日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

2 次割当問題に対する Integral Basis Method

02104040 東京農工大学 *鴻池 祐輔 KOUNOIKE Yuusuke
01207140 東京農工大学 品野 勇治 SHINANO Yuji
01507034 兵庫県立大学 藤江 哲也 FUJIE Tetsuya

1 はじめに

整数計画問題の厳密解法としては分枝限定法が有名であるが，近年 Haus, Köppe, and Weismantel により新たな手法である Integral Basis Method が提案された [1, 2]. しかし，この手法はまだ歴史が浅く，今のところ小規模の問題しか解くことができない．本発表では問題を 2 次割当問題 (QAP) に限定した上で，Integral Basis Method の持つ性質を調べ，改善の糸口を探り，実際に改善した結果について報告する．

2 Integral Basis Method

Integral Basis Method は，全整数計画問題 (PIP) $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathcal{F}\}$, $\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{Z}_+^{m+n} : A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ に対して，その基底形式 $\min\{c_0 + \overline{\mathbf{c}}_N^T\mathbf{x}_N : \mathbf{x}_B + \overline{A}_N\mathbf{x}_N = \overline{\mathbf{b}}, \mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}_N \in \mathbf{Z}_+^n\}$ とその実行可能基底解 $\mathbf{x}^0$ を入力とし，$\mathbf{x}^0$ より良い目的関数値を持つ別の実行可能解 $\mathbf{x}^*$ を見つけるか，$\mathbf{x}^0$ が最適解であることを保証する．

整数条件の無い線形計画問題と同様に，$\overline{\mathbf{c}}_N \geq \mathbf{0}$ であれば，基底解が最適解であることが保証される．しかし，$\overline{c}_k < 0$ となるような $\overline{c}_k$ があったとしても，整数条件があるため x^0 を改善する実行可能解が存在するとは限らない．このため単純に pivot することが出来ず，解の最適性を検証することが出来ない．ここに整数計画問題に対する主解法の難しさがあるといえる．Haus らは次のように考えることでこの問題を解決し最適性を検証できるようにした．

すべての $(\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N) \in \mathcal{F}$ について，次の条件を満たすような非基底変数のベクトル $\mathbf{v} \in \mathbf{Z}^n$ の集合 $\mathbf{S} = \{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^r\}$ を考える．

$$\mathbf{x}_N = \textstyle\sum_{i=1}^r p_i\mathbf{v}^i \ (p_i \in \mathbf{Z}_+), \mathbf{x}_B = \overline{\mathbf{b}} - \overline{A}_N\mathbf{x}_N \quad (1)$$

このとき，任意の実行可能解 $(\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N)$ について $\overline{\mathbf{c}}_N\mathbf{x}_N = \sum_{i=1}^r p_i\overline{\mathbf{c}}_N^T\mathbf{v}^i$ であることから，$\overline{\mathbf{c}}_N^T\mathbf{v}^i$ がすべて非負であれば，基底解 $(\mathbf{b}, \mathbf{0})$ が最適であることが保証される．$\overline{\mathbf{c}}_N^T\mathbf{v}^k < 0$ となるような $\mathbf{v}_k$ がある場合，$\overline{A}_N\mathbf{v}^k \leq \mathbf{b}$ であれば，$(\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N) = (\overline{\mathbf{b}} - \overline{A}_N\mathbf{v}^k, \mathbf{v}^k)$ が実行可能であるので，目的関数値を改善する別の実行可能解が見つかったことになる．そうで無い場合は基底解が最適かどうかは不明である．線形計画問題における変数の被約費用と同じ働きをすることから，本稿では $\overline{\mathbf{c}}_N^T\mathbf{v}$ の値を $\mathbf{v}$ の被約費用と呼ぶこととする．

