日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

L凸関数に対する離散ヘッセ行列

01606770 科学技術振興機構, CREST ＊森口 聡子 MORIGUCHI Satoko
01603194 東京大学; PRESTO, JST 室田 一雄 MUROTA Kazuo

1 はじめに

L凸関数 [5] は, 整数格子点上で定義された関数のクラスとして, 離散凸解析 [6] において中心的な役割を担っている.

連続変数の凸解析において, 適当な微分可能性を仮定した関数 g に対して以下の基本的な事実がある.

g が凸関数
$\iff$ g のヘッセ行列が各点で半正定値
$\iff$ g の局所2次近似が各点で凸

本稿では, L凸関数に対して, この同値性の離散版を構築する. すなわち, 離散ヘッセ行列と局所2次展開を定義し, これらを用いてL凸関数の特徴付けを行う.

一般に, 離散関数 g に関する離散ヘッセ行列 H に下記の性質を要請するのは自然であろう.

- H は g の局所的な情報により定義される対称行列
- g がアフィン関数のとき H は零行列
- H は g について線形
- $g(x)=\frac{1}{2}x^\top Ax$ のとき H は A に一致

離散関数のクラス $\mathcal{C}$ が与えられたとき, 離散ヘッセ行列を適当に定義し, さらに, 以下のような性質を持つ行列のクラス $\mathcal{H}$ を見出すことによって, 離散ヘッセ行列のクラスを特徴付けを試みよう.

- 行列が $\mathcal{H}$ に属する $\iff$ その行列が, $\mathcal{C}$ に属する関数のある点における離散ヘッセ行列である.
- 関数が $\mathcal{C}$ に属する $\iff$ その関数の離散ヘッセ行列が, 各点で $\mathcal{H}$ に属する.
- 関数が $\mathcal{C}$ に属する $\iff$ その関数の離散ヘッセ行列による局所2次近似が, 各点で $\mathcal{C}$ に属する.

本稿で報告するL凸関数に対する離散ヘッセ行列はこれらの性質を満たすものである. 詳細は [4] を参照されたい.

$V=\{1,\ldots,n\}$ とおく. ベクトル $p,q\in\mathbf{Z}^V$ に対して, 成分ごとに最大値, 最小値をとって得られるベクトルを $p\vee q, p\wedge p$ と書くことにし, $\mathbf{1}=(1,1,\ldots,1)\in\mathbf{Z}^V$ とする. 関数 $g:\mathbf{Z}^V\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ がL凸関数 [5, 6] であることは g が2条件

(SBF) $g(p)+g(q)\geq g(p\vee q)+g(p\wedge p)\quad (p,q\in\mathbf{Z}^V)$,
(TRF) $\exists r\in\mathbb{R}$ such that $g(p+\mathbf{1})=g(p)+r\quad (p\in\mathbf{Z}^V)$,

を満たすことと定義される. ここで不等式 (SBF) は $g(p)$ か $g(q)$ が $+\infty$ であるときには成立していると約束する.

関数 $g:\mathbf{Z}^V\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ が $\mathrm{L}^\natural$ 凸関数 [1, 6] であるとは, $g(p_1,\ldots,p_n)=\tilde{g}(0,p_1,\ldots,p_n)$ となるL凸関数 $\tilde{g}(p_0,p_1,\ldots,p_n)$ が存在することである.

連続空間上のL凸関数に対しては, 通常のヘッセ行列を用いてL凸性の特徴付けができる [7]. しかし, 離散空間上のL凸関数に対してはそのまま適用することはできない. Yüceer [8] は, 強離散凸性という概念を導入するために Miller の離散凸関数に対する離散ヘッセ行列を考えている. これもまた, L凸関数のための離散ヘッセ行列としては相応しくない. M凸関数に対する離散ヘッセ行列は [2] において定義され, tree metric との関係が調べられている.

2 結果

χ_i は $i\in V$ に対する特性ベクトルをあらわすとする. 離散関数 $g:\mathbf{Z}^V\to\mathbb{R}$, $p\in\mathbf{Z}^V$, $i,j\in V(i\neq j)$ に対して,

$$\eta_{ij}(g;p)=-g(p+\chi_i+\chi_j)+g(p+\chi_i)+g(p+\chi_j)-g(p),$$
$$\eta_i(g;p)=g(p)+g(p+\mathbf{1}+\chi_i)-g(p+\mathbf{1})-g(p+\chi_i)$$

と定義する. ここで $-\eta_{ij}(g;p)$ は $p\in\mathbf{Z}^V$ における χ_i, χ_j 方向への2次前進差分を, $\eta_i(g;p)$ は $\chi_i,\mathbf{1}$ 方向への2次前進差分を意味している. 離散関数 $g:\mathbf{Z}^V\to\mathbb{R}$ と $p\in\mathbf{Z}^V$ に対して, 離散ヘッセ行列 $H(g;p)=(H_{ij}(g;p)\mid i,j\in V)$ を以下で定義する:

$$\begin{aligned}H_{ij}(g;p) &= -\eta_{ij}(g;p)\quad (i\neq j),\\ H_{ii}(g;p) &= \eta_i(g;p)+\sum_{j\in V\setminus\{i\}}\eta_{ij}(g;p)\\ &= \eta_i(g;p)-\sum_{j\in V\setminus\{i\}}H_{ij}(g;p).\end{aligned}$$

