日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

オプションプライシングと凸計画問題の関係について

入会申請中 京都大学 ＊ 西原 理 NISHIHARA Michi
01001374 関西学院大学 茨木 俊秀 IBARAKI Toshihide
01403794 京都大学 永持 仁 NAGAMOCHI Hiroshi
01704164 京都大学 柳浦 睦憲 YAGIURA Mutsunori

1 はじめに

デリバティブの適正な価格を決定するオプションプライシングは, 金融工学における最も重要な問題の一つである. オプションプライシングに対する通常のアプローチは, 資産価格の変動が何らかの確率微分方程式に従う市場を仮定してデリバティブの無裁定価格を求めるというもの (例えば Black-Scholes の公式) である. これに対し, 本研究では, 資産価格に対して特定の変動モデルを仮定せずに, 無裁定条件だけが成り立つ市場を考える. Bertsimas と Popescu は, 無裁定条件と与えられた条件 (例えば観測されたオプション価格) だけを仮定したときのオプション価格の上限下限を求める問題が凸計画問題に帰着できることを示した [1]. 本研究では, 彼らの結果が不等式制約と異なる行使日のデリバティブを許したより一般的な定式化に拡張できることを示し, 計算の利便性だけを目的に用いられていた双対性のファイナンス的意味を明らかにする. また, 与えられたオプション価格と矛盾しない原資産価格の分布の上限下限の解析的な解を求め, これらを用いたリスク指標を提案する. さらに, 実際のデータを用いた分布の上限下限とリスク指標の計算結果も示す.

記号: $T>0$ とする. Φ^T, F_i^T は, 行使日 T でペイオフ関数 ϕ, f_i を持つ S の上に書かれたパスに依存しないデリバティブを表し, C_i^T は, 行使日 T で行使価格 k_i の S の上に書かれたコールオプションを表す. $\Delta(R_+)$ は $(R_+, \mathcal{B}(R_+))$ 上の確率測度全体の集合を表し, Q はリスク中立測度を表す.

モデル A: 利率 0 の無リスク資産と一つのリスク資産 S からなる無裁定な市場を仮定する. リスク資産の価格過程 $S(t)$ は, 何らかのフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\le t}, P)$ 上の適合過程として定義される.

通常のモデルでは $S(t)$ の満たす確率微分方程式を仮定するが, モデル A では仮定しない. この研究では, モデル A の下でのオプションプライシングを考える. 以下では, 簡単のために ϕ, f_i に対し強い仮定 (連続性やコンパクトサポートを持つ) をおく場合があるが, 必ずしも必要ではない (Popescu [2] を参照).

2 拡張した結果

モデル A の下で F_i^T の価格が与えられる場合を考える. このとき Φ^T の価格の上限を求める問題は,

$$\begin{aligned}&\text{maximize}_{Q\sim P} E^Q[\phi(S(T))]\\&\text{subject to } E^Q[f_i(S(T))] = q_i \quad (i=1,2,\ldots,n)\end{aligned}$$

となる (以下では簡単のため上限の場合のみを記述するが, 下限に対しても最小化を考えると同様のことが成り立つ). 原資産価格 $S(T)$ のリスク中立測度 Q の下での分布を μ とおくことにより, 上の問題は次の半無限線形計画問題に書き換えられる.

$$\begin{aligned}&\text{maximize}_{\mu\in\Delta(R_+)} \int_{R_+}\phi(x)\mathrm{d}\mu(x)\\&\text{subject to } \int_{R_+} f_i(x)\mathrm{d}\mu(x) = q_i \quad (i=1,2,\ldots,n)\end{aligned} \tag{1}$$

双対性を利用して問題 (1) を解く方法を示したのが Bertsimas と Popescu の結果である. 我々は, 彼らの等式制約と一期間の情報だけを含む場合の結果を, 不等式制約と多期間の情報を含む場合の結果に一般化する. 劣マルチンゲール性と不等式制約に拡張された双対性から次の命題を示すことができる.

命題 1 (拡張した結果) ($F_i^{T_i}$ の価格) $\in [q_{i,-}, q_{i,+}]$ $(i=1,2,\ldots,n)$ を仮定する. このとき, Φ^T の価格の上界が, 次の半無限線形計画問題を解くことによって得られる.

$$\begin{aligned}&\text{maximize}_{\mu\in\Delta(R_+)} \int_{R_+}\phi(x)\mathrm{d}\mu(x)\\&\text{subject to}\\&\quad \int_{R_+} f_i(x)\mathrm{d}\mu(x) \ge q_{i,-}\\&\quad (T_i = T, \text{または } T_i < T \text{ かつ } f_i \text{ が凸},\\&\quad\ \text{または } T_i > T \text{ かつ } f_i \text{ が凹となる } i)\\&\quad \int_{R_+} f_i(x)\mathrm{d}\mu(x) \le q_{i,+}\\&\quad (T_i = T, \text{または } T_i > T \text{ かつ } f_i \text{ が凸},\\&\quad\ \text{または } T_i < T \text{ かつ } f_i \text{ が凹となる } i)\end{aligned} \tag{2}$$

さらに, f_i, ϕ が連続でコンパクトサポートを持ち区分的に多項式 (一次式) であるなら, 問題 (2) は半正定値計画問題 (線形計画問題) に帰着できる. □

この命題で, すべての T_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ が T と等しい場合, 問題 (2) の最適解は Φ^T の価格の上限になる.