Integral Basis Method は以下の手順で最適性の検証を行う．$\mathbf{e}_k$ を x_k 成分が 1 の単位ベクトルとして，$\mathbf{S}^0 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ とすると，$\mathbf{S}^0$ は条件 (1) を満たすので，最初の集合 $\mathbf{S}$ として $\mathbf{S}^0$ を用いる．集合 $\mathbf{S}$ のうち，$\overline{\mathbf{c}}_N^T\mathbf{v}^k$ がすべて非負であれば基底解が最適であり，$\overline{\mathbf{c}}_N^T\mathbf{v}^k < 0$, $\overline{A}_N\mathbf{v}^k \leq \overline{\mathbf{b}}$ となる $\mathbf{v}^k$ があれば，改善する解が見つかったことになる．さもなければ，$\mathcal{F}$ あるいは $(\overline{\mathbf{b}} - \overline{A}_N\mathbf{v}^k, \mathbf{v}^k) \notin \overline{\mathcal{F}}$, $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathcal{F}}$ を満たす $\overline{\mathcal{F}}$ の Irreducible Solution Set(ISS) を列挙を行い，集合 $\mathbf{S}$ から $\mathbf{v}^k$ を除去し，ISS のうち $\mathbf{v}' \geq \mathbf{v}$ となる要素 $\mathbf{v}'$ を追加する．一般には問題 (PIP) の実行可能領域 $\mathcal{F}$ の ISS を列挙することは非常に困難なため，$\mathcal{F}$ を緩和した $\overline{\mathcal{F}}$ の ISS を用いる．

文献 [1, 2] では一般の PIP で利用可能であり，ISS の列挙が容易な緩和の方法として，$\mathbf{v}^k$ が満たさない制約のうちの 1 本を緩和した不等式と Generalized Upper Bound 制約を利用した Strengthened Knapsack Relaxation(SKR) などが提案されている．

3 Integral Basis Method の QAP への適用

Σ_n を n 次対称群，π_i を π の i への作用とし，$A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ を問題として与えられる n 次正方行列とすると，QAP は $\min\left\{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{\pi_i\pi_j} : \pi \in \Sigma_n\right\}$ と定式化される．QAP の線形化にはいくつかの方法があるが，今回は Kaufman と Broeckx による方法 [3] を利用した．$d_{ik} = \sum_j\sum_l a_{ij}b_{kl}$ とすると，QAP は以下の全整数線形計画問題として書ける．

$$\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n y_{ik} & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{i=1}^n x_{ik} = 1 & (1 \leq k \leq n), \\
& \displaystyle\sum_{k=1}^n x_{ik} = 1 & (1 \leq i \leq n), \\
& \displaystyle d_{ik}x_{ik} + \sum_{j=1}^n\sum_{l=1}^n a_{ij}b_{kl}x_{jl} - y_{ik} \leq d_{ik} & \\
& & (1 \leq i, k \leq n), \\
& x_{ik} \in \{0, 1\}, \quad y_{ik} \in \mathbf{Z}_+ & (1 \leq i, k \leq n)
\end{array}$$

ただし，y_{ik} を整数変数とするため，与えられる a_{ij}, b_{ij}

は整数に限ることとする．

$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = 1$ の基底変数として $x_{i\pi_i}$ を，$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = 1$ は $\sum_{k=1}^{n} x_{ik} \le 1, -\sum_{k=1}^{n} x_{ik} \le -1$ とした上でそれぞれのスラック変数を基底変数とする．最後の制約式については，スラック変数 $\hat{y}_{ik}$ を加えた上で，$k = \pi_i$ である式については y_{ik} を，残りは $\hat{y}_{ik}$ を基底変数とする．このように基底変数を選ぶことで，与えられた解 $\pi \in \Sigma_n$ に対応する基底形式を得ることができる．

以上により全整数計画問題の実行可能な基底形式が与えられたことになるので，この時点で SKR を使った Integral Basis Method が適用できる．

4 QAP の制約式の性質を利用した緩和

QAP の性質を利用した改良として，2 節における $\mathcal{F}$ を得るための緩和方法を新たに導入する．

前節に示した基底形式では，x_{ik} の被約費用はほぼすべてが負であり，y_{ik}，$\hat{y}_{ik}$ の被約費用は常に 1 となっている．そのため，x_{ik} 成分をできるだけ含まず，y_{ik}，$\hat{y}_{ik}$ 成分をできるだけ多く含むようなベクトルを含む ISS が得られるように $\mathcal{F}$ を取ると良いと考えられる．そこで，以下に示す妥当不等式について SKR を使った緩和を用い，この緩和が利用できないときだけ元の制約式に対する SKR で更新を行うこととした．

