日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

総完了時刻最小化二機械フローショップ問題に対する優越条件

02701774　神戸商科大学　*柳井 秀三　YANAI Shuzo
01507034　兵庫県立大学　藤江 哲也　FUJIE Tetsuya

1. はじめに

優越テスト (dominance test) は，分枝限定法における限定操作の一つであり，良い下界値 (最小化問題の場合) を計算するのが困難なスケジューリング問題においては重要な技法とされている．このテストは子問題間の優越条件 (dominance criterion)，すなわち，ある子問題が他の子問題に優越されるための十分条件，に基づいている．したがって，条件の強い優越条件を数多く導くことが，分枝限定法の効率向上につながる．

本稿では，各ジョブの完了時刻の総和を最小化する二機械フローショップ問題を扱う．この問題はNP 困難であり [4]，優越条件が [1, 2, 3, 6] 等で提案されている．本稿の目的は，基本補題を用意し，これに基づいて統一的に優越条件を扱うことにある．主な結果は次の通りである．まず，基本補題を使うことによって，既存の優越条件が強化できることを示した．次に，子問題表現の一般化における優越条件が，基本補題から導かれることを示した．さらに，提案する優越条件を組み込んだ分枝限定法を構築し，既存の解法と比較することによってその有効性を示した．紙面の都合上，本稿では基本補題および既存の優越条件の強化を中心に報告する．

2. 問題の定義

ジョブ j $(j = 1, \ldots, n)$ が二台の機械により加工される．各ジョブは，時刻0から加工を開始することができ，機械1，機械2の順に加工される．各時刻において，機械1，機械2は高々一つのジョブしか加工できず，またジョブの加工は中断できない．ジョブ j の機械1，機械2における加工時間をそれぞれ a_j, b_j とする．スケジュールは，ジョブ集合 $N = \{1, \ldots, n\}$ の順列 $S = (S(1), ..., S(n))$ である．スケジュール S に対し，ジョブ j の機械1，機械2における完了時刻をそれぞれ $C_{1,S(j)}, C_{2,S(j)}$ とする．これらの値は，$C_{1,S(j)} = \sum_{k=1}^{j} a_{S(k)}$, $C_{2,S(j)} = \max\{C_{1,S(j)}, C_{2,S(j-1)}\} + b_{S(j)}$ として計算される (ただし $C_{2,S(0)} = 0$)．本稿で扱う問題は，総完了時刻 $F(S) = \sum_{j=1}^{n} C_{2,S(j)}$ を最小にするスケジュール S を求めるものであり，一般に $F2||\sum C_i$ と表記されている問題である．

3. 基本補題

N の部分集合から成るスケジュールを，部分スケジュールとよぶ．部分スケジュール σ に対し，$N(\sigma)$ を σ に含まれるジョブ集合とする．また，$C_2(\sigma) = C_{2,\sigma(\ell)}$, $F_2(\sigma) = \sum_{k=1}^{\ell} C_{2,\sigma(k)}$ (ただし，$\ell = |N(\sigma)|$) と定義する．

以下頻繁に部分スケジュールを $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_m$ と表現する．ここで $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ は，互いに共通のジョブを含まない部分スケジュールである．また，ジョブ数1の部分スケジュールは括弧なしで表記する．例えば σi は，σ にジョブ i が続く部分スケジュールである．

補題 1 σ, α を $N(\sigma) = N(\alpha)$ を満たす二つの部分スケジュールとする．このとき，二つの部分スケジュール $S = \sigma\pi$, $S' = \alpha\pi$ に対して $C_{2,S(k)} - C_{2,S'(k)} \geq \min\{0, C_2(\sigma) - C_2(\alpha)\}$ $(\forall k \in N(\pi))$, $F(S) - F(S') \geq F(\alpha) - F(\sigma) + |N(\pi)| \min\{0, C_2(\alpha) - C_2(\sigma)\}$ が成り立つ．

