日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

ロバスト混合整数計画に対するBenders分解法

02203420　東京大学　*齊藤 廣大　SAITO Hiroo
01603194　東京大学　室田 一雄　MUROTA Kazuo

1　はじめに

本発表では，制約式の係数に不確定性のある場合のロバスト混合整数計画を考える．次の形の混合整数計画問題 (MIP) を扱う：

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x,y}. & c^\top x + d^\top y \\ \text{s. t.} & \tilde{a}_i^\top x + \tilde{b}_i^\top y \le f_i \ (i=1,\dots,m), \\ & x \in X. \end{array} \quad (1)$$

ただし，$c \in \mathbb{R}^{n_x}$, $d \in \mathbb{R}^{n_y}$, $\tilde{a}_i \in \mathbb{R}^{n_x}$, $\tilde{b}_i \in \mathbb{R}^{n_y}$, $f_i \in \mathbb{R}$, $X = \{x \mid l \le x \le u,\ x \in \mathbb{Z}^{n_x}\}$ である．さらに，$\tilde{a}_i$ と $\tilde{b}_i$ は,

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_i \\ \tilde{b}_i \end{bmatrix} \in \mathcal{E}_i := \left\{ \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_i \\ Q_i \end{bmatrix} w_i \ \middle|\ \|w_i\| \le 1 \right\}$$

($\|\cdot\|$ は通常のユークリッドノルム) のような不確定性をもつものとし，$\tilde{a}_i$, $\tilde{b}_i$ がどんな値をとっても実行可能であるような (x,y) に対して目的関数 $c^\top x + d^\top y$ を最大化することを考える．

本発表では，問題 (1) を整数制約をもつ2次錐計画として定式化し，2次錐計画に関する双対定理を利用することによって，Benders 分解法を自然に拡張した形の解法を提案する．

なお，Ben-Tal と Nemirovski は同様な不確定性をもつ線形計画問題に対して，2次錐計画による解法を提案している ([1] など)．また，係数が区間に含まれる形の不確定性をもつ MIP が [2] で扱われている．

2　混合整数2次錐計画への定式化

$\tilde{a}_i$, $\tilde{b}_i$ がどんな値をとっても (x,y) が実行可能であるという制約は,

$$\begin{aligned} & \tilde{a}_i^\top x + \tilde{b}_i^\top y \le f_i \quad \forall (\tilde{a}_i\ \tilde{b}_i)^\top \in \mathcal{E}_i \\ \iff\ & f_i \ge \max\{\tilde{a}_i^\top x + \tilde{b}_i^\top y \mid (\tilde{a}_i\ \tilde{b}_i)^\top \in \mathcal{E}_i\} \\ \iff\ & f_i \ge a_i^\top x + b_i^\top y + \|P_i^\top x + Q_i^\top y\| \end{aligned}$$

のように表すことができる．これは，2次錐制約

$$(z_0, z)^\top \in \mathcal{K} \overset{\text{def.}}{\iff} z_0 \ge \|z\|$$

の典型的な応用例である ([1] など)．したがって，(1) に対するロバスト MIP は以下のように定式化することができる．

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x,y,\xi}. & c^\top x + d^\top y \\ \text{s. t.} & A_i x + B_i y + G_i \xi_i = h_i, \\ & \xi_i \in \mathcal{K}_i\ (i=1,\dots,m),\ x \in X. \end{array} \quad (2)$$

ただし，各 $\mathcal{K}_i$ は適当な次元の空間における2次錐とし,

$$A_i = \begin{bmatrix} a_i^\top \\ P_i^\top \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} b_i^\top \\ Q_i^\top \end{bmatrix}, G_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, h_i = \begin{bmatrix} f_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

であるとする．また，$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ とする．以下, (2) は最適解をもつと仮定する．

(2) は整数制約と2次錐制約をもつので，混合整数2次錐計画とよぶことにする．この問題の解法として，2次錐計画 (SOCP) を緩和問題とする分枝限定法を考えることができるが，単純に適用すると整数許容解を得るだけでも何度も SOCP を解かなくてはならないことになる．

