日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

2目的ナップサック問題のマックスミン最適化

02303020 防衛大学校情報工学科 *谷口 史晃 TANIGUTI Fumiaki
01107880 防衛大学校情報工学科 片岡 靖詞 KATAOKA Seiji
01700900 防衛大学校情報工学科 山田 武夫 YAMADA Takeo

1 はじめに

商品が n 個あり, 商品 j の重量と利得をそれぞれ w_j, p_j とする. これらを容量 C のナップサックに詰め込み, 総利得を最大とする問題は **ナップサック問題 (KP)** と呼ばれ, 多数の研究がなされている [1].

本研究では, 商品 j が 2 種類の利得 p_j^1, p_j^2 を持つ **2目的ナップサック問題 (BKP)** に対し, 総利得の小さい方を最大化するマックスミン最適化を考える.

本研究では, BKP に対して代理制約緩和と仮想釘付けテストを用い, 大規模な BKP を解くことを試みる.

2 問題の定式化

商品 j の採否を表す**決定変数** x_j を用いると, BKP は 0-1 整数計画問題として以下のように定式化される.

BKP:

$$\text{maximize} \quad \min\left\{\sum_{j=1}^{n} p_j^1 x_j, \sum_{j=1}^{n} p_j^2 x_j\right\} \tag{1}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le C \tag{2}$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, ..., n. \tag{3}$$

BKP は, $p_j^1 = p_j^2$ のときに $\mathcal{NP}$-困難である KP と等価になるので, BKP もまた $\mathcal{NP}$-困難である.

変数 v を用いると, BKP は以下のようになる.

$$\text{maximize} \quad v \tag{4}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} p_j^1 x_j \ge v \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j^2 x_j \ge v \tag{6}$$

$$(2), (3), v \ge 0 \tag{7}$$

3 代理制約緩和

制約式 (5),(6) に乗数 λ_1, λ_2 $(\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1, \lambda_2 \ge 0)$ を掛け, 線形凸結合する.

$\bar{p}_j = \lambda_1 p_j^1 + \lambda_2 p_j^2$ とすると代理制約関数は,

$$\lambda_1 \sum_{j=1}^{n} p_j^1 x_j + \lambda_2 \sum_{j=1}^{n} p_j^2 x_j = \sum_{j=1}^{n} \bar{p}_j x_j \ge v(\lambda_1 + \lambda_2) = v$$

となる. したがって, (4),(5),(6) 式を $\sum \bar{p}_j x_j$ を目的関数として置き換えることで, BKP の上界値が得られる.

さらに, 0-1 条件を連続緩和した問題

SBKP(λ):

$$\text{maximize} \quad \sum_{j=1}^{n} \bar{p}_j x_j$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le C$$

$$0 \le x_j \le 1, \quad j = 1, ..., n.$$

も上界値を与え, この最適目的関数値を $\bar{z}(\lambda)$ とすると, これは λ について区分的に線形な凸関数となる. より小さな上界値を得るためには, $\bar{z}(\lambda)$ を最小にする $\lambda^*(\ge 0)$ を求める必要があるが, 区分線形型凸関数上の最小化問題は, 劣勾配法 (利得の種類が 2 のときは 2 分探索でよい) により求めることができる. このときの目的関数値 $\bar{z}(\lambda^*)$ を BKP の上界値 UB とする.

また, 下界値 LB は, SBKP(λ^*) の解から分数値を持つ変数を 0 にした解が, 元問題 BKP の実行可能解になることで得られる. この解をさらにグリーディー法や 2-opt 法を用いて改善したときの目的関数値を最終的に用いる下界値 LB とする.

4 釘付けテスト

4.1 通常の釘付けテスト

通常の**釘付けテスト** [2] は, 上界値 UB と下界値 LB の差を利用したものであり, 各変数 x_j に対して

$$\bar{z}(\lambda^* | x_j = 0) < \text{LB} \quad \to \quad x_j = 1 \quad \text{に固定}$$

$$\bar{z}(\lambda^* | x_j = 1) < \text{LB} \quad \to \quad x_j = 0 \quad \text{に固定}$$

とすることで, 問題を縮小することができる.

