*=\bar{v}_0-\dfrac{\bar{v}_r}{y_{rs}}y_{0s}, & (14)\\ \bar{v}_i{}^*=\bar{v}_i-\dfrac{\bar{v}_r}{y_{rs}}y_{is},\quad (i\neq r) & (15)\\ \bar{v}_r{}^*=\bar{\theta}=\dfrac{\bar{v}_r}{y_{rs}} & (16)\end{cases}$$

勿論かゝる V^* についても $B^*V^*=M$ であり, M の定義式を考慮すると,

$$V^*=(B^*)^{-1}M=[(B^*)^{-1}Q\,;\,(B^*)^{-1}].$$

従つて (14) (15) 及び (16) より

$$\begin{cases}\bar{v}_0{}^*=(\beta_0{}^*Q,\beta_0{}^*)=(\beta_0 Q,\beta_0)-\dfrac{(\beta_r Q,\beta_r)}{(\beta_r P_s)}(\beta_0 P_s) & (14')\\ \bar{v}_i{}^*=(\beta_i{}^*Q,\beta_i{}^*)=(\beta_i Q,\beta_i)-\dfrac{(\beta_r Q,\beta_r)}{(\beta_r P_s)}(\beta_i P_s), & \\ \qquad (i\neq r) & (15')\\ \bar{v}_r{}^*=\bar{\theta}=(\beta_r{}^*Q,\beta_r{}^*)=\dfrac{(\beta_r Q,\beta_r)}{(\beta_r P_s)} & (16')\end{cases}$$

となる. この関係式から, 前の段階の基底の逆行列を知れば, 次の段階の基底の逆行列が計算出来, 同時に新しい基本解が計算出来る事が容易に分る. 勿論最初の出発点となる基底は $[P_0,P_{n-m+1},\cdots\cdots,P_n]$ で構成され, それは $(m+1)$ 次の単位行列であるから, 其逆行列も又同じであり, $B^{-1}Q=Q$ となるから step-by-step の計算が始められる. 従つて継続的段階における計算においては, 現在の段階におけるタブローに次に基底に入るベクトルを働かすだけでよく, 而もその際働かすベクトルは従来のシンプレックス法における如く, 各段階の基底により表現されたものでなく, 最初に与えられたベクトルである. 之等の事によつて従来のシンプレックス・タブローと比較してタブローそのものを縮少出来, 各段階の計算量も最悪の場合でも多くなる事はなく, 又各段階の基底の逆行列以外を通して誤差が蓄積される事がない訳である.

比較のために, 次に A. Charnes によるタブローと, generalized simplex method におけるそれを掲げて, 後者の計算手続について簡単に説明を加えて置こう.

表Iはある段階における従来の (A. Charnes の) シンプレックス・タローである. この場合シンプレックス判定規準と, タブローの計算は勿論次の式で表わされる.

「判定規準」

表 I

$c_j \rightarrow$			$c_1\ c_2 \cdots\cdots c_r \cdots\cdots c_m$	$c_{m+1} \cdots\cdots c_s \cdots\cdots c_n$
$\downarrow$	基底ベクトル	Q	$P_{j_1}\ P_{j_2} \cdots\cdots P_{j_r} \cdots\cdots P_{j_m}$	$P_{m+1} \cdots\cdots P_s \cdots\cdots P_n$
c_1	P_{j_1}	x_1	1	$(\beta_1 P_{m+1})\cdots\cdots(\beta_1 P_s)\cdots\cdots(\beta_1 P_n)$
c_2	P_{j_2}	x_2	1 0	$(\beta_2 P_{m+1})\cdots\cdots(\beta_2 P_s)\cdots\cdots(\beta_s P_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
c_r	P_{j_r}	x_r	1	$(\beta_r P_{m+1})\cdots\cdots(\beta_r P_s)\cdots\cdots(\beta_r P_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	0	$\vdots$
c_m	P_{j_m}	x_m	1	$(\beta_m P_{m+1})\cdots(\beta_m P_s)\cdots\cdots(\beta_m P_n)$
z_j		x_0	$z_1\ z_2 \cdots\cdots z_r \cdots\cdots z_m$	$z_{m+1} \cdots\cdots z_s \cdots\cdots z_n$
$z_j - c_j$			$0\ 0 \cdots\cdots 0 \cdots\cdots 0$	$z_{m+1}-c_{m+1} \cdots z_s - c_s \cdots\cdots z_n - c_n$