各 $p\in\mathbf{Z}^V$ に対して,

$$U(p)=\{p+\chi_i+\chi_j\mid i,j\in V\cup\{0\}, i\neq j\}$$

を局所 2 次展開を考える上での近傍とみなす．g の局所 2 次展開を $\hat{g}(q;p)$ と表し，以下のように定義する．

$$\begin{aligned}\hat{g}(q;p) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j\in V} H_{ij}(g;p)(q-p)_i(q-p)_j \\ &\quad +\sum_{i\in V}(g(p+\chi_i)-g(p)-\frac{1}{2}H_{ii}(g;p))(q-p)_i \\ &\quad +g(p).\end{aligned}$$

補題 2.1 $g,h:\mathbf{Z}^V\to\mathbf{R}$ と $p\in\mathbf{Z}^V$ に対して，以下が成り立つ．
(a) $H(g+h;p)=H(g;p)+H(h;p)$.
(b) g がアフィン関数ならば，$H(g;p)=0$.
(c) $q\in U(p)$ に対して，$g(q)=\hat{g}(q;p)$.
(d) 対称行列 $A=(a_{ij}\mid i,j\in V)$ に対して，$g(q)=b+c^\top q+\frac{1}{2}q^\top Aq$ ならば，$H(g;p)=A$ であり，任意の $q\in\mathbf{Z}^V$ に対して $g(q)=\hat{g}(q;p)$.

次の定理はそれぞれ，L$^\natural$ 凸関数と L 凸関数に対する離散ヘッセ行列のクラスを特徴付ける．

定理 2.2 $g:\mathbf{Z}^V\to\mathbf{R}$ に対して，次の 3 条件は同値である．
(a) g は L$^\natural$ 凸関数.
(b) 各 $p\in\mathbf{Z}^V$ に対して，$H(g;p)$ は以下を満たす．

$$H_{ij}(g;p)\le 0 \quad (i,j\in V, i\neq j),$$

$$\sum_{j\in V} H_{ij}(g;p)\ge 0 \quad (i\in V).$$

(c) 各 $p\in\mathbf{Z}^V$ に対して，$\hat{g}(q;p)$ は q に関する L$^\natural$ 凸関数.

定理 2.3 $g:\mathbf{Z}^V\to\mathbf{R}$ に対して，次の 3 条件は同値である．
(a) g は L 凸関数.
(b) 各 $p\in\mathbf{Z}^V$ に対して，$H(g;p)$ は以下を満たす．

$$H_{ij}(g;p)\le 0 \quad (i,j\in V, i\neq j),$$

$$\sum_{j\in V} H_{ij}(g;p)= 0 \quad (i\in V).$$

(c) 各 $p\in\mathbf{Z}^V$ に対して，$\hat{g}(q;p)$ は q に関する L 凸関数.

離散ヘッセ行列による L$^\natural$ 凸性の特徴付けにより，次の例に示す Miller [3] が扱った関数が L$^\natural$ 凸関数であることがわかった．

例 2.1 (Miller の例) 次の関数 $f:\mathbf{Z}_+^n\to\mathbf{R}$ は L$^\natural$ 凸関数である:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\prod_{j=1}^{n}\beta_j(x_j+k)\right)+\lambda\sum_{j=1}^{n}c_jx_j,$$

ここで $\lambda>0, c_j>0$ であり，$\beta_j(\cdot)$ は非負離散確率変数の累積分布関数で，$\varphi_j(m)\ge 0$ $(m\ge 0,\ 1\le j\le n)$ を用いて

$$\beta_j(k)=\sum_{m=0}^{k}\varphi_j(m) \quad (k\in\mathbf{Z}_+)$$

と書き表されるものである．Miller の例では $\lambda_j>0$ で

$$\varphi_j(m)=e^{-\lambda_j}\frac{\lambda_j^m}{m!} \quad (m\in\mathbf{Z}_+)$$

である．

$\eta_{ij}(f;x),\eta_i(f;x)$ の非負性が示せるので，定理 2.2 より，f は L$^\natural$ 凸関数である．このことから，$f(x)$ の最小化は L$^\natural$ 凸関数の最小化アルゴリズム ([6], Sect. 10.3) を用いることで，[3] の方法より効率的に行えることがわかる．

謝辞：本研究の一部は科研費，および，21 世紀 COE プログラム情報科学技術戦略コアの援助のもとに行われたものである．

参考文献

[1] S. Fujishige and K. Murota, "Notes on L-/M-convex functions and the separation theorems," Math. Program., vol.88, pp.129–146, 2000.

[2] H. Hirai and K. Murota, "M-convex functions and tree metrics," Jpn. J. Indust. Appl. Math., vol.21, pp.391–403, 2004.

[3] B. L. Miller, "On minimizing nonseparable functions defined on the integers with an inventory application," SIAM J. on Appl. Math., vol.21, pp.166–185, 1971.

[4] S. Moriguchi and K. Murota, "Discrete Hessian Matrix for L-convex Functions," IEICE Trans. Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, to appear.

[5] K. Murota, "Discrete convex analysis," Math. Program., vol.83, pp.313–371, 1998.

[6] K. Murota, Discrete Convex Analysis, SIAM, 2003.

[7] K. Murota and A. Shioura, "Fundamental properties of M-convex and L-convex functions in continuous variables," IEICE Trans. Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, vol.E87-A, pp.1042–1052, 2004.

[8] Ü. Yüceer, "Discrete convexity: convexity for functions defined on discrete spaces," Discrete Appl. Math., vol.119, pp.297–304, 2002.