日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

セカンドベストな混雑課金に関する一考察

慶應義塾大学 *城戸 豊和 KIDO Toyokazu
01605860 慶應義塾大学 増田 靖 MASUDA Yasushi

1 はじめに

本稿では、ネットワーク特に道路網の例にして最適価格の構造を求める。すべての道路に課金可能な場合には、社会最適となる料金設定方法が知られている。料金所が限られた場合に関しては Verhoef [1] が分析しているが、問題を簡潔な形で表現することにより、新たな知見を得る事を目指す。また、利用者の遅れ機会費用が一様でない場合の分析・検証を行う。

2 基本問題

OD ペア、経路、道路の集合をそれぞれ $\mathscr{S}$, $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$ とする。経路は道路の集合であり、いずれかの OD ペアに属している。経路、道路、OD ペアのそれぞれの交通量をベクトル x, y, z で表す。経路 r が OD ペア s に対応する時、$H_{sr}=1$, その他の時 $H_{sr}=0$ として、$H=[H_{sr}]$ とする。同様に A も経路 r が道路 l を通過する場合に $A_{lr}=1$, その他の時 $A_{lr}=0$ とし $A=[A_{lr}]$ とする。OD ペア $s\in\mathscr{S}$ の価値関数を $V_s(z_s)$、また道路 $l\in\mathscr{L}$ の期待遅れの関数を $W_l(y_l)$ とする。W_l, V_s' は連続的微分可能であると仮定し、$V_s'(\cdot)$ はゼロに向かって単調減少、$W_l(\cdot)$ は $W_l(0)\geq 0$ で単調増加であると仮定する。遅れ費用は単位遅れあたり c に比例する。社会的効用 $F(\cdot)$ をすべての人の価値の合計からすべての遅れ費用の合計を引いたものとする。従って、$F(x,y,z)=\mathbb{1}^TV(z)-cy^TW(y)$ となる。ここで、$V(z)=(V_s(z_s):s\in\mathscr{S})$, $W(y)=(W_l(y_l):l\in\mathscr{L})$ である。社会最適な交通量は、

$$\max_{x,y,z}\ F(x,y,z)=\mathbb{1}^TV(z)-cy^TW(y)$$
$$\text{s.t. } x\geq 0\ ,\ Hx=z\ ,\ Ax=y \tag{1}$$

で求められる。B は、料金所 b を経路 r が通過する時 $B_{rb}=1$, その他の時 $B_{rb}=0$ として $B=[B_{rb}]$ とする。従って、各料金所の料金をベクトル p と表すと各経路の料金は Bp となる。価格 p が与えられた下での交通量 x はワードロップ均衡:

$$\begin{aligned} &x\geq 0\\ &H^TM(Hx)-(cA^TW(Ax)+Bp)\leq 0\\ &x^T\{H^TM(Hx)-(cA^TW(Ax)+Bp)\}=0\end{aligned} \tag{2}$$

によって決まるものとする。ここで、$M(z)=(V_s'(z_s):s\in\mathscr{S})$ である。すべての経路に課金できる場合、つまり $B=\mathbb{I}$ の場合には、

$$p^*=cA^TW'(Ax)Ax \tag{3}$$

とすると、社会最適 (1) となる事が知られている。社会最適となる場合を**ファーストベスト**と呼ぶことにする。

3 料金所が限られている場合

料金所が限られている、つまり一般の B の場合にはワードロップ均衡を制約条件とした最適化問題を解かなければならない。つまり、次のような問題を解くという事である。

$$\max_{x,p}\ F(x)=\mathbb{1}^TV(Hx)-c(Ax)^TW(Ax)$$
$$\text{s.t. } x\geq 0\ ,\ G(x,p)\leq 0\ ,\ x^TG(x,p)=0 \tag{4}$$

ここで、

$$G(x,p)\equiv H^TM(Hx)-cA^TW(Ax)-Bp$$

である。一般には決定変数の数 (自由度) が少ないかもしれないので、ファーストベストを達成できるとは限らない。今、与えられた料金所体制の下での最適な状態を**セカンドベスト**と呼ぶ。ここで、y,z が与えられた下で x が唯一決まるものとし、また非退化の仮定をする。さらにアクティブでない x_r をすべてとり除き $\mathscr{R}$ を再定義すると、最適化問題 (4) は、

$$\max_{p}\ F^\circ(p)\ \equiv\ \mathbb{1}^TV(Hx^\circ(p))$$
$$-c(Ax^\circ(p))^TW(Ax^\circ(p)) \tag{5}$$