3　Benders 分解法

Benders 分解法は MIP に対する解法のひとつである ([4] など)．その概要は，まず連続変数を射影によって消去することで，問題を等価な MIP に再定式化する．しかし，この定式化は，変数の個数が減った代償として，制約式が非常に多い．そこで，制約式の一部だけを考えた緩和問題 (これも MIP) を解き，切除平面を追加していく．このとき，緩和問題の最適解に対して，線形計画問題を解くことで効率よく切除平面を見つけることができる．この解法は線形計画の双対定理をうまく利用しているのが特徴である．

本節では，問題 (2) において，$\mathcal{K}$ を一般の凸錐にした問題 (混合整数錐計画とよぶ) に対する Benders 分解法を記述する．まず，錐制約に関する変数 ξ を射影で消すことを考える (ちなみに変数 y をも同時に消すこともできる)．(2) の許容領域 Ω の (x,y) の空間への射影を

$$\mathrm{proj}(\Omega) := \{(x,y) \mid x \in X,\ \exists \xi,\ (x,y,\xi) \in \Omega\}$$

のように定義する．また，凸錐 $\mathcal{K}$ の双対錐を $\mathcal{K}^* := \{s \mid \langle s, x \rangle \ge 0\ (\forall x \in \mathcal{K})\}$ で定義する．

命題 1. 凸錐 $\mathcal{Q}_i$ を $\mathcal{Q}_i = \{v \mid G_i^\top v \in \mathcal{K}_i^*\}$ とする．$\mathcal{Q}_i$

が閉ならば，

$$\mathrm{proj}(\Omega) = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{l} v_i^\top(A_i x + B_i y) \le v_i^\top h_i \\ \forall v_i \in \mathrm{Extr}\,(\mathcal{Q}_i)\ (i=1,\ldots,m), \\ x \in X \end{array} \right\}.$$

ただし，$\mathrm{Extr}\,(\mathcal{Q}_i)$ は $\mathcal{Q}_i$ の端線 (extreme ray) 全体である．

証明. 左辺が右辺に含まれるのは自明．逆は (一般的な)Farkas の補題 ([5] など) より示すことができる． ■

したがって，(2) は，

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x,y}. & c^\top x + d^\top y \\ \text{s. t.} & v_i^\top(A_i x + B_i y) \le v_i^\top h_i \\ & \forall v_i \in \mathrm{Extr}\,(\mathcal{Q}_i)\ (i=1,\ldots,m), \\ & x \in X \end{array} \tag{3}$$

のような混合整数半無限計画と等価になる．この問題の難しさは無限個の線形制約式にある．そこで，有限個の要素からなる適当な $R_i \subset \mathrm{Extr}\,(\mathcal{Q}_i)$ $(i=1,\ldots,m)$ を選び (3) の緩和問題 (これは通常の MIP になる) を解く．緩和問題の最適解 $(\bar{x},\bar{y})$ が (3) の許容解ならば，もとの問題の最適解が求まったことになる．この判定は，錐計画を解けばできる．(2) において，(x,y) を固定して得られる錐計画を，

$$\mathrm{P}(x,y) \left| \begin{array}{ll} \max\limits_{\xi}. & 0 \\ \text{s. t.} & G_i\xi_i = h_i - A_i x - B_i y, \\ & \xi_i \in \mathcal{K}_i\ (i=1,\ldots,m) \end{array} \right. \tag{4}$$

とおき，その双対問題

$$\mathrm{D}(x,y) \left| \begin{array}{ll} \min\limits_{v}. & \sum\limits_{i=1}^{m}(h_i - A_i x - B_i y)^\top v_i \\ \text{s. t.} & G_i^\top v_i \in \mathcal{K}_i^*\ (i=1,\ldots,m) \end{array} \right. \tag{5}$$

