日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

無償修理保証契約下での不完全 EMQ モデルと最適点検スケジュール

ビブハス C. ギリ †, 土肥 正 ‡ (01307065)
†Vivekananda College, ‡ 広島大学大学院工学研究科

1. まえがき

安定状態から不安定状態へと確率的に移行する生産システムに対して，逐次最適点検問題を議論する．Tseng [1] は劣化を伴う不完全 EMQ (Economic Manufacturing Quantity) モデルに予防保全の概念を導入した．後に Makis [2] は，定常状態における単位時間当たりの期待費用を最小にする最適ロットサイズと点検スケジュールを導出した．Wang [3] は，生産ロットの終了直前に 1 回のみ点検を行うという簡略化された仮定と無償修理保証契約下で，ロットサイズを決定するモデルを提案した．本稿では，Makis モデル [2] に無償修理保証契約の考え方を導入し，さらに 2 種類の異なる点検方策の下で無限計画期間における総期待割引費用を最小にする最適もしくは準最適な点検回数及び点検時刻列を求める．

2. モデルの記述

生産速度 $p\ (>d)$ に対して需要が時間に関して一様に $d\ (>0)$ の割合で発生する EMQ モデルを考える．生産システムの状態は安定状態 (in-control state) から不安定状態 (out-of-control state) に移行し，不安定状態に移行するまでの時間は確率分布 $F(\cdot)$，密度 $f(\cdot)$，故障率 $r(\cdot)$ の非負値確率変数である．生産期間 $T\ (=T_n)$ 中に $n\ (\geq 1)$ 回の点検を実施し，生産システムの状態を監視する．T_i を $i\ (=1,2,\cdots,n)$ 番目の点検時刻とし，$t_i = T_i - T_{i-1}$ $(T_0=0)$ をその時間間隔とする．

θ_1 並びに $\theta_2\ (>\theta_1)$ は安定状態と不安定状態のそれぞれにおいて製造された製品が不良品 (non-conforming items) である確率であり，良品と不良品が出荷された後に故障するまでの寿命分布を $F_1(t)$ 並びに $F_2(t)$，故障率を $r_1(t)$, $r_2(t)$ $(r_2(t) >> r_1(t),\ 0 \leq t < \infty)$ とする．製品出荷後，無償修理保証期間 $w\ (>0)$ 中に製品が故障した場合は小修理を実施する．時刻 T で製品の製造は終了し，生産システムの予防保全が実施される．需要は一様に発生するため，在庫レベルが 0 になった時点で再度新しい生産ロットを立ち上げ，同様なサイクルが繰返される．

各点検時刻 T_i において生産システムが不安定であった場合，システムの復旧 (restoration) が実施され，不安定状態は安定状態へと回復する．本稿では 2 種類の点検方策を考える．点検時にシステムが安定状態であった場合，点検方策 1 では何も行動がとられないのに対し，方策 2 では予防保全が実施され，不安定状態への移行時間分布は初期化されるものと仮定する．費用パラメータを以下のように定義する．$c_s\ (>0)$:ロット当りの固定費用，$c_m\ (>0)$:製品 1 単位当りの生産費用，$c_h\ (>0)$:単位製品・時間当たりの在庫維持費用，$c_r\ (>0)$:小修理費用，$v_0\ (>0)$:点検費用，$v_1\ (>0)$:予防保全費用，$\rho\ (>0)$:点検による発見遅れ時間当たりの復旧費用，$\delta\ (>0)$:割引率．

3. 点検方策 1

まず最初に，生産開始時点から次の生産開始時点までの時間間隔を 1 サイクルとして定義する．1 サイクル中に発生する在庫維持費用に関する総期待割引費用は

$$c_h\left[\int_0^T (p-d)ze^{-\delta z}dz + \int_T^{pT/d}(pT-dz)e^{-\delta z}dz\right] \quad (1)$$

となる．

補助定理 3.1 [1]: 各点検時刻 $T_j\ (i=1,2,\cdots,n)$ において復旧が実施される確率 $P_j\ (P_0=1)$ は

$$P_j = \sum_{i=0}^{j-1} P_i\Big\{F(T_j - T_i) - F(T_{j-1} - T_i)\Big\} \quad (2)$$