補題 2 二つの部分スケジュール $S = \sigma i\pi$, $S' = \sigma j\pi$ に対して $C_{2,S(k)} - C_{2,S'(k)} \geq \min\{a_i - a_j, C_2(\sigma i) - C_2(\sigma j)\}$ $(\forall k \in N(\pi))$ が成り立つ．

補題 3 二つの部分スケジュール $\sigma i\pi j$, $\sigma j\pi i$ に対して $C_2(\sigma i\pi j) - C_2(\sigma j\pi i) \geq \min\{0, a_i - a_j, C_2(\sigma i) - C_2(\sigma j)\} + b_j - b_i$ が成り立つ．

σ が陽にはわからず $C_2(\sigma)$, $C_2(\sigma i)$, $C_2(\sigma j)$ が計算できない場合，補題 1–3 を利用することはできない．この場合，補題 2 と補題 3 は，次の補題によって弱い条件に置き換える．

補題 4 二つの部分スケジュール $\sigma i, \sigma j$ に対して $C_2(\sigma i) - C_2(\sigma j) \geq \min\{0, a_i - a_j\} + b_i - b_j$ が成り立つ．

補題 3 において π が空である場合，条件を強めることができる．

補題 5 二つの部分スケジュール $\sigma ij, \sigma ji$ に対して $C_2(\sigma ij) - C_2(\sigma ji) \geq \min\{0, \min\{a_i, b_j\} - \min\{a_j, b_i\}\}$ が成り立つ．

4. 優越条件

本稿では子問題を (σ,γ) (ただし $N(\sigma)\cap N(\gamma)=\emptyset$) と表現する．$(\sigma,\gamma)$ は，関数 $F(\cdot)$ を最小にする $\sigma\pi\gamma$ の形をしたスケジュールを求める問題である．既存の優越条件は，子問題 $(\sigma,\emptyset)$ に関するものである．

$\mathrm{OPT}(\sigma,\gamma)$ を，子問題 (σ,γ) の最適値とする．このとき，$\mathrm{OPT}(\sigma,\gamma)\geq\mathrm{OPT}(\sigma',\gamma')$ であるならば，(σ,γ) は (σ',γ') に優越されるといい，$(\sigma,\gamma)\succeq(\sigma',\gamma')$ と書く．また，$\mathrm{OPT}(\sigma,\gamma)>\mathrm{OPT}(\sigma',\gamma')$ が成り立つとき，(σ,γ) は (σ',γ') に狭義に優越されるという．本稿では，子問題の比較を次の三タイプに分けて考える．

TYPE-1 : (σ,γ) と (σ',γ) の比較
TYPE-2 : (σ,γ) と (σ,γ') の比較
TYPE-3 : (σ,γ) と (σ',γ') の比較

既存の優越条件は全て TYPE-1 に関するものである．本研究では，TYPE-1, TYPE-2, TYPE-3, さらに [3] で提案されたタイプの優越条件・狭義優越条件を議論した．狭義優越条件の必要性については [5] を参照されたい．紙面の都合上，本稿では TYPE-1 の優越条件についてのみ述べることとする．

定理 1 二つの子問題 $(\sigma i,\gamma)$, $(\sigma j,\gamma)$ に対し，$T_1=C_2(\sigma i)-C_2(\sigma j)$, $T_2=\min\{a_i-a_j,T_1\}$, $T_3=\min\{0,T_2\}+b_j-b_i$, $T_4=\min\{0,T_3\}$ と定義する．このとき，"$T_2\geq T_4$ かつ $T_1+T_3+(n-|N(\sigma)|-2)T_4\geq 0$" または "$T_2\leq T_4$ かつ $T_1+(n-|N(\sigma\gamma)|-2)T_2+T_3+|N(\gamma)|T_4\geq 0$" であるならば，$(\sigma i,\gamma)\succeq(\sigma j,\gamma)$ が成り立つ．

系 1 ([2]) $a_i\geq a_j$, $b_i\leq b_j$, $C_2(\sigma i)\geq C_2(\sigma j)$ ならば，$(\sigma i,\gamma)\succeq(\sigma j,\gamma)$ が成り立つ．

