日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

安全在庫配置問題における混合整数計画による定式化の比較

東京海洋大学　*若林　篤　WAKABAYASHI Atsushi
02991970　東京海洋大学　呂 国勇 RO Kokuyu
01108010　東京海洋大学　久保幹雄 KUBO Mikio

1　はじめに

わが国の経済活動の発展に伴い，企業は企画・設計・生産・流通・販売・サービスなどは自国のみならず，多国籍へのグローバルな活動がスタンダードとなっている．このような状況下で製品のライフサイクルは，ますます短くなっている．このことから在庫に関しては，どの過程で適正な量を配置決定しなければライフサイクルが切れた時点で製品は死在庫となる．最近では，タクティカルレベルの意思決定で用いられる安全在庫配置モデルが注目を浴びている．この問題に対する解法としては，Graves–Wilem [3] による動的計画法があるが，我々は混合整数計画によるアプローチを試みた．混合整数計画問題として定式化するために，Paderg [2] による非線形関数を区分線形関数に変形する方法（model 1，model 2）を用いた．区分線形関数の定式化の方法としては，model 2 による方法が主流となっているが，本研究では model 1 のほうが，実験により求解時間が良いことを示す．

2　安全在庫問題の定式化

ネットワークモデルにおける安全在庫配置問題は以下のように定式化できる．

ネットワークモデルは，点集合 N は在庫地点を表し，枝 $(i,j)\in A$ が存在するとき，在庫地点 i は在庫地点 j に補充されることを表す．複数の在庫地点から補充を受ける点においては，補充された各々の商品を用いて別の商品を生産すると考える．このとき点 j は，複数の在庫地点から補充を受けるので，点 j が商品を発注してから，すべての商品が揃うまで生産できない．点上で生産される商品は，点によって唯一に定まるものと仮定する．このとき，点と商品を表す添え字は同一であると考えられるので，有向グラフ $G=(N,A)$ は部品展開表を意味する．$(i,j)\in A$ のとき，点 j 上の商品 j は，点 i から補充される商品 i をもとに生産される．商品 j を生産するのに必要な商品 i の量を ϕ_{ij} とする．需要は，後続する点をもたない点 j 上で発生するものとし，その1日あたりの需要量は，期待値 μ_j の定常な分布をもつものとする．点 j における t 日間における需要の最大値を $D_j(t)$ とあらわす．直接の需要をもたない点 (後続点) に対する需要量の期待値 μ_i は

$$\mu_i=\sum_{(i,j)\in A}\phi_{ij}\mu_j$$

と計算できる．点 i に対する t 日間における需要の最大値 $D_i(t)$ は，

$$D_i(t)=t\mu_i+(\sum_{(i,j)\in A}\phi_{ij}(D_{j(t)}-t\mu_j)^p)^{1/p}$$

と計算されるものと仮定する．ここで $p(\geq 1)$ は定数である．p が大きいほど，需要の逆相関が強いことを示している．点 j 上での需要が常に同期していると仮定する場合は $p=1$ となり，点 j 上での需要が独立な正規分布に従うと仮定すると $p=2$ が推奨される．点 j が商品を発注してから，すべての商品が揃うまでの時間 (日数) を入庫リード時間 LI_j による．入庫リード時間は以下の式を満たす．

$$L_i\leq LI_j\qquad\forall(i,j)\in A$$

点 i における安全在庫量 I_i は，正味補充時間内における最大需要量から平均需要量から減じた量であるから

$$I_i=D(LI_i+T_i-L_i)-(LI_i+T_i-L_i)\mu_i$$

となる．よって安全在庫配置問題は以下のように定式化できる．

$$\text{最小化}\sum_{i\in N}h_iI_i$$

$$I_i=D_i(LI_i+T_i-L_i)-(LI_i+T_i-L_i)\mu_i\forall i\in N$$

$$L_i\leq LI_i+T_i\quad\forall i\in N;\tag{1}$$

$$L_i\leq LI_j\quad\forall(i,j)\in A$$

$$L_i\geq 0\quad\forall i\in N$$

ここで，(1) 式は正味補充時間が非負であることを表す． この定式化により，ネットワーク上の安全在庫配置問題に対応できる．しかし安全在庫配置問題には非線形関数が内在するので，混合整数計画問題として解くためには，区分線形関数に近似しなければならない．ここでは，Paderg [2] の方法を用いる．