4.2 仮想釘付けテスト

仮想釘付けテスト[4] は，下界値 LB をさらに良いものに推定した値 $\mathrm{LB} + \hat{\Delta}(0 \leq \hat{\Delta} \leq \mathrm{UB} - \mathrm{LB})$ を用いて，釘付けテストを行うものである．このとき，下界値の推定増加量 $\hat{\Delta}$ を大きく見積り過ぎる危険性があるが，次の定理 1 により，$\hat{\Delta}$ の適否を検証できる．

定理 1 推定値 $\hat{\Delta}$ を用いて縮小した問題の最適値を $z^\star_{\hat{\Delta}}$ とするとき，$\mathrm{LB} + \hat{\Delta} \leq z^\star_{\hat{\Delta}}$ ならば，$z^\star_{\hat{\Delta}}$ は BKP の最適値である． ∎

もし，$\mathrm{LB} + \hat{\Delta} > z^\star_{\hat{\Delta}}$ であれば，再度 $\hat{\Delta}$ を小さめに調整して $\mathrm{LB} + \hat{\Delta} \leq z^\star_{\hat{\Delta}}$ を満たすまで釘付けテストおよび縮小問題を解くことを繰り返せばよい．

5 数値実験

重量と価値の相関が無いものと，弱い相関があるものに対し，NUOPT[3] を用いて，直接解いたもの，通常の釘付けテストを用いた後に解いたもの，仮想釘付けテストを用いた後に解いたものを比較する．無相関は，w_j, p_j^1, p_j^2 を [1, 1000] の一様乱数で発生させ，弱相関は，w_j を [1, 1000] の一様乱数とし，p_j^1, p_j^2 を $[w_j, w_j + 200]$ の間で発生させる．また，$C = 250n$ とする．実験環境は，IBM RS/6000 SP44 Model 270 である．

仮想釘付けテストを行うためには，下界値の推定値 $\mathrm{LB}+\hat{\Delta}$ が必要になる．このために，UB と LB の差および UB と最適値 ($z^\star$) との差を見ると (表 1)，UB − LB は n が大きくなってもほとんど変わることはないが，$\mathrm{UB} - z^\star$ は n が大きくなると非常に小さくなる傾向が観察された．この傾向は，無相関の場合でも同様であった．そこで，表 1 の右端列のように，下界値の推定値として UB からの差を用いて n に応じて定めた．

表 1: 推定下界値の決定方法（弱相関の場合）

n	UB − LB	$\mathrm{UB} - z^\star$	$\mathrm{LB} + \hat{\Delta}$
2000	70.74	3.34	UB − 30
4000	37.64	1.73	UB − 25
6000	48.45	1.15	UB − 20
12000	30.92	0.85	UB − 5
16000	37.36	0.80	UB − 5

表 2,3 に実験結果を示す．数値は，CPU 時間を秒で示し 10 回の試行の平均である．小さい下付きの数字は 10 回解けなかったときの試行回数である．

n が大きくなると NUOPT で直接解くことは困難になった．

表 2: 無相関

n	直　接	通常の釘付け		仮想釘付け	
		時　間	縮小率	時　間	縮小率
2000	318.1_9	90.3	27.8%	36.7	6.9%
4000	×	466.0	19.8%	238.3	6.1%
6000	×	680.0_8	24.8%	445.9	4.8%
12000	×	2138.3_3	22.3%	936.3	1.2%
16000	×	2312.7_4	20.2%	798.8	1.1%

表 3: 弱相関

n	直　接	通常の釘付け		仮想釘付け	
		時　間	縮小率	時　間	縮小率
2000	709.2_8	540.8	67.6%	267.1	32.4%
4000	2976.0_1	1070.5_8	40.9%	931.3_9	26.6%
6000	3183.7_1	1241.7_4	50.6%	650.2_4	23.3%
12000	×	829.1_1	33.8%	848.2_9	5.9%
16000	×	2836.2_2	39.6%	1433.4_8	5.8%

通常の釘付けテストでは，n が大きくなっても上下界値の差が小さくならない（表 1）ので，縮小後も依然として大きな問題となり，解くことは次第に困難になった．この傾向は，相関が強くなるとさらに顕著になる．

仮想釘付けテストでは，n が大きくなると上界値と最適値との差が小さくなることを利用して，下界値をより大きな値に推定した．その結果，縮小率は非常に良くなり，かなり小さな問題を扱うことで最適値を求めることに成功した．また，$\hat{\Delta}$ の決定方法はあまり根拠はないものの，再度調整しなければならない例は一度も発生しなかった．

6 おわりに

BKP に対して代理制約緩和と仮想釘付けテストを用い，大規模な BKP を解くことを試みた．この方法により通常の釘付けテストよりも大規模な問題を解くことが可能になった．今後の課題としては，縮小問題を効率よく解く方法や推定値 $\hat{\Delta}$ の決定方法があげられる．

参考文献

[1] S.Martello and P.Toth: *Knapsack Problrems: Algorithms and Computer Implementations* (Wiley, New York, 1990).

[2] 今野 浩, 鈴木久敏 (編): 整数計画法と組合せ最適化 (日科技連, 1982).

[3] ㈱ 数理システム: NUOPT マニュアル (2002). URL:http://www.msi.co.jp/nuopt/

[4] 柳 秉俊ほか: 序制約付きナップサック問題への仮想釘付けアプローチ. 2004 年度 OR 学会秋季研究発表会 (東北大学).