3 双対性のファイナンス的意味

モデル A に加えて, 原資産価格 $S(t)$ に $P[S(T) \in [a, b)] > 0$ $(\forall [a, b) \subset R_+)$ を満たす何らかの確率微分方程式を仮定した市場モデルをモデル B とする. モデル B は, B.S. モデルなど多くの研究で用いられるモデルを含むことに注意する. 双対性により, モデル B の下でのヘッジ戦略とモデル A の下でのオプション価格の関係を表す次の命題を得る.

命題 2 (双対性の意味) モデル B と矛盾しないような ($F_i^{T_i}$ の価格) $= q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を仮定し, ϕ, f_i をコンパクトサポートを持つ連続関数とする. このとき, モデル B の下で無リスク資産と F_i^T $(i = 1, 2, \ldots, n)$ からなる買い持ちポートフォリオで Φ^T をスーパーヘッジするのに必要な初期費用の下限は, モデル A の下での Φ^T の価格の上限に等しい. □

4 原資産価格の分布の上限および下限

問題 (1) で $\phi(x) = 1_{[0,a]}(x)$, $f_i(x) = \max(x - k_i, 0)$ とおくと, モデル A の下で与えられたコールオプションの価格から行使日における原資産価格の Q の下での分布の上限を求める問題となる. 双対問題の観点からは, モデル B の下でコールオプションと無リスク資産からなる買い持ちポートフォリオを用いてバイナリオプションをスーパーヘッジする問題である. $0 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ として次の条件を考える.

条件 A: $-1 \leq (q_2 - q_1)/(k_2 - k_1) \leq (q_3 - q_2)/(k_3 - k_2) \leq \cdots \leq (q_n - q_{n-1})/(k_n - k_{n-1}) \leq 0$ が成り立ち, かつ $q_1 > q_2 > \cdots > q_m > q_{m+1} = \cdots = 0$ を満たす $m (\leq n)$ が存在する.

補題 3 条件 A が成り立つとき, またそのときに限り

$$\int_{R_+} \max(x - k_i, 0) \mathrm{d}\mu(x) = q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

を満たす $(R_+, \mathcal{B}(R_+))$ 上の分布 μ が存在する. □

この補題より次の命題を得る.

命題 4 (原資産価格の分布関数に対する上限下限) (C_i^T の価格)$= q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を仮定する. 条件 A が成り立つなら, $a \geq 0$ に対し, モデル A の下での $S(T)$ の分布の上限 $\sup_Q Q[S(T) \leq a]$ と下限 $\inf_Q Q[S(T) \leq a]$ の閉じた形の解 (複雑なのでここでは記述しない) が得られる. 条件 A が成り立たない場合, 与えられた価格 q_i は市場の無裁定性に反する. □

この上限下限を用いることによって, 原資産価格の分布を仮定せずに新たなリスク指標を定めて計算することができる (詳細は発表当日に報告する).

5 計算結果

4 節で求めた原資産価格の上限下限とリスク指標を実際のデータを用いて計算した. 図 1 は, 4 週間前のオプション価格から計算した 2004 年 5 月 13 日の日経 225 の分布 $Q(S(T) < a)$ の上限および下限である. 詳細な計算結果については, 発表当日に報告する.

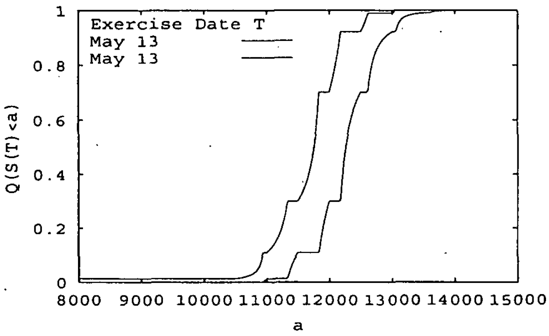

図 1: 日経 225 の分布の上限および下限

6 まとめ

モデル A の下で, 不等式制約と多期間の条件を含むより一般的な問題が凸計画問題に帰着でき効率よく解けることを示した. また, モデル A の下でデリバティブ価格の上限を求める問題の双対問題が実用的なモデル B の下でのヘッジ戦略に関連する問題になることを示した. さらに, モデル A の下で与えられたコールオプションの価格と矛盾しない原資産価格の分布の上限下限を求め, 実際のデータを用いた計算も行った. この上限下限は, 閉じた形の式で求められるので, 提案したリスク指標の他にも投資判断など実際の投資家による様々な応用の可能性があると考えられる.

参考文献

[1] D. Bertsimas and I. Popescu, "On the relation between option and stock prices: A convex optimization approach," *Operations Research*, Vol. 50, 358–374, 2002.

[2] I. Popescu, "A semidefinite programming approach to optimal moment bounds for convex classes of distributions," *INSEAD Technical Report*, 2004.