日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

サッカーにおける布陣変更策の零和ゲームとしてのモデル化

01506960　国立スポーツ科学センター　＊廣津信義　HIROTSU Nobuyoshi
国立スポーツ科学センター　宮地　力　MIYAJI Chikara

1．はじめに

スポーツの試合で戦術の駆け引きがあることは言うまでもないが、試合から取得した実データを基に、ゲーム理論の観点から駆け引きを取り扱った例は少ない。ここでは、サッカーに関する先の報告[1,2]を発展させる形で、両チームの布陣（フォーメーション）変更策を零和ゲームとして考えたモデルを、Ｊリーグの実データを基に例示したので紹介する。

2．サッカーの得点モデル

サッカーでは、各チームの試合での得点数をポアソン分布に従うとし、そのパラメータを対数線形モデルで表し、チームの強さを評価する手法が提案されている[3,4]。これを利用すると、チームＡがチームＢとＡの地元で対戦した時の各々の得点率λ、μを、地元優位性、チーム（ないしはその布陣）の得点・失点に関する強さ（傾向）という因子で説明でき，

$$\begin{aligned}\log\lambda &= \beta+\beta_{\mathrm{home}}+\beta_{\mathrm{score}}(A)+\beta_{\mathrm{concede}}(B)\\ \log\mu &= \beta+\beta_{\mathrm{score}}(B)+\beta_{\mathrm{concede}}(A)\end{aligned} \tag{1}$$

と表すことができる。ここで、βは切片、β_{home}は地元優位性、β_{score}、β_{concede}はそれぞれチーム（ないしはその布陣）の得点・失点に関する強さ（傾向）を表す指標となる。本研究では、Ｊリーグの 2002 年度の記録[5]から、各試合・各チーム（ないしはその布陣）毎の１分当たりの得点率を求め、各因子を最尤推定した。

3．零和ゲームとしてのモデル化

3．1　布陣変更策の定式化

サッカーでは、選手交代などで布陣変更し、攻撃・防御の戦術を変更することができる。従来は、一方のチームのみ戦術変更できるという条件で考えたが[1,2]、ここでは両チームとも変更できるという条件で定式化する。

まず、地元チームＡが、布陣ｆで試合開始し、任意の時点で布陣ｆ’に、相手チームＢが、布陣ｇで試合開始し、任意の時点で布陣ｇ’に変更できるとする。時刻ｔでチームＡがｒ点リードしており、双方の布陣はｆとｇであるとしよう。ここで、残り時間内で双方とも最適な布陣変更をしたときのチームＡの勝つ確率を$P^{sw}(r,t,f,g)$とする。なお、布陣変更は選手交代によってのみなされるとし、s,wは残り時間で許される選手交代の回数とする。また、便宜上チームＡとＢの戦術を各々i, jで表し、布陣ｆを変更しないという戦術を i=0, 布陣ｆからｆ’に変更する戦術を i=1, 布陣ｆからｆ”に変更する戦術を i=2, などというように表すこととする。チームＢについての戦術ｊも同様に表すこととする。

両監督は時刻ｔで、戦術を継続するか変更するか２つの選択があるので、①両チーム共に戦術変更しない、②チームＡのみ変更する、③チームＢのみ変更する、④共に変更する、という展開がある。これらの展開について、両チームの最適純粋戦略が存在しゲームが確定するならば、$P^{sw}(r,t,f,g)$は、時刻ｔと少し後のｔ＋ｄｔで比較すると、定義より以下の式をみたすこととなる。

$$P^{sw}(r,t,f,g)=$$
$$\max_i\min_j\begin{cases}P^{sw}(r+1,t+dt,f,g)\cdot\lambda(f,j)dt+P^{sw}(r-1,t+dt,f,g)\cdot\mu(f,g)dt+P^{sw}(r,t+dt,f,g)\cdot\{1-((\lambda(f,g)+\mu(f,g))dt\} \\ \quad :\text{戦術 i=0 j=0（両チームとも布陣変更しない場合）} \\ P^{s'w}(r+1,t+dt,f',g)\cdot\lambda(f',g)dt+P^{s'w}(r-1,t+dt,f',g)\cdot\mu(f',g)dt+P^{s'w}(r,t+dt,f',g)\cdot\{1-(\lambda(f',g)+\mu(f',g))dt\} \\ \quad :\text{戦術 i=1 j=0（チームAが布陣変更}(f\to f')\text{した場合）} \\ P^{sw'}(r+1,t+dt,f,g')\cdot\lambda(f,g')dt+P^{sw'}(r-1,t+dt,f,g')\cdot\mu(f,g')dt+P^{sw'}(r,t+dt,f,g')\cdot\{1-(\lambda(f,g')+\mu(f,g'))dt\} \\ \quad :\text{戦術 i=0 j=1（チームBが布陣変更}(g\to g')\text{した場合）} \\ P^{s'w'}(r+1,t+dt,f',g')\cdot\lambda(f',g')dt+P^{s'w'}(r-1,t+dt,f',g')\cdot\mu(f',g')dt+P^{s'w'}(r,t+dt,f',g')\cdot\{1-(\lambda(f',g')+\mu(f',g'))dt\} \\ \quad :\text{戦術 i=1 j=1（チームA,Bが布陣変更}(f\to f'),(g\to g')\text{した場合）} \\ \quad \cdots\cdots \end{cases} \tag{2}$$

