日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

信号確認による定期診断の最適方策

01400043　愛知工業大学　*中川覃夫　NAKAGAWA Toshio
02602443　金城学院大学　水谷聡志　MIZUTANI Satoshi

1　はじめに

障害の発生を検出するため，監視対象となるユニットは，監視機構に対して，定期的に信号を送信するシステムを考える．この信号が途切れたならば，ユニットに障害が発生したと判断して，外部に報告する [1]．同様の障害診断方法として，監視機構が，ユニットに対して信号を定期的に送信し，応答を確認するハートビートがある．これは，サーバを複数台使用して冗長化することにより，システムとしての停止時間を最小に抑えるHA(High Availability) クラスタにおいて，サーバの死活監視として用いられる [2]．

このような，定期的に信号確認による障害検出を行うシステムに対する最適方策を考える．ここでは，一台のユニットを監視する方策について考える．ユニットから信号が送信されてから，それを監視機構が確認するまでの時間は，確率分布に従うと仮定する．信号の送信からある一定時間，信号が途切れたとき，故障が発生したと判定する．ここでは，この一定時間を信号確認時間とよぶ．信号確認時間が小さいと，障害が発生していないのに，誤って障害発生を報告してしまう可能性がある．一方で，大きいと障害の発見が遅れることになる．また，信号確認時間を一定とするとき，定期診断の時間間隔が大きくなると，障害検出が遅れる可能性が高くなり，小さくなると，診断を頻繁に実施することによる性能劣化を招くおそれがある．

本研究では，このようなモデルに対し，障害の発生または誤りにより，監視機構が障害発生を確認するまでの期待時間，総期待費用と単位時間当りの期待費用を解析的に導出する．また，期待費用を最小にする最適な定期診断間隔について，最適方策を導出する．

2　モデル化

$F(t)$　有限な平均 $1/\lambda$ をもつ故障時間分布．

T　信号を送ってから，次の信号送信までの時間間隔を表す定数．すなわち，定期診断の時間間隔．

τ　信号を送信してから監視機構がそれを確認するまでの時間の上限．この時間だけ待っても応答がないならば，ユニットは故障したものとみなす．

p　信号確認時間の間に，監視機構が信号を確認できない確率．すなわち，$p \equiv \Pr\{X > \tau\}$．また，$q \equiv 1-p$ とおく．

c_1　信号による診断を一回行うのに要する性能劣化のための損失費用．

c_2　故障した時間にかかる単位時間当たりの損失費用．

c_{01}　ユニットに故障が発生し，それを検出したときに要する保全・取替費用．

c_{02}　ユニットが故障していないのに，信号確認が遅れたための故障と判断した場合に要する保全・取替費用（$c_{02} \leq c_{01}$）．

障害は発生していないが，信号確認時間の間に信号が確認されない確率は，

$$\sum_{j=1}^{\infty} pq^{j-1}\overline{F}(j(T+\tau)) \tag{1}$$

である．また，障害が発生したため信号が確認されない確率は，

$$\sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1}\int_{(j-1)(T+\tau)}^{j(T+\tau)} dF(t) = \sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1}\{\overline{F}((j-1)(T+\tau)) - \overline{F}(j(T+\tau))\} \tag{2}$$

である．

信号確認の間，信号が確認されない事態が発生するまでの総期待費用 $C_1(T;\tau)$ は，

$$C_1(T;\tau) = [c_1 + c_2(T+\tau)]\sum_{j=0}^{\infty} q^j\overline{F}(j(T+\tau)) + c_{01} - (c_{01}-c_{02})\sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1}p\overline{F}(j(T+\tau)) - c_2\sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1}\int_{(j-1)(T+\tau)}^{j(T+\tau)} \overline{F}(t)dt \tag{3}$$

