日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

独占市場における単一ユニット，nユニット並列システムの比較

01109114 流通科学大学 サービス産業学部 *小出 武 KOIDE Takeshi
01204194 神戸学院大学 経営学部 三道 弘明 SANDOH Hiroaki

1. まえがき

先の研究 [1] では，独占市場における単一ユニットシステム，２ユニット並列システムの経済性を比較した．そこでは，問題を Stackelberg ゲームとして定式化し，Stackelberg 均衡を論じることで，消費者の反応を考慮した生産者の最適戦略について考察した．本研究では先の研究を拡張し，単一ユニットシステムと n ユニット並列システムとの経済性を比較する．

2. 仮定と記号

(1) 生産者は，平均寿命 μ のユニットを用いて，単一ユニットシステムと n ユニット並列システムの２種類のシステムを生産する ($n \geq 2$)．また，ユニットの故障時間は指数分布に従うものとする．

(2) ユニットの製造原価とシステムインタフェイスの原価の合計をシステムの製造原価とする．

(3) 一つのユニットの製造原価を $a(\mu)$ とする．なお，$a(\mu)$ は μ に関して増加関数である．

(4) 単一ユニットシステム，n ユニット並列システムのシステムインタフェイスの原価をそれぞれ b, $\alpha b(\alpha \geq 1,\ b > 0)$ とする．

(5) 単一ユニットシステム，n ユニット並列システムの価格を P_1, $P_n(\geq P_1)$ とする．

(6) 対象のシステムに関して独占市場を仮定する．

(7) システムを使用することにより，消費者は単位時間あたり r の収益を上げることができる．

3. 解析

3.1 消費者の期待利益と最適反応

単一ユニットシステムを購入した消費者の期待利益は

$$\Pi_1 = r\mu - P_1 \tag{1}$$

である．

一方，n ユニット並列システムの平均寿命は，ユニットの故障時間が指数分布に従うという仮定 (1) より $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ となる [2][3]．以下，$S_1^n \equiv \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，$S_2^n \equiv \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$ と記す．すると，n ユニット並列システムを購入した消費者の期待利益は以下のようになる．

$$\Pi_n = r\mu S_1^n - P_n. \tag{2}$$

最後に，いずれのシステムも購入しない場合の消費者の期待利益は $\Pi_0 = 0$ である．

ここで，消費者のオプションを次のように定義する．

オプション A_1：単一ユニットシステムを購入．

オプション A_n：n ユニット並列システムを購入．

オプション A_0：いずれのシステムも購入しない．

このとき，以上に導出した消費者の期待利益 $\Pi_i(i = 0, 1, n)$ の大小比較を行い，$\Pi_i > \Pi_j\ (i \neq j)$ ならば，消費者はオプション A_j よりオプション A_i を選好することになる．よって，消費者の最適反応は以下のようになる．

(1) $(P_n, \mu) \in \Omega_1\backslash(\Omega_0 \cup \Omega_n)$ ならば，オプション A_1 を選択することが消費者にとって最適である．

(2) $(P_n, \mu) \in \Omega_n\backslash(\Omega_0 \cup \Omega_1)$ ならば，オプション A_2 を選択することが消費者にとって最適である．

(3) $(P_n, \mu) \in \Omega_0\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_n)$ ならば，オプション A_0 を選択することが消費者にとって最適である．

(4) $(P_n, \mu) \in \Omega_i \cap \Omega_j\ (i, j = 0, 1, n,\ i \neq j)$ ならば，オプション A_i とオプション A_j とは無差別である．

ここで領域 $\Omega_i(i = 0, 1, n)$ は図 1 で示されるような領域であり，以下のように定義される．

$$\Omega_1 = \left\{(P_n, \mu) \middle| \ \mu \geq \frac{P_1}{r},\ \mu \leq \frac{P_n - P_1}{rS_2^n}\right\}, \tag{3}$$

$$\Omega_n = \left\{(P_n, \mu) \middle| \ \mu \geq \frac{P_n - P_1}{rS_2^n},\ \mu \geq \frac{P_n}{rS_1^n},\ P_n \geq P_1\right\}, \tag{4}$$

$$\Omega_0 = \left\{(P_n, \mu) \middle| \ \mu \leq \frac{P_n}{rS_1^n},\ \mu \leq \frac{P_1}{r},\ P_n \geq P_1,\ \mu \geq 0\right\}. \tag{5}$$

3.2 生産者の利益と最適戦略

消費者が単一ユニットシステム，n ユニット並列システムを購入した場合の生産者の利益はそれぞれ以下

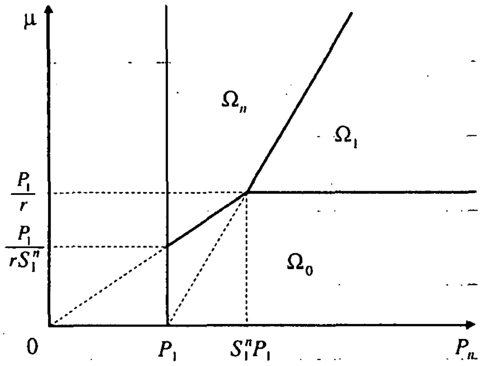

図 1: 消費者の最適反応

のようになる.