を考える．(4) と (5) はそれぞれ，$i=1,\ldots,m$ に対する m 個の錐計画に分解されることに注意する．

命題 2. $\mathrm{D}(\bar{x},\bar{y})$ が有界ならば，$(\bar{x},\bar{y})$ は (3) の許容解であり，したがって，最適解である． ■

$\mathrm{D}(\bar{x},\bar{y})$ が非有界の場合は，ある i に対して，$v_i^\top(h_i - A_i\bar{x} - B_i\bar{y}) < 0$ なる $v_i \in \mathcal{Q}_i$ (無限方向とよぶ) が存在するので，これに対応する不等式をカットとして追加する．したがって，各反復において，緩和問題である通常の MIP を一回，許容性の判定のために錐計画を一回，解けばよいことになる．(3) の線形制約は有限個でないので，この反復を適当なところで打ち切ることにする [3].

手順をまとめる．

1. $i=1,\ldots,m$ に対し，$G_i^\top v_i \in \mathcal{K}_i^*$ を満たす v_i をひとつ求め，$R_i \leftarrow \{v_i\}$ とする．
2. (3) において，$i=1,\ldots,m$ に対し，$\mathrm{Extr}\,(\mathcal{Q}_i)$ を R_i でおきかえた緩和問題を解き，得られた解を $(\bar{x},\bar{y})$ とする．
3. $\mathrm{D}(\bar{x},\bar{y})$ を解く：
   (a) $\mathrm{D}(\bar{x},\bar{y})$ が有界ならば，$(\bar{x},\bar{y})$ は (3) の最適解なので終了．
   (b) $\mathrm{D}(\bar{x},\bar{y})$ が非有界ならば，$R_i \leftarrow R_i \cup \{v_i\}$ (v_i : 無限方向) とする．Step 2 へ戻る．

Step3 の (b) において，無限方向は以下のような問題を解くことで求めることにする．ただし，$\mathbf{1}$ はすべての要素が 1 のベクトルである．

$$\mathrm{D}'(x,y) \left| \begin{array}{ll} \min\limits_{v_i^+,v_i^-}. & (h_i - A_i x - B_i y)^\top (v_i^+ - v_i^-) \\ \text{s. t.} & G_i^\top(v_i^+ - v_i^-) \in \mathcal{K}_i^*,\ v_i^+, v_i^- \ge \mathbf{0}, \\ & \mathbf{1}^\top v_i^+ + \mathbf{1}^\top v_i^- \le 1. \end{array} \right.$$

命題 3. $\mathrm{D}(x,y)$ が有界 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{D}'(x,y)$ の最適値は 0． ■

4 おわりに

Benders 分解法の一般的枠組は論文 [3] で与えられている．本手法もこの枠組に含まれることになるが，錐計画の性質にもとづいた扱いやすい例になっている．さらに，今回扱った問題では (4) と (5) が SOCP になるので，主双対内点法により効率的に解くことができるという利点がある．計算機実験の結果については研究発表会当日に報告する予定である．

謝辞：吉瀬章子助教授 (筑波大学) には錐計画に関する文献をご教示いただいた．本研究は JST, PRESTO, 21 世紀 COE プログラム情報科学技術戦略コア，および科学研究費補助金の援助を受けた．

参考文献

[1] A. Ben-Tal and A. Nemirovski: Robust convex optimization, *Mathematics of Operations Research*, **23** (1998), 769–805.
[2] D. Bertsimas and M. Sim: Robust discrete optimization and network flows, *Mathematical Programming*, **98** (2003), 49–71.
[3] A. M. Geoffrion: Generalized Benders Decomposition: *Journal of Optimization Theory and Applications*, **10** (1972), 237–260.
[4] G. L. Nemhauser and L. A. Wolsey: *Integer and Combinational Optimization*, John Wiley & Sons, 1988.
[5] J. Renegar: *A Mathematical View of Interior-Point Methods in Convex Optimization*, MPS-SIAM Series on Optimization, 2001.