日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

保有有価証券資金化の最適執行方策

01014433 金城学院大学　＊中村　正治 NAKAMURA Syouji
01402793 金城学院大学　荒深　美和子 ARAFUKA Miwako
01400043 愛知工業大学　中川　覃夫 NAKAGAWA Toshio

1. はじめに

保有する証券を短期間に市場で売却可能である場合，その証券売却が市場価格に与える影響（マーケット・インパクト）を考慮して，保有証券の資金化額を最大にする最適執行方策を導出する．証券売却の市場価格への影響は，市場に追加的な売却を行えば価格は低下すると仮定する．しかしながら，証券の追加的な売却の影響はある程度の期間が経過すればなくなる，すなわち，市場価格は売却前の価格に復帰すると仮定する．

2. モデル

保有証券を市場で売却する場合，市場価格に与えるマーケット・インパクトを考慮した最適執行方策を解析的に導出する．市場は以下のように構成されていると仮定する．

(i) 証券の売却ロットを小さくすれば，マーケット・インパクトによる価格低下を小さくすることができる．

(ii) (i) 以外によって市場の価格は変動しない．

(iii) 証券売却後ある時間間隔を置けば，価格は売却前の価格になる．

(iv) 証券売却には証券のロットに無関係な取引コストと証券ロットに関係した取引コストが必要である．

一般的に,「マーケット・インパクトは多様な要因により決定されるため，これを定式化するのは容易ではない．このため，定式化の方法に一定のコンセンサスが得られている訳ではなく，学界・実務界でもさまざまなアプローチが試みられている」[2].

ここでは，売却ロットを小さくすれば，価格低下を押さえることができるが，売却回数が増加し取引コストが逓増する．逆に，売却ロットを大きくすれば，価格低下の幅が大きくなる，しかしながら取引コストは減少する．以上のようなトレード・オフ状況において最適執行方策を導出する．

ここで，以下の記号を導入する．

S_0: 時点 0 の証券の名目価値.

$E(n)$: 時点 n の証券の実質価値.

c_0: 1 回あたり取引の固定費用.

λ: マーケット・インパクト関数パラメータ

μ: 価格復元関数パラメータ

3. モデル 1

時刻 0 における保有証券 S_0 を時刻 T までに資金化しなければならないとする．保有証券を 1 回で全て売却しても良いし，n 等分して毎日売却してもよい．市場価格は，インパクト関数によって，売却量に応じて低下するが，1 日の間隔を置けば売却前の価格に復元すると仮定する．モデル 1 では，売却後，時点 T までの受取利息が発生しない場合を想定している．1 回の売却額 S_0/n の資金化額は $\frac{S_0}{n}(1-e^{-\lambda\frac{n}{S_0}})$ とし，1 回の手数料を c_0 とおく．

$$\frac{S_0}{n}(1-e^{-\lambda\frac{n}{S_0}})-c_0, \tag{1}$$

n 回の総資金化額は

$$\begin{aligned} E_1(n) &= n\left\{\frac{S_0}{n}(1-e^{-\lambda\frac{n}{S_0}})-c_0\right\} \\ &= S_0(1-e^{-\lambda\frac{n}{S_0}})-nc_0. \end{aligned} \tag{2}$$

よって，保有有価証券 S_0 当たりの資金化額は，

$$Z_1(n)=\frac{E_1(n)}{S_0}=1-e^{-\lambda\frac{n}{S_0}}-\frac{n}{S_0}c_0 \tag{3}$$

となり，資金化額 $Z_1(n)$ を最大にする n^* を求める．

3.1. モデル 1 の最適方策

$Z_1(n)$ が最大となる $n*$ を求める．

$$Z_1(1)=1-e^{-\lambda S_0}-c_0, \qquad Z_1(\infty)=-\infty \tag{4}$$

である．$Z_1(n+1)-Z_1(n)\le 0$ とおくと，

$$e^{-\lambda\frac{n}{S_0}}(1-e^{-\lambda/S_0})=\frac{c_0}{S_0} \tag{5}$$

左辺を $L(n)$ とおくと，$L(n)$ は $L(1)$ から，0 の単調減少関数で，

(i) $e^{-\lambda/S_0}(1-e^{-\lambda/S_0})\le\frac{c_0}{S}$ ならば，$n^*=1$，すなわち，1 回で保有証券を売却する．

(ii) $e^{-\lambda/S_0}(1-e^{-\lambda/S_0})>\frac{c_0}{S}$ ならば，式 (5) を満たす最小の $n^*(2\le n^*<\infty)$ が存在する．

4. モデル 2

証券市場に売り注文が累積してくると，需給関係から証券価格が低下してくると仮定する．さらに，モデル 1 と同様に，市場価格は，インパクト関数により，売却量に応じて低下する．時間を考慮して，$t_0 = 0, T, 2T, \ldots, (n-1)T$ で保有証券を n 等分した $\frac{S_0}{n}$ を T 時間ごとに市場で売却する．時刻 jT における資金化額を

$$\left\{\frac{S_0}{n}(1-e^{-\lambda\frac{n}{S_0}})-c_0\right\}e^{-\alpha jT} \quad (j=0,\ldots,n-1) \quad (6)$$