定理 2 二つの子問題 (σ,γ), (σ',γ) $(N(\sigma)=N(\sigma'))$ に対し，$F(\sigma)-F(\sigma')+(n-|N(\sigma)|)\min\{0,C_2(\sigma)-C_2(\sigma')\}\geq 0$ ならば，$(\sigma,\gamma)\succeq(\sigma',\gamma)$ が成り立つ．

系 2 ([3]) $F(\sigma)\geq F(\sigma')$ かつ $F(\sigma)-F(\sigma')+(n-|N(\sigma)|)(C_2(\sigma)-C_2(\sigma'))\geq 0$ ならば，$(\sigma,\gamma)\succeq(\sigma',\gamma)$ が成り立つ．

系 3 ([6]) $C_2(\sigma)\geq C_2(\sigma')$ かつ $F(\sigma)\geq F(\sigma')$ ならば，$(\sigma,\gamma)\succeq(\sigma',\gamma)$ が成り立つ．

定理 3 二つの子問題 $(\sigma ij,\gamma)$, $(\sigma ji,\gamma)$ に対し，$C_2(\sigma i)-C_2(\sigma j)+C_2(\sigma ij)-C_2(\sigma ji)+(n-|N(\sigma)|-2)\min\{0,C_2(\sigma ij)-C_2(\sigma ji)\}\geq 0$ ならば，$(\sigma ij,\gamma)\succeq(\sigma ji,\gamma)$ が成り立つ．

系 4 ([6]) $C_2(\sigma ij)\geq C_2(\sigma ji)$ かつ $C_2(\sigma i)-C_2(\sigma j)+C_2(\sigma ij)-C_2(\sigma ji)\geq 0$ ならば，$(\sigma ij,\gamma)\succeq(\sigma ji,\gamma)$ が成り立つ．

系 5 ([1]) $b_i\geq b_j$ かつ $\min\{0,a_i-a_j\}+b_i-b_j+(n-|N(\sigma)|-1)(\min\{a_i,b_j\}-\min\{a_j,b_i\})\geq 0$ ならば，$(\sigma ij,\gamma)\succeq(\sigma ji,\gamma)$ が成り立つ．

定理 1–3 は，基本補題を用いて証明することができる．また，系 1–5 は対応する定理から直ちに導かれ，結果として定理 1–3 は既存の優越条件の強化となっていることがわかる．

5. 数値実験

[3] で提案されている分枝限定法をベースとして，(σ,γ) を子問題とする分枝限定法を構築した．そして，この分枝限定法において有効な優越テストの設計，すなわち，優越条件をチェックするアルゴリズムの開発および優越条件の適用順序の決定，を行った．続いて，[3] の分枝限定法および ILOG-CPLEX(Ver. 9.0) との比較を行った．その結果，本研究で提案する分枝限定法が最も有効であった．なお，実験結果の詳細は当日発表する予定である．

参考文献

[1] Cadambi, B.W. and Sathe, Y.S., "Two-machine Flowshop Scheduling to Minimize Mean Flow Time," *OpSearch* **30** (1993) 35-41.

[2] Della Croce, F., Narayan, V., and Tadei, R., "The Two Machine Total Completion Time Flowshop Problem," *European Journal of Operational Research* **90** (1996) 227-237.

[3] Della Croce, F., Ghirardi, M., and Tadei, R., "An Improved Branch and Bound Algorithm for the Two-machine Total Completion Time Flowshop Problem," *European Journal of Operational Research* **139** (2002) 293-301.

[4] Garey, M.R., Johnson, D.S., and Sethi, R., "The Complexity of Flowshop and Jobshop Scheduling," *Mathematics of Operations Research* **1** (1976) 61-68.

[5] S. Yanai, T. Fujie, "On a Dominance Test for the Single Machine Scheduling Problem with Release Dates to Minimize Total Flow Time," Journal of the Operations Research Society of Japan 47 (2004) 96-111.

[6] Van de Velde, S.L., "Minimizing the sum of Job Completion Times in the Two-machine Flowshop by Lagrangian Relaxation," *Annals of Operations Research* **26** (1990) 257-268.