である．

補助定理 3.2: 点検時間間隔 $t_i = (T_{i-1}, T_i]\ (i=1,2,\cdots,n)$ 中に製造される不良品数 N_i の期待値は

$$\begin{aligned} E[N_i] \ &= \ \sum_{j=0}^{i-1} P_j\Big[\int_{T_{i-1}-T_j}^{T_i-T_j}\Big\{p\theta_1(\tau_j - T_{i-1-j}) \\ &\quad + p\theta_2(T_i - T_j - \tau_j)\Big\}dF(\tau_j) \\ &\quad + p\theta_1(T_i - T_{i-1})\overline{F}(T_i - T_j)\Big] \end{aligned} \quad (3)$$

となる．

補助定理 3.3: 点検方策 1 の下で，1 回のロット中に生産される不良品の割合は

$$\begin{aligned} \Delta_{12} \ &= \ \frac{1}{pT}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1} P_j\Big[\int_{T_{i-1}-T_j}^{T_i-T_j}\Big\{p\theta_1(\tau_j - T_{i-1-j}) \\ &\quad + p\theta_2(T_i - T_j - \tau_j)\Big\}dF(\tau_j) \\ &\quad + p\theta_1(T_i - T_{i-1})\overline{F}(T_i - T_j)\Big] \end{aligned} \quad (4)$$

となり，良品の割合は $\Delta_{11} = 1 - \Delta_{12}$ である．

定理 3.1: 点検方策 1 の下で，1 サイクル当りの総期待生産費用と期待補償費用をそれぞれ $A(n, T_1, T_2, \cdots, T_n)$, $B(T_1, T_2, \cdots, T_n)$ として定義する．このとき，無限計画期間における総期待割引費用は

$$TC_1(n, T_1, T_2, \cdots, T_n) \ = \ \frac{C_1(n, T_1, T_2, \cdots, T_n)}{1 - e^{-\delta(pT_n/d + w)}} \quad (5)$$

となる．ここで，

$$C_1(n,T_1,T_2,\cdots,T_n) = A(n,T_1,T_2,\cdots,T_n) + B(T_1,T_2,\cdots,T_n), \tag{6}$$

$$\begin{aligned} A(n,T_1,T_2,\cdots,T_n) =& \\ & c_s + c_m pT_n e^{-\delta T_n} + \sum_{i=1}^{n} v_0 e^{-\delta T_i} \\ & + v_1 \sum_{j=0}^{n-1} P_j \overline{F}(T_n - T_j) e^{-\delta T_n} \\ & + \frac{c_h}{\delta^2}\Big[(p-d)(1-e^{-\delta T_n}) + d(e^{-\delta p T_n/d} - e^{-\delta T_n})\Big] \\ & + \rho \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} P_j \int_{T_{i-1}-T_j}^{T_i-T_j} \int_0^{T_i-T_j-\tau_j} e^{-\delta(T_j+\tau_j+y)} \\ & \times dy dF(\tau_j), \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} B(T_1,T_2,\ \cdots,\ T_n) =& \\ & c_r \int_0^{pT_n/d} \Big\{ \int_0^w d\Delta_{11} e^{-\delta(z+t)} r_1(t) dt \\ & + \int_0^w d\Delta_{12} e^{-\delta(z+t)} r_2(t) dt \Big\} dz. \end{aligned} \tag{8}$$

これより問題は，総期待割引費用 $TC_1(n,T_1,T_2,\cdots,T_n)$ を最小にする点検回数 n^* 並びに点検時刻列 $\{T_1^*,T_2^*,\cdots,T_n^*\}$ を求める問題に帰着される．この問題は整数と実数が混在する制約付非線形計画問題であり，pattern search などの non-gradient based search technique を用いる以外は，特に効率的な解法は存在しない．ここでは **3.** で述べた最適化問題を近似的に解くことを考える．すなわち，点検時間間隔は相対的に短く，各点検時間間隔中の累積ハザードは近似的に不変であると仮定する (Munford [4])．すなわち，

$$\int_{T_j}^{T_{j+1}} r(t)dt = \int_0^{T_1} r(t)dt, \quad j = 0,1,2,\cdots,n-1. \tag{9}$$

さらに，不安定状態への移行時間は次のようなワイブル分布

$$f(t) = \lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1} e^{-(\lambda t)^\beta}, \quad t>0, \quad \beta \geq 1, \quad \lambda > 0,$$