とおく．n 回の総資金化額は，

$$\begin{aligned} E_2(n) &= \left\{\frac{S_0}{n}(1-e^{-\lambda\frac{n}{S_0}})-c_0\right\} \\ &\quad \times(1+e^{-\alpha T}+\ldots+e^{-\alpha(n-1)T}) \\ &= \left\{\frac{S_0}{n}(1-e^{-\lambda\frac{n}{S_0}})-c_0\right\}\frac{1-e^{-\alpha nT}}{1-e^{-\alpha T}} \quad (7) \end{aligned}$$

式 (7) において，$\alpha \to 0$ とすると，式 (2) に一致する．よって，保有有価証券 S_0 当たりの資金化額は，

$$Z_2(n) = \frac{E_2(n)}{S_0} = \left\{\frac{1}{n}(1-e^{-\lambda\frac{n}{S_0}})-\frac{c_0}{S_0}\right\}\frac{1-e^{-\alpha nT}}{1-e^{-\alpha T}} \quad (8)$$

を最大にする n^* を求める．

4.1. モデル 2 の最適方策

資金化額 $Z_2(n)$ が最大となる $n*$ を求める．

$$\begin{aligned} Z_2(1) &= 1-e^{-\lambda/S_0}-\frac{c_0}{S_0} \\ Z_2(\infty) &= -\frac{c_0}{S_0(1-e^{-\alpha T})} \end{aligned} \quad (9)$$

である．現実の取引では，$Z_2(1) > 0$ である．また，$Z_2(\infty) < 0$ から，$Z_2(n) > 0$ となる有限な $n*$ が存在する

5. モデル 3

証券市場の機能がモデル 1, モデル 2 の仮定に加えて，証券売却によるマーケット・インパクトの価格低下から価格上昇に向けての復元を関数で与える．
時刻 T_0 での資金化額は，

$$\frac{S_0}{n}(1-e^{-\lambda\frac{n}{S_0}})-c_0 \quad (10)$$

時刻 T_1 での資金化額は，$\frac{S_0}{n}(1-e^{-\lambda\frac{n}{S_0}})e^{\mu T_1} = Q_1$ とおくと，

$$\left\{Q_1(1-e^{-\lambda/Q_1})-c_0\right\}e^{-\alpha T_1} \quad (11)$$

時刻 T_2 での資金化額は，$\frac{S_0}{n}(1-e^{-\lambda\frac{n}{S_0}})e^{\mu(T_2-T_1)} = Q_2$ とおくと，

$$\left\{Q_2(1-e^{-\lambda/Q_2})-c_0\right\}e^{-\alpha T_2} \quad (12)$$

となり，以上より n 回の総資金化額は

$$E_3(n) = \sum_{j=0}^{n-1}\left\{Q_j(1-e^{-\lambda/Q_j})-c_0\right\}e^{-\alpha T_j} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} Q_{j+1} &= Q_j(1-e^{-\lambda/Q_j})e^{\mu(T_{j+1}-T_j)} \\ &\qquad (j=0,\ldots,n-2) \\ Q_0 &\equiv \frac{S_0}{n} \end{aligned} \quad (14)$$

よって，式 (14) から順次 Q_j を求め，式 (??) に代入することによって，$E_3(n)$ を求める．さらに，

$$Z_3(n) = \frac{E_3(n)}{S_0} \quad (15)$$

を最大にする $n*$ を求める．

5.1. モデル 3 の最適方策

$n \to \infty$ とすると，$Q_0, Q_1, \ldots, Q_\infty = 0$，から，

$$\begin{aligned} Z_3(1) &= (1-e^{-\lambda/S_0}-\frac{c_0}{S_0}) \\ Z_3(\infty) &< 0 \end{aligned} \quad (16)$$

現実の取引では，$Z_3(1) > 0$ である．よって，$Z_3(n)$ を最大にする有限な $n*$ が存在する．

6. まとめ

ここでは，マーケット・インパクトの定式化している．マーケット・インパクトのメカニズムは複雑で定式化が容易ではない [2]．しかしながら，決定的な理論も現在のところない．2005 年 1 月 7 日発表された JR 東日本の政府保有株が全額売却になる．政府は市場の状況を見て売却すると発表している．このように大量の証券が市場に売却される場合や取り扱い量の少ない銘柄における証券売却とでは，マーケット・インパクトが異なってくることが考えられる．このようにマーケット・インパクトは複雑であるが，ここでは，後者を想定したモデルである．今後の課題として，実市場とモデルの比較検討が必要である．

参考文献

[1] 久田祥史，山井康浩，流動性リスク評価方法の実用化に向けた研究，金融研究 2000.9，2000 年

[2] 小田信之，久田祥史，山井康浩，流動性リスク評価方法について：理論サーベイと実用化へ向けた課題，金融研究 2000.3，2000 年

[3] R.Jarrow and S.Turnbul, *Derivative Securities*. Thomson Learning Company, 1973.