ここで、s', w'は時刻ｔでの選手交代後に許される選手交代の回数である。

この方程式を解くことで、双方が最適純粋戦術を用いた時の勝つ確率と、その際の布陣変更のタイミングを求めることができる。なお、境界条件は、$P^{sw}(r,90,f,g)=1$ (r>0)、0.5 (r=0)、0 (r<0) である。

さらに、(2)式での演算を、max-min だけでなく、max-max、min-min、min-max とすることにより、それぞれチームＡが最適でチームＢが最悪、チームＡが最悪でチームＢが最適、両チームとも最悪、の布陣変更をした場合のチームＡの勝つ確率を求めることもできる。

3．2　数値例

数値例として、Ｊ１の横浜 FM と鹿島について紹介する。横浜 FM の主な布陣は 4-4-2, 4-3-3, 3-5-2 で、鹿島は 4-4-2, 4-5-1 であり、これらの布陣における双方の得点・失点に関する指標を 2002 年度の J1 の全試合の結果を基に(1)式を用いて最尤推定した。その結果を表１に示す。

表１．横浜 FM と鹿島の各布陣の得点・失点に関する指標の最尤推定の結果（β = -4.35、β_{home} =0.250）

チーム	布陣	得点の指標(β_{score})	失点の指標(β_{concede})
横浜 FM	4-4-2	-0.042	-1.169
	4-3-3	0.082	-0.335
	3-5-2	-0.102	-0.593
鹿島	4-4-2	-0.064	-0.133
	4-5-1	0.547	0.177

このようにして求められた最尤推定値を基に、横浜 FM が地元で鹿島と仮に対戦するという設定で、以下述べていこう。この試合で各布陣を用いた時の双方の１分間当たりの得点率λ,μは、(1)式に表１の値を代入することで、逆に計算することができ、その結果を表２に示す。表２より、横浜 FM が布陣 4-4-2 を採ると、鹿島の得点率μを最小に抑えることができ、鹿島としては布陣 4-4-2 を採ることで、横浜 FM の得点率λを最小に抑えることができることが分かる。

表２. 横浜 FM と鹿島の各布陣時の得点率

(λ, μ)		鹿島	
		4-4-2	4-5-1
横浜 FM	4-4-2	(0.0139, 0.0038)	(0.0190, 0.0069)
	4-3-3	(0.0159, 0.0087)	(0.0216, 0.0160)
	3-5-2	(0.0131, 0.0067)	(0.0179, 0.0123)

表２の値を基に、試合中の布陣変更はなしという条件で、各布陣を用いた場合の、横浜 FM が勝つ確率を計算すると、表３のようになる。この場合、双方とも布陣 4-4-2 を採ることで、解が得られ、ゲームの値は 0.75074 となる。これは、表 1 で考察した互いに得点を最小に抑えるという戦術となっている。

表３. 布陣変更なしの時の横浜 FM が地元で勝つ確率

$P^{33}(0,0,f,g)$		鹿島	
		4-4-2	4-5-1
横浜 FM	4-4-2	0.75074	0.75262
	4-3-3	0.65962	0.60489
	3-5-2	0.65575	0.61319

次に、３回まで許されている選手交代により布陣変更できるとした時の、横浜 FM が勝つ確率を計算すると、表４のようになる。表中の布陣は試合開始時のもので、紙幅の都合で試合中の布陣変更の流れやそのタイミングなどは割愛しているが、双方とも布陣 4-4-2 から始めて最適な布陣変更するという流れで解が得られ、ゲームの値は 0.73438 となる。なお、双方ともどの布陣ではじめても、試合開始後すぐに最適な布陣 4-4-2 に変更するため、ゲームの値としては、どの布陣で始めても大差はない。

表４. ３回まで布陣変更可の時に横浜 FM が地元で勝つ確率

$P^{33}(0,0,f,g)$		鹿島	
		4-4-2	4-5-1
横浜 FM	4-4-2	0.73438	0.73451
	4-3-3	0.73437	0.73450
	3-5-2	0.73437	0.73450

次に、(2) 式での演算を、max-max、min-min、min-max とし、横浜 FM と鹿島がそれぞれ最適-最悪、最悪-最適、共に最悪、の戦術変更をした場合での、横浜 FM の勝つ確率を同様に計算すると、表５のようになった。

表５. 異なる戦術変更の際の横浜 FM の地元での勝つ確率

演算	状況		横浜 FM の勝つ確率	開始時の布陣		横浜 FM の勝つ確率（可逆）
	横浜 FM	鹿島		横浜 FM	鹿島	
Max-max	最適	最悪	0.77282	4-4-2	4-5-1	0.77287
Max-min	最適	最適	0.73438	4-4-2	4-4-2	0.73421
Min-max	最悪	最悪	0.65735	3-5-2	4-4-2	0.65613
Min-min	最悪	最適	0.57889	4-3-3	4-5-1	0.57595