表 II

	行番号	基本解の変数	基底変数の値	基底の逆行列	Y_s	η
	0	x_0	v_0	$\beta_{00},\beta_{01}\cdots\cdots\beta_{0r}\cdots\cdots\beta_{0m}$	$(\beta_0 P_s)$	$-(\beta_0 P_s)/(\beta_r P_s)$
	1	x_1	v_1	$\beta_{10},\beta_{11}\cdots\cdots\beta_{1r}\cdots\cdots\beta_{1m}$	$(\beta_1 P_s)$	$-(\beta_1 P_s)/(\beta_r P_s)$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\leftarrow$	r	x_r	v_r	$\beta_{r0},\beta_{r1}\cdots\cdots\beta_{rr}\cdots\cdots\beta_{rm}$	$(\beta_r P_s)$	$1/(\beta_r P_s)$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	m	x_m	v_m	$\beta_{m0},\beta_{m1}\cdots\cdots\beta_{mr}\cdots\cdots\beta_{mm}$	$(\beta_m P_s)$	$-(\beta_n P_s)/(\beta_r P_s)$

$$z_s - c_s \equiv \min_j (z_j - c_j) < 0,$$

$$\theta = \frac{x_r}{(\beta_r P_s)} \equiv \min_i \frac{x_i}{(\beta_i P_s)},\ \text{for } (\beta_i P_s) > 0.$$

「計算手続」（*は次の表に関するもの）

$$(\beta_r P_j)^* = \frac{(\beta_r P_j)}{(\beta_r P_s)} \qquad j = 1,2,\cdots\cdots,n$$

$$(\beta_i P_j)^* = (\beta_i P_j) - \frac{(\beta_r P_j)}{(\beta_i P_s)}(\beta_i P_s) \qquad \begin{cases} i \neq s,\ i = 1,\cdots,m \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

$$x_s^* = \theta$$

$$x_i^* = x_i - \theta(\beta_i P_s)$$

次に表 II 以下は generalized simplex method によるタブローである．計算手続は次の如くである．

「判定規準」のための計算手続

(i) 各 P_j（現在の基底に入つていない）につき，$(\beta_0 P_j) = \beta_{00} a_{0j} + \beta_{01} a_{1j} + \cdots\cdots + \beta_{0m} a_{mj}$ を計算する．

(ii) *a*) もし全ての $(\beta_0 P_j) \geqq 0$ ならば，その解が最適解であるから計算は終る．

b) 全ての $(\beta_0 P_j)$ について $(\beta_0 P_j) \geqq 0$ でなければ，$(\beta_0 P_s) = \min_j (\beta_0 P_j) < 0$ を求める．P_s が次の基底に入る．

表 II′

	行番号	基本解の変数	基底変数の値	基底の逆行列
	0	x_0	$v_0 + \eta_0 v_r$	$(\beta_{00} + \eta_0 \beta_{r0}),\cdots\cdots(\beta_{0m} + \eta_0 \beta_{rm})$
	1	x_{j_1}	$v_1 + \eta_1 v_r$	$(\beta_{10} + \eta_1 \beta_{r0}),\cdots\cdots(\beta_{1m} + \eta_1 \beta_{rm})$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\rightarrow$	r	x_s	$\eta_r v_r$	$\eta_r \beta_{r0},\cdots\cdots\cdots\cdots \eta_r \beta_{rm}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	m	x_{j_m}	$v_m + \eta_m v_r$	$(\beta_{m0} + \eta_m \beta_{r0}),\cdots(\beta_{mn} + \eta_m \beta_{rm})$

(iii) かゝる s について $(\beta_i P_s) = (\beta_{i0} a_{0s} + \beta_{i1} a_{1s} + \cdots \cdots + \beta_{im} a_{ms})$ を全ての $i = 0,1,\cdots\cdots,m$ について，計算する．

(iv) *a*) 全ての $(B_i P_s) \leqq 0$ $(i = 1,2,\cdots\cdots m)$ ならば，計算を止める．$v_0 \rightarrow \infty$ なる如き解を構成しうるからである．

b) 全ての $(\beta_i P_s)$ について $(\beta_i P_s) \leqq 0$ でなけれ

ば，$(\beta_i P_s)>0$ のものについて $(v_r/\beta_r P_s)=\min_i (v_i/\beta_i P_s)$ を求める．勿論 v_i は $\bar{v}_i$ の第一要素であるから，之だけで上の min が決まらない場合（即ち縮退の場合）以下の要素について順に同様の判定を行えばよい．例えば $(\beta_{rj}/(\beta_r P_s))=\min_i (\beta_{ij}/(\beta_r P_s))$ 等である．

