日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

永久ゲームオプションの最適行使境界について

02203113 南山大学 ＊鈴木 淳生 SUZUKI Atsuo
01202653 南山大学 澤木 勝茂 SAWAKI Katsushige

1 はじめに

Kifer[1] によるゲームオプションの満期が無限, すなわち, 永久ゲームプットオプションの価格式は株式に配当がない場合について, [2], [3] で求められた. 本研究では, 株式に配当のある永久ゲームオプションの価格式と買い手の最適行使境界をプット, コールそれぞれについて求める.

2 ゲームオプション

本研究において, 市場は債券と株式の 2 種類の資産から成るものとする. 時刻 t における価格を B_t とすると B_t は

$$dB_t = rB_t dt,\ B_0 > 0,\ r \geq 0$$

をみたす. ここで r は無危険利子率である. また, 時刻 t における株価を X_t とすると X_t は確率微分方程式

$$dX_t = rX_t dt + \kappa X_t d\tilde{W}_t$$

をみたす. ここで κ は定数, $\tilde{W}_t$ は完備な確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{P})$ 上で定義される標準 Brown 運動とする.

ゲームオプションは満期までの任意の時刻で買い手は権利行使を, 売り手は契約をキャンセルすることができるオプションである. また, 売り手と買い手の権利行使が同時の場合は買い手の権利行使が優先される. $\mathcal{T}_{tT}$ を区間 $[t, T]$ に値をとる停止時刻の集合, 売り手の停止時刻を σ, 買い手の停止時刻を τ とすると, 売り手はキャンセルしたときに買い手に $f_1(X_\sigma)$ 支払い, 買い手が権利行使したときに売り手は $f_2(X_\tau)$ 支払う*1. ただし, $f_1(X_t) - f_2(X_t) = \delta \geq 0$ であり, δ は契約をキャンセルしたことに対するペナルティである. このペナルティが十分に大きければ, 売り手はキャンセルすることはなく, ゲームオプションはアメリカンオプションに退化する.

以上から, ゲームオプションのペイオフは

$$R(\sigma, \tau) = f_1(X_\sigma)1_{\{\sigma<\tau\}} + f_2(X_\tau)1_{\{\tau\leq\sigma\}}$$

と表される.

定理 1 Kifer[1] ゲームオプションの価格は

$$\begin{aligned} V(t,x) &= \inf_{\sigma\in\mathcal{T}_{tT}} \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{tT}} J_t^x(\sigma,\tau) \\ &= \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{tT}} \inf_{\sigma\in\mathcal{T}_{tT}} J_t^x(\sigma,\tau) \end{aligned}$$

で与えられる. ここで,

$$J_t^x(\sigma,\tau) = \tilde{E}[e^{-r(\sigma\wedge\tau-t)}R(\sigma,\tau)|X_t = x]$$

であり, それぞれの最適停止時刻は

$$\begin{aligned} \hat{\sigma_t} &= \inf\{t\in[0,T)|V(\sigma,X_\sigma) \geq f_1(X_\sigma)\}\wedge T, \\ \hat{\tau_t} &= \inf\{t\in[0,T)|V(\tau,X_\tau) \leq f_2(X_\tau)\}\wedge T \end{aligned}$$

で与えられる.

次に配当のある場合の永久ゲームオプションを考える. このとき X_t は確率微分方程式

$$dX_t = (r-d)X_t dt + \kappa X_t d\tilde{W}_t$$

にしたがう. ただし, d は配当率である.

はじめにプットの売り手の最適行使境界を求める. $x \geq K$ の場合を考える. このとき買い手のペイオフはプットならば $(K-x)^+ = 0$ なので買い手は権利を行使しない. よって, 売り手のみが最適停止時刻を選択する問題となる. 売り手がキャンセルする株価を $X_t = a$ とする. 配当のないゲームプットオプションの価格 $V(x)$ は γ_1 を定数として

$$V(x) = \delta E[e^{-r\sigma_a}|X_0 = x] = \delta\left(\frac{a}{x}\right)^{\gamma_1}$$

と書くことができる. ここで, σ_a は X_t の点 a への最小到達時刻である. 売り手は $V(x)$ が最小になるよう

*1 プットオプションであるならば $f_1(X_\sigma), f_2(X_\tau)$ は

$$\begin{aligned} f_1(X_\sigma) &= (K-X_\sigma)^+ + \delta, \\ f_2(X_\tau) &= (K-X_\tau)^+ \end{aligned}$$

となる.

に a を選ぶので $V(x) = V(x,a)$ とし, a について偏微分をする.

$$\frac{\partial V(x,a)}{\partial a} = \frac{\delta\gamma_1}{x}\left(\frac{a}{x}\right)^{\gamma_1-1} > 0$$

より, $V(x,a)$ は a について単調増加であるから $a = K$ のとき $V(x)$ は最小値をとる. よって売り手は $a = K$ でキャンセルすることが最適である. コールについても同様に $a = K$ とすると以下がいえる.