$a_{i\cdot}$ を行列 A の i 行ベクトル，$\langle a_{i\cdot}, b_{k\cdot}\rangle_-$ を x_{jl} の割当コストを $a_{ij}b_{kl}$ としたコスト最小化割当問題の最適値とすると，$\langle a_{i\cdot}, b_{k\cdot}\rangle_- \le \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ij}b_{kl}x_{jl}$ であるので，$d_{ik}x_{ik} - y_{ik} \le d_{ik} - \langle a_{i\cdot}, b_{k\cdot}\rangle_-$ は妥当不等式である．

$k = \pi_i$ のときは y_{ik} が基底変数となるので，$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} d_{ik}x_{jk} - \hat{y}_{ik} \le \langle a_{i\cdot}, b_{k\cdot}\rangle_+$ が妥当不等式となる．ただし，$\langle a_{i\cdot}, b_{k\cdot}\rangle_+$ はコスト最大化割当問題の最適値である．

さらに，$a_{i\cdot\setminus\{p\}}$ を $A_{i\cdot}$ から p 番目の成分を除いたものとすると，元の制約式における x_{pq} の項を残した $d_{ik}x_{ik} + a_{ip}b_{kq}x_{pq} - y_{ik} \le d_{ik} - \langle a_{i\cdot\setminus\{p\}}, b_{k\cdot\setminus\{q\}}\rangle_-$ も妥当不等式となる．同様にしてさらにいくつかの項を残した形でも妥当不等式を作ることができる．

これらの妥当不等式を使った SKR で定義される $\mathcal{F}$ は，元の制約式による SKR によるものよりも ISS の列挙がはるかに容易である．また，この緩和が利用できるときは集合 S に追加されるベクトルは常に一つで，その被約費用は取り除いた変数のそれよりも常に大きくなる．

5 実験結果

前節の改良がどのくらい効率的か調べるため，厳密解法の評価として良く使われる nug シリーズの小さな問題について，既知の最適解を入力として最適性の検証を行った．nug6 と nug8 の最適性検証にかかった実行時間と SKR による集合 S の更新回数を表 1 に示す．

表 1　最適性検証の実験結果

問題		改良前	改良後
nug6	実行時間	3min	5 sec
$(n = 6)$	更新回数	5353	625
nug8	実行時間	>3hour	2.5min
$(n = 8)$	更新回数	>120000	24326

6 おわりに

Integral Basis Method において，SKR による緩和は被約費用を考慮していないため，その ISS にはより小さな負の被約費用を持つベクトルが含まれることが多い．このような ISS で更新を行うと終了までの更新回数が大きく増えてしまう．更新回数を少なくするための工夫として，Haus らは取り除くベクトルと SKR に利用する制約の選び方を提案している．本稿ではこれに加えて，被約費用を考慮して緩和を行うことでも更新回数を少なくすることが可能であることを示した．この考え方は一般の PIP にも適用できると考えている．

分枝限定法ベースの解法では nug30($n = 30$) などが解かれていることと比べると，現時点では $n = 8$ までのかなり小規模な問題についてしか解くことができていない．しかし，Integral Basis Method の研究はまだ始まったばかりであり，今後の更なる改良が期待できる．

今回は解の最適性検証のみを行ったが，今後の改良で最適ではない解から始めても最適解を求めることができるようにしたいと考えている．

参考文献

[1] U.-U. Haus, M. Köppe, and R. Weismantel, The Integral Basis Method for Integer Programming, Mathematical Methods of Operations Research **53**, pp. 353-361, 2001.

[2] U.-U. Haus, M. Köppe, and R. Weismantel, A Primal All-Integer Algorithm Based on Irreducible Solutions, Mathematical Programming, Series B, **96** pp. 205-246, 2003.

[3] L. Kaufman and F. Broeckx, An Algorithm for the Quadratic Assignment Problem using Benders' Decomposition, European Journal of Operational Research **2**, pp. 204-211, 1978.