$$Q_1 = P_1 - [a(\mu) + b], \tag{6}$$

$$Q_n = P_n - [na(\mu) + \alpha b],\ (\alpha \geq 1). \tag{7}$$

$(P_n, \mu) \in \Omega_1 \backslash (\Omega_0 \cup \Omega_n)$ のとき，生産者の利益は式 (6) で与えられる．$a(\mu)$ が μ に関して増加であることから，生産者の利益の最大値は

$$Q_1^* = \lim_{\theta \to P_1 \triangleleft r+0} \{P_1 - [a(\mu) + b]\} \tag{8}$$

であり，$a(\mu)$ が $\mu = \frac{P_1}{r}$ で右連続であれば次式を得る.

$$Q_1^* = P_1 - a\left(\frac{P_1}{r}\right) - b. \tag{9}$$

$(P_n, \mu) \in \Omega_n \backslash (\Omega_0 \cup \Omega_1)$ のとき，生産者の利益は式 (7) で与えられる．よって，生産者利益の最大値は

$$Q_n^* = \sup_{(P_n, \theta) \in \Omega_n \backslash (\Omega_0 \cup \Omega_1)} \{P_n - [na(\mu) + \alpha b]\} \tag{10}$$

である．さらに，$a(\mu)$ が右連続であれば，Q_n^* は次の曲線上に存在する.

$$\mu = \frac{P_n}{rS_1^n}, \quad P_1 \leq P_n \leq S_1^n P_1, \tag{11}$$

$$\mu = \frac{P_n - P_1}{rS_2^n}, \quad P_n \geq S_1^n P_1. \tag{12}$$

Q_n^* の存在範囲について，以下の定理が成立する.

定理 1 Q_n^* をとるときの (P_n, μ) の値を (P_n^{**}, μ^{**}) とする．$a(\mu)$ が μ に関して C^2 級で凸関数であるとき，Q_n^* に関して以下のことが言える．ただし，$\frac{da(\theta)}{d\theta} = a'(\mu)$ とする.

(1) $\frac{r}{n}S_1^n < a'(\frac{P_1}{rS_1^n})$ のとき，

$$(P_n^{**},\ \mu^{**}) = (P_1,\ \frac{P_1}{rS_1^n}), \tag{13}$$

$$Q_n^* = P_1 - [n\,a(\frac{P_1}{rS_1^n}) - \alpha b]. \tag{14}$$

(2) $a'(\frac{P_1}{rS_1^n}) \leq \frac{r}{n}S_1^n \leq a'(\frac{P_1}{r})$ のとき，(P_n^{**}, μ^{**}) は曲線 (11) 上にただ一つ存在する．このとき，

$$a'(\mu^{**}) = \frac{r}{n}S_1^n \tag{15}$$

が成立する.

(3) $\frac{r}{n}S_2^n < a'(\frac{P_1}{r}) < \frac{r}{n}S_1^n$ のとき，

$$(P_n^{**},\ \mu^{**}) = (S_1^n P_1,\ \frac{P_1}{r}), \tag{16}$$

$$Q_n^* = S_1^n P_1 - [n\,a(\frac{P_1}{r}) - \alpha b]. \tag{17}$$

(4) $a'(\frac{P_1}{r}) \leq \frac{r}{n}S_2^n$ のとき，(P_n^{**}, μ^{**}) は曲線 (12) 上にただ一つ存在する．このとき，

$$a'(\mu^{**}) = \frac{r}{n}S_2^n \tag{18}$$

が成立する.

$(P_n, \mu) \in \Omega_0 \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_n)$ のとき，消費者はいずれのシステムも購入しない．よって，生産者の利益は $Q_0^* = 0$ である.

よって，生産者の最適戦略は次のようになる.

(1) $\max(Q_1^*, Q_n^*, Q_0^*) = Q_1^*$ ならば，

$$P_n^* > S_1^n P_1, \quad \mu^* \to \frac{P_1}{r} + 0 \tag{19}$$

を満足するよう (P_n^*, μ^*) を設定すればよい．この場合，消費者に単一ユニットシステムを購入させることにより，生産者は自らの利益を最大化できる.

(2) $\max(Q_1^*, Q_n^*, Q_0^*) = Q_n^*$ ならば，$Q_n = Q_n^*$ となるよう (P_n, μ) を設定すればよい．この場合，消費者に n ユニット並列システムを購入させることにより，生産者は自らの利益を最大化できる.

(3) $\max(Q_1^*, Q_n^*, Q_0^*) = Q_0^*$ であれば，消費者が単一ユニットシステム，n ユニット並列システムのいずれも購入しないようにすることが，生産者にとって最適である．これには $(P_n^*, \mu^*) \in \Omega_0 \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_n)$ でありさえすればよい.

紙面の都合上，数値例は当日発表させて頂く.

参考文献

[1] 小出武，三道弘明，独占市場における単一，並列システムの比較，2004 年度日本 OR 学会秋季研究発表会アブストラクト集，310-311，2004.

[2] 三根久，河合一，信頼性・保全性の数理，朝倉書店，1982.

[3] 三根久，河合一，信頼性・保全性の基礎数理，日科技連，1984.