定理 2 株式に配当のある永久ゲームオプションの価格式は

$$V(x,b) = \delta\frac{\left(\frac{b}{x}\right)^{\gamma_1} - \left(\frac{x}{b}\right)^{\gamma_2}}{\left(\frac{b}{K}\right)^{\gamma_1} - \left(\frac{K}{b}\right)^{\gamma_2}} + f(b)\frac{\left(\frac{x}{K}\right)^{\gamma_2} - \left(\frac{K}{x}\right)^{\gamma_1}}{\left(\frac{b}{K}\right)^{\gamma_2} - \left(\frac{K}{b}\right)^{\gamma_1}} \tag{1}$$

で与えられる. ただし,

$$\gamma_{1,2} = \frac{\sqrt{\nu^2+2r}\pm\nu}{\kappa}, \quad \nu = \frac{r-d}{\kappa} - \frac{1}{2}\kappa$$

であり, プットでは $f(b) = K - b$, コールでは $f(b) = b - K$ である.

3 プットの場合

定理 3 永久ゲームプットの買い手の最適行使境界は $b = z_1K$ で与えられる. ここで, z_1 は方程式 $g(z) = 0$ の $0 < z < 1$ をみたす解である. ただし $g(z)$ は

$$\begin{aligned} g(z) = &(1-\gamma_2)z^{\gamma_1+\gamma_2+1} + \gamma_2 z^{\gamma_1+\gamma_2} \\ &-\epsilon(\gamma_1+\gamma_2)z^{\gamma_2} - (\gamma_1+1)z + \gamma_1 \end{aligned}$$

である.

買い手は $V(x,b)$ が最大になるように b を選ぶので, (1) を b で偏微分した $\frac{\partial V}{\partial b} = 0$ の符号が $+$ から $-$ に変化する点が最適行使境界である.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial b} = &\frac{\left(\frac{K}{x}\right)^{\gamma_1} - \left(\frac{x}{K}\right)^{\gamma_2}}{\left(\left(\frac{K}{b}\right)^{\gamma_1} - \left(\frac{b}{K}\right)^{\gamma_2}\right)^2}\left(\frac{K}{b}\right)^{\gamma_1+1} \\ &\times\{-\epsilon(\gamma_1+\gamma_2)\left(\frac{b}{K}\right)^{\gamma_2} - (\gamma_1+1)\left(\frac{b}{K}\right) \\ &+\gamma_1 + (1-\gamma_2)\left(\frac{b}{K}\right)^{\gamma_1+\gamma_2+1} + \gamma_2\left(\frac{b}{K}\right)^{\gamma_1+\gamma_2}\} \end{aligned}$$

であるので, $b/K = z$ とおくと, $g(0) = \gamma_1 > 0, g(1) = -\epsilon(\gamma_1+\gamma_2) < 0$ より, 方程式 $g(z) = 0$ は解 $0 < z_0 < 1$ をもつことがわかる.

4 コールの場合

定理 4 永久ゲームコールの買い手の最適行使境界は $b = z_2K$ で与えられる. ここで z_2 は方程式 $h(z) = 0$ の $1 < z < \infty$ をみたす解である. ただし $h(z)$ は

$$\begin{aligned} h(z) = &(1-\gamma_2)z^{\gamma_1+\gamma_2+1} + \gamma_2 z^{\gamma_1+\gamma_2} \\ &+\epsilon(\gamma_1+\gamma_2)z^{\gamma_2} - (\gamma_1+1)z + \gamma_1 \end{aligned}$$

である.

コールの場合は

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial b} = &\frac{\left(\frac{K}{x}\right)^{\gamma_1} - \left(\frac{x}{K}\right)^{\gamma_2}}{\left(\left(\frac{K}{b}\right)^{\gamma_1} - \left(\frac{b}{K}\right)^{\gamma_2}\right)^2}\left(\frac{K}{b}\right)^{\gamma_1+1} \\ &\times\{-(\gamma_1+\gamma_2)\epsilon\left(\frac{b}{K}\right)^{\gamma_2} + (\gamma_1+1)\frac{b}{K} \\ &-\gamma_1 + (\gamma_2-1)\left(\frac{b}{K}\right)^{\gamma_1+\gamma_2+1} - \gamma_2\left(\frac{b}{K}\right)^{\gamma_1+\gamma_2}\} \end{aligned}$$

であるので, $b/K = z$ とおくと関数 $h(z)$ は $h(1) = \epsilon(\gamma_1+\gamma_2) > 0, h(\infty) = -\infty$ である. よって, 方程式 $h(z) = 0$ は解 $1 < z_0 < \infty$ をもつことがわかる.

図 1 は下から順に, $\delta = 5, 10, 15, 20, 25$ と変化させたときの永久ゲームプットの価格式を描いたものである. $\delta = 25$ のとき, 永久アメリカンプットの価格式と等しくなる. ここで, $K = 100, r = 0.1, d = 0.09, \kappa = 0.3$ とした.

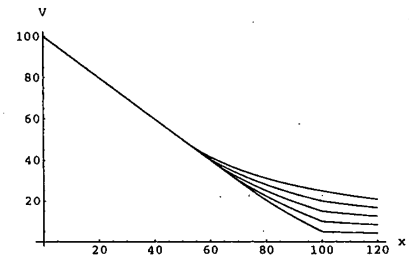

図 1　永久ゲームプットの価格式

参考文献

[1] Kifer, Y., "Game options", *Finance and Stochastics*, **4**, 443-463, (2000).

[2] Kyprianou, A.E., "Some calculations for Israeli options", *Finance and Stochastics*, **8**, 73-86, (2004).

[3] 鈴木淳生, 澤木勝茂, 永久ゲームオプションの価格式について, 日本 OR 学会春季研究発表会アブストラクト集, 250-251, (2004).