表５に示すように、横浜 FM が最適で鹿島が最悪の布陣変更をした時、横浜 FM の勝つ確率が最大の 0.77282 となり、逆に横浜 FM が最悪で鹿島が最適の時、最小の 0.57889 となる。双方最適ないしは最悪の時はその間の値となる。また、それぞれの場合で開始時の布陣の違いがあるので、参考までに列挙している。

３．３　布陣変更が可逆の場合

以上、選手交代により布陣変更する場合について述べてきたが、選手交代することなく、プレー中の選手の配置換え等で布陣変更でき、必要に応じて元の布陣に戻せるという場合についても、同様に定式化できる。

すなわち、$P(r,t,f,g)$ を時刻 t でチーム A が r 点リードしており、双方の布陣は f と g となっており、任意の時点で可逆な布陣変更ができるとした時の、チーム A の勝つ確率とする。このとき 3.1 節と同様の展開を考えることができ、これらの展開について、両チームの最適純粋戦術が存在しゲームが確定するならば、$P(r,t,f,g)$ は、時刻 t と少し後の t ＋ d t で比較すると、定義より以下の式が得られる。

$$P(r,t,f,g)=$$
$$\max_i \min_j \begin{cases} P(r+1,t+dt,f,g)\cdot\lambda(f,f)dt+P(r-1,t+dt,f,g)\cdot\mu(f,g)dt+P(r,t+dt,f,g)\cdot\{1-((\lambda(f,g)+\mu(f,g))dt\} \\ \quad :\text{戦術 } i=0\ \ j=0\ (\text{両チームとも布陣変更しない場合}) \\ P(r+1,t+dt,f',g)\cdot\lambda(f',g)dt+P(r-1,t+dt,f',g)\cdot\mu(f',g)dt+P(r,t+dt,f',g)\cdot\{1-(\lambda(f',g)+\mu(f',g))dt\} \\ \quad :\text{戦術 } i=1\ \ j=0\ (\text{チーム A が布陣変更}(f\to f')\text{した場合}) \\ P(r+1,t+dt,f,g')\cdot\lambda(f,g')dt+P(r-1,t+dt,f,g')\cdot\mu(f,g')dt+P(r,t+dt,f,g')\cdot\{1-(\lambda(f,g')+\mu(f,g'))dt\} \\ \quad :\text{戦術 } i=0\ \ j=1\ (\text{チーム B が布陣変更}(g\to g')\text{した場合}) \\ P(r+1,t+dt,f',g')\cdot\lambda(f',g')dt+P(r-1,t+dt,f',g')\cdot\mu(f',g')dt+P(r,t+dt,f',g')\cdot\{1-(\lambda(f',g')+\mu(f',g'))dt\} \\ \quad :\text{戦術 } i=1\ \ j=1\ (\text{チーム A, B が布陣変更}(f\to f'),(g\to g')\text{した場合}) \\ \quad \cdots\cdots \end{cases} \quad (3)$$

この方程式を解くことで、双方が最適純粋戦略を用いた時の勝つ確率と、その際の布陣変更のタイミングを求めることができる。また 3.1 節と同様、それぞれチーム A が最適でチーム B が最悪、チーム A が最悪でチーム B が最適、両チーム A が最悪、の布陣変更をした場合のチーム A の勝つ確率を求めることができる（表５右欄参照）。表５より、可逆とそうでない場合の勝つ確率の差は小さい。すなわち、可逆の時は、無限回の布陣変更が可能であると言えるが、３回までの布陣変更で、ほぼ勝つ確率は同程度になると数値的には言えそうである。

なお、今回の例では最適純粋戦略が存在したが、これは、得点・失点に関する指標の推定を (2) 式のような対数線形モデルで行ったことに起因するようである。チーム間で得手・不得手のような影響があると、混合戦略を入れた上での定式化が必要となる。

４．おわりに

サッカーの布陣変更を零和ゲームと考えて、モデル化してきたが、今後は非零和ゲームとして定式化した時や、混合戦略を考えることが必要になった場合などについて検討していきたい。

参考文献

[1] 廣津, ライト: サッカーの試合における戦術変更と反則のタイミング決定へのポアソンモデルの応用. 2003 年日本 OR 学会春季研究発表会アブストラクト集, (2003) 234-235.

[2] M.B.Wright and N.Hirotsu: The professional foul in football –tactics and deterrents. *Journal of the Operations Research Society* **54** (2003) 213-221.

[3] A.J.Lee: Modeling Scores in the Premier League: Is Manchester United Really the Best?. *Chance* **10** (1997) 15-19.

[4] N.Hirotsu and M.Wright: An evaluation of characteristics of teams in association football by using a Markov process model. *The Statistician* **52** (2003) 591-602.

[5] J リーグ編 (2003) J. LEAGUE YEARBOOK 2003. NTT 出版：東京.