に従うものとする．

定理 3.2: 点検方策 1 の下で，ワイブル寿命分布の場合における準最適点検時刻列は

$$T_j = (T_{j-1}^\beta + T_1^\beta)^{1/\beta}, \quad j = 1,2,\cdots,n \tag{10}$$

の関係式を満足し，総期待割引費用は n と T_1 の関数

$$TC_1(n,T_1) = \frac{C_1(n,T_1)}{1-e^{-\delta(pT_n/d+w)}} \tag{11}$$

として表現される．

定理 3.3: 任意の点検回数 n に対して，

(i) $t_1^0 \geq t_2^0 \geq t_3^0 \geq \cdots \geq t_n^0$. ここで，$t_j^0 = T_j^0 - T_{j-1}^0$，$\forall j = 1,2,\cdots,n$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n t_j^0 = \infty$,

(iii) $\beta = 1$ の時，$t_j^0 = t_1^0$，$\forall j = 2,3,\cdots,n$，

の性質を満たす準最適な点検時刻列 $\{T_1^0,T_2^0,\cdots,T_n^0\}$ が存在する．

4. 点検方策 2

次に，点検方策 2 の下で最適点検スケジュールを決定するためのモデルについて考察する．

補助定理 4.1: 点検方策 2 において，1 回のロット中に生産される不良品の割合は

$$\begin{aligned} \Delta_{22} =& \frac{1}{pT} \sum_{i=1}^n \Big[\int_0^{t_i} \{p\theta_1 t \\ & + p\theta_2(t_i - t)\} dF(t) + \int_{t_i}^\infty p\theta_1 t_i dF(t) \Big] \end{aligned} \tag{12}$$

となり，良品の割合は $\Delta_{21} = 1 - \Delta_{22}$ である．

定理 4.1: 点検方策 2 の下で，無限計画期間における総期待割引費用は

$$TC_2(n,t_1,t_2,\cdots,t_n) = \frac{C_2(n,t_1,t_2,\cdots,t_n)}{1-e^{-\delta(pT/d+w)}} \tag{13}$$

となる．ここで，$T = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$ および

$$\begin{aligned} C_2(n,t_1,t_2,\cdots,t_n) =& \\ & \Big[c_s + c_m pTe^{-\delta T} + \sum_{i=1}^n e^{-\delta \sum_{k=1}^i t_k}(v_0 + v_1 \overline{F}(t_i)) \\ & + \frac{c_h}{\delta^2}\Big\{(p-d)(1-e^{-\delta T}) + d(e^{-\delta pT/d} - e^{-\delta T})\Big\} \\ & + \rho \sum_{i=1}^n \int_0^{t_i} \int_0^{t_i - t} e^{-\delta(\sum_{k=1}^{i-1} t_k + t + y)} dy dF(t) \\ & + c_r d \int_0^{pT/d} e^{-\delta z} \Big\{ \int_0^w \Delta_{21} e^{-\delta t} r_1(t) dt \\ & + \int_0^w \Delta_{22} e^{-\delta t} r_2(t) dt \Big\} dz \Big]. \end{aligned} \tag{14}$$

定理 4.2: 仮定 (i) $dr(t)/dt \leq r^2(t)$, (ii) $f(t) \geq \delta F(t)$ for $0 \leq t \leq T$, (iii) $\theta_1 \to 0$ の下で，任意の n と T に対して総期待割引費用 $TC_2(n,t_1,t_2,\cdots,t_n)$ を最小にする最適点検時間間隔 $\{t_1^*,t_2^*,\cdots t_n^*\}$ が唯一存在するためには，費用関数のヘッセ行列が $(t_1^*,t_2^*,\cdots t_n^*)$ において正定値行列であることである．

定理 4.3: 任意の n と T に対して $\delta \to 0$ ならば，最適な周期的点検時間間隔 $t_1^* = t_2^* = \cdots = t_n^* = T/n^*$ が唯一存在する．

参考文献

[1] S. H. Tseng: Optimal preventive maintenance policy for deteriorating production systems. *IIE Trans.*, **28** (1996) 687–694.

[2] V. Makis: Optimal lotsizing and inspection policy for an EMQ model with imperfect inspections. *Naval Res. Logist.*, **45** (1998) 165–186.

[3] C. H. Wang: The impact of free-repair warranty policy on EMQ model for imperfect production systems. *Computers and Ope. Res.*, **31** (2004) 2021–2035.

[4] A. G. Munford: Comparison among certain inspectionb policies. *Management Sci.*, **27** (1981) 261–267.