「次のタブロー作成」のための計算手続．

(v) かくして基底に入るベクトル P_s 及び出るベクトル P_{j_r} が決まると，$(i\neq r)$ に関して $\eta_i=-\dfrac{(\beta_i P_s)}{(\beta_r P_s)}$ 及び $\eta_r=\dfrac{1}{(\beta_r P_s)}$ を計算する．次表は次式に従つて作成される．之等は勿論上の (14′)，(15′) 及び (16′) から出て来るものである．

$$\begin{cases} v_i{}^*=v_i+\eta_i v_r & (i\neq r) \\ \beta_{ij}{}^*=\beta_{ij}+\eta_i\beta_{rj} & (i\neq r) \\ v_r{}^*=\eta_r v_r & \\ \beta_{rj}{}^*=\eta_r\beta_{rj} & \end{cases}$$

この関係は表Ⅱ′で示されている．尚，この様な計算手続の出発点となる最初のタブローは先に示した所によつて表Ⅲの如く与えられる事は明らかである．

表 Ⅲ

行番号	基本解の変数	基数底の変値	基底の逆行列
0	x_0	0	$1\ 0 \cdots\cdots 0$
1	x_{n-m+1}	b_1	$0\ 1\ 0 \cdots\cdots 0$
⋮			$\vdots \quad \ddots$
r	x_{n-m+r}	b_r	$0 \cdots, 0,\ 1\ 0 \cdots 0$
⋮			$\vdots \quad \ddots$
m	x_n	b_m	$0 \cdots\cdots 0,\ 1$

尚こゝに示した計算手続は実行可能解の存在を仮定した場合のものである．その存在が分らない一般の問題については上の計算手続の前に，実行可能解に達するための計算が行われる．之についてはこゝに紹介した Dantzig の論文及び其他[4] を参照せられたい．

以上で generalized simplex method の紹介を終えるが，尚二，三の点について，従来の方法又はタブローと新しいものとの間の異同を示しておく．表Ⅰにおける P_s と表Ⅱにおける P_s とは初めに示した如く a_{0s} を含むか否かの相違はあるが，表Ⅱ中の Y_s 列に含まれ $(\beta_i P_s)$，$i=1,2,\cdots\cdots,m$，ると表Ⅰ中のそれ等とは同じものであり，つまりそれは現在の基底によるベクトルの表現を現わすものである．処で $(\beta_0 P_s)$ について云えば，$(\beta_0 P_s)\equiv z_s-c_s$（表Ⅰ参）である事を示すことが出来る．従つて (12) で与えた判定規準は従来のタブローでの $z_s-c_s=\min_j(z_j-c_j)<0$ そのものである．之等の点に注意して表Ⅰと Ⅱ とを比較してみれば，従来の方法とは異つて，generalized simplex method では必要な，唯一のベクトルについてのみ現在の基底による表現を行えばよい事 —— この方法の一つの特徴 —— が明らかになる．亦先にも云つた事であるが，各段階で必要な唯一のベクトル（例えば上の P_s）は，各段階毎にその基底によつて表現されたものではなく，元のベクトルそのものであるから，基底の逆行列以外においては各回の計算の独立性が保たれ，error の蓄積される可能性を少くする事が出来る．之も一つの特徴である．

参 考 文 献

1) C. E. Lemke and A. Charnes, "Extremal Problems in Linear Inequalities", Chapter II, CIT Technical Report No. 36.

2) R. Dorfman, "Application of Linear Programming to the Theory of the Firm," Chapter II. University of California Press.

3) G. B. Dantzig "Application of the Simplex Method to a Tranportation Problem," Activity Analysis of Production and Allocation, Chap. XXIII, John Wiley & Sons, 1951.
A. Charnes, W. W. Cooper, and A. Henderson, "Introduction to Linear Pragramming," John Wiley & Sons, 1953.
R. ドーフマン著，小宮隆太郎訳 "リニャー・プログラミング" 附録「退化の問題」日本規格協会 1955.

4) G. B. Dantzig, "Computational Algorithm of the Revised Simplex Method," RAND, RM-1266. 1953.
G. B. Dantzig, W. Orchard-Hays, "Alternative Algorithm for the Revised Simplex Method, Using a Product Form for the Inverse. RAND, RM-1268 1953.