3　混合整数計画による定式化

3.1　model 1 による区分線形関数

model 1 では x 軸は以下のようにあらわす．

$$x=a_0+y_1+\ldots+y_k$$

ここで y_l は (i)，(ii) を満たす連続変数である．

(i)　$0\leq y_l\leq a_l-a_{l-1}\quad(1\leq l\leq k)$

(ii) $1 \leq l \leq k-1$ に対して $y_{l+1} \geq 0$ なら $y_i = a_i - a_{i-1} (1 \leq i \leq l)$

$$\hat{\phi}(x) = b_0 + \frac{b_1 - b_0}{a_1 - a_0} y_1 + \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} y_2 + \ldots + \frac{b_k - b_{k-1}}{a_k - a_{k-1}} y_k$$

条件 (i),(ii) を 0-1 変数 z_l を用いて定式化すると，以下のようになる．

$$x = a_0 + \sum_{l=1}^{k} y_l, \quad \hat{\phi}(x) = b_0 + \sum_{l=1}^{k} \frac{b_k - b_{k1}}{a_k - a_{k-1}} y_k$$

$$y_1 \leq a_1 - a_0, \qquad y_k \geq 0$$

$$y_l \geq (a_l - a_{l_1}) z_l, \; y_{l+1} \leq (a_{l+1} - a_l) z_l$$

3.2 model 2 による区分線形関数

model 2 では x 軸は以下のようにあらわす．

$$x = a_0 \xi_0 + a_1 \xi_1 + \cdots + a_k \xi_k$$

ここで ξ は以下を満たす実数である．

(i) $\sum_{l=0}^{k} \xi_l = 1, \quad \xi_l \geq 0 \; (0 \leq l \leq k)$

(ii) ある点の区間で ξ_i と ξ_{i+1} の和が 1 になる．

$$\hat{\phi}(x) = b_0 \xi_0 + b_1 \xi_1 + \ldots + b_k \xi_k$$

$$x = \sum_{l=0}^{k} a_l \xi_l, \qquad \hat{\phi}(x) = \sum_{l=0}^{k} b_l \xi_l$$

条件 (i), (ii) を 0-1 変数 η_l を用いて定式化すると以下のようになる．

$$0 \leq \xi_0 \leq \eta_0$$

$$0 \leq \xi_l \leq \eta_{l-1} + \eta_l \quad \forall 1 \leq l \leq k-1$$

$$0 \leq \xi_k \leq \eta_{k-1}$$

$$\sum_{l=0}^{k} \xi_l = 1$$

$$\sum_{l=1}^{k-1} \eta_l = 1$$

4 計算実験

提案した定式化の性能を調べるために，数値実験を行った．例として，Graves–Willems [3] の問題を解いたときの結果を表 1，表 2 に示す．これらの結果から，求解時間，分枝数ともに model 1 の方が良いことが実験によってわかった．このことにより，現在，主流となっている model 2 ではなく model 1 を使用すべきである．なお計算機環境は CPU が 2.60GHz，メモリ 512MB である．

表 1: 求解時間 (秒)

分割数	model 1	model 2
5	7．6	9．3
15	21．5	56．1
30	293．4	6728．3

表 2: 分枝数

分割数	model 1	model 2
5	1881	3611
15	2273	10955
30	9117	561855

5 まとめ

実問題である安全在庫配置問題において本研究で計算実験を行うことにより比較をした．詳しい実験結果は，当日に発表させていただく．

参考文献

[1] 久保幹雄．ロジスティクス工学．朝倉書店，2001.

[2] M. Paderg. *Approximating Separable Nonlinear Functions via Mixed Zero-One Programs.* Operations Research Letters 27,1-5,2000.

[3] S. C. Graves and S. P. Willem. *Supply Chain Design:Safety Stock Placement and Supply Chain Configuration*, A. G. de Kok and S. C. Graves (eds.) *Supply Chain Management: Design, Coordination and Operation* 95-132 Elsevier, 2003.