である．同様に，信号が確認されない事態が発生するまでの期待時間は，次式で与えられる．

$$(T+\tau)\sum_{j=0}^{\infty} q^j \overline{F}(j(T+\tau)). \tag{4}$$

3　最適方策 1

信号が確認されない事態が発生するまでの総期待費用 $C_1(T;\tau)$ を，最小にする最適な T^* を導出する．明らかに，

$$C_1(0;\tau) = (c_1+c_2\tau)\sum_{j=0}^{\infty} q^j \overline{F}(j\tau) - c_2\sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1}\int_{(j-1)\tau}^{j\tau}\overline{F}(t)dt + c_{01} - (c_{01}-c_{02})\sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1}p\overline{F}(j\tau)$$

$$C_1(\infty;\tau) = \infty$$

$$C_1(T;0) = c_1 + c_{02} + c_2\int_0^T F(t)dt$$

である．ここで，$p=1$，$q=0$ とおくと，

$$C_1(T;\infty) = \infty$$

となる．また，$q\equiv 1$，$\tau=0$ とおくと，

$$C_1(T;0) = (c_1+c_2T)\sum_{j=0}^{\infty}\overline{F}(jT) - \frac{c_2}{\lambda} + c_{01}$$

となり，従来の定期点検モデルと一致する．

$F(t)=1-e^{-\lambda t}$，$0<\tau<\infty$ のとき，

$$C_1(T;\tau) = \frac{c_1 + c_2(T+\tau) - \frac{c_2}{\lambda}(1-e^{-\lambda(T+\tau)}) - (c_{01}-c_{02})pe^{-\lambda(T+\tau)}}{1-qe^{-\lambda(T+\tau)}} + c_{01} \tag{5}$$

である．

$C_1(T;\tau)$ を T で微分して 0 とおくと次式を得る．

$$\frac{e^{\lambda(T+\tau)}-1}{\lambda} - q(T+\tau) = \frac{qc_1-(c_{01}-c_{02})p}{c_2} \tag{6}$$

左辺を $L_1(T;\tau)$ とおく．このとき，次の最適方策を得る．

(i) $L_1(0;\tau) > [qc_1-(c_{01}-c_{02})p]/c_2$ ならば，(6) 式を満たす有限で唯一の T^* $(0<T^*<\infty)$ が存在する．

(ii) $L_1(0;\tau) \le [qc_1-(c_{01}-c_{02})p]/c_2$ ならば，$T^*=0$ である．

4　最適方策 2

単位時間当りの期待費用 $C_2(T;\tau)$ は，

$$C_2(T;\tau) = \frac{c_1+c_2(T+\tau)}{T+\tau} - \frac{-c_2\sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1}\int_{(j-1)(T+\tau)}^{j(T+\tau)}\overline{F}(t)dt + c_{01} - (c_{01}-c_{02})\sum_{j=1}^{\infty} q^{j-1}p\overline{F}(j(T+\tau))}{(T+\tau)\sum_{j=0}^{\infty} q^j\overline{F}(j(T+\tau))} \tag{7}$$

である．とくに，$F(t)=1-e^{-\lambda t}$ のとき，

$$C_2(T;\tau) = \frac{c_1 - \frac{c_2}{\lambda}(1-e^{-\lambda(T+\tau)}) + c_{01} - (c_{01}-c_{02})pe^{-\lambda(T+\tau)}}{T+\tau} + c_2$$

となる．明らかに，

$$C_2(0;\tau) = \frac{c_1 - \frac{c_2}{\lambda}(1-e^{-\lambda\tau}) + c_{01} - (c_{01}-c_{02})pe^{-\lambda\tau}}{\tau} + c_2$$

$$C_2(\infty;\tau) = c_2$$

である．

$C_2(T;\tau)$ を T で微分して 0 とおくと次式を得る．

$$\left[\frac{c_2}{\lambda} - (c_{01}-c_{02})p\right]\{1-[1+\lambda(T+\tau)]e^{-\lambda(T+\tau)}\} = c_1 + c_{01}q + c_{02}p \tag{8}$$

このとき，次の最適方策を得る．

(i) $c_1+c_{01}q+c_{02}p < L(0)$ ならば，$T^*=0$．

(ii) $L(0) < c_1+c_{01}q+c_{02}p < L(\infty)$ ならば，有限な T^* $(0<T^*<\infty)$ が存在する．

(iii) $L(\infty) < c_1+c_{01}q+c_{02}p$ ならば，$T^*=\infty$．

参考文献

[1] フジ・テクノシステム，NTS 共編，“設備診断予知保全実用事典，” フジ・テクノシステム，1988.

[2] 小野寺大輔，佐藤雄樹，猪股俊光，曽我正和，“相互監視による高信頼度分散システム (ハートビート発生方式)”，電子情報通信学会ソサイエティ大会講演論文集，2003.