となる。ここで、$x^\circ(p)$ は均衡条件

$$H^T M(Hx^\circ(p)) - cA^T W(Ax^\circ(p)) - Bp = 0$$

を満たす。B が列に関してフルランクであるという仮定の下で、1次の条件を求めると、

$$p = \{(x_p^\circ(p))^T B\}^{-1}(x_p^\circ(p))^T (cA^T W'(Ax^\circ(p))Ax^\circ(p)) \quad (6)$$

となる。ここで、$x_p^\circ(p) \equiv (dx^\circ(p)/dp)$ である。式 (6) を解釈するために、料金所 b に微小1単位流すとしよう。そのときの料金は p_b となるわけだが、まず $[(x_p^\circ(p))^T B]_{bb'}$ は料金所 b の料金を微小1単位増やした時の料金所 b' を通過する合計の均衡交通量の変化となる。従って、$[((x_p^\circ(p))^T B)^{-1}]_{bb'}$ は、料金所 b の合計の均衡交通量を微小1単位増やすための料金所 b' の料金の変化となる。よって $[((x_p^\circ(p))^T B)^{-1}(x_p^\circ(p))^T]_{br}$ は料金所 b の合計の均衡交通量を微小1単位増やすための経路 r の交通量の変化となる。従って p_b は料金所 b の交通量を微小1単位増やしたときの経路交通量の変化に伴って生ずる各経路の (金額ベースでの) 迷惑の合計となる。

ここで、料金所が限られていてもファーストベストを達成できる十分条件を考える。

命題 (料金所と経路の関係)
rank $B = |\mathscr{R}| \Rightarrow$ 2nd-best = 1st-best

この命題と式 (3) より、高々$\min\{|\mathscr{R}|, |\mathscr{L}|\}$ 箇所に料金所を自由に置くことができれば、ファーストベストを達成する事ができる。料金所は道路に対して設置すると考えると、rank $A = |\mathscr{R}|$ という性質を持つならば、高々$|\mathscr{R}|$ 箇所の道路に料金所を置くことでファーストベストを達成できる。

4 機会費用が人により違う場合

遅れに対する機会費用は人によって違う値をとると考えられる。これをモデル化するために遅れ機会費用の違いによって交通をグループ分けする。$\mathscr{T} = \{1, 2, \cdots, T\}$ をタイプの集合とし、タイプ t の交通流は単位遅れ時間あたり c_t という価値を持つ。経路、道路、OD ペアの交通量をタイプとの組として新たに定義しなおす。つまり、$x = (x_{tr} : t \in \mathscr{T}, r \in \mathscr{R})$, $y = (y_{tl} : t \in \mathscr{T}, l \in \mathscr{L})$, $z = (z_{ts} : t \in \mathscr{T}, s \in \mathscr{S})$ とする。そして、$\hat{H}x = z$, $\hat{A}x = y$ と関連付けられる。ここで、例えば $\hat{H}$ は、

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} H & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & H \end{pmatrix}$$

となる。価値関数は $\hat{V}(z) = (\hat{V}_{ts}(z_{ts}) : t \in \mathscr{T}, s \in \mathscr{S})$ となり、期待遅れの関数は $\hat{W}(y) = (W(\hat{y}), W(\hat{y}), \cdots, W(\hat{y}))$ と $W(\hat{y})$ が T 個並んだものである。ここで、$\hat{y}_l = \sum_{t \in \mathscr{T}} y_{tl}$ である。この場合も同様に最適化問題を考えると、

$$\max_p \ F^\circ(p) \equiv 1^T \hat{V}(\hat{H}x^\circ(p)) - (C\hat{A}x^\circ(p))^T \hat{W}(\hat{A}x^\circ(p)) \quad (7)$$

となる。ここで、$x^\circ(p)$ は均衡条件

$$\hat{H}^T \hat{M}(\hat{H}x^\circ(p)) - (C\hat{A})^T \hat{W}(\hat{A}x^\circ(p)) - \hat{B}p = 0$$

である。同様に1次の条件を求めると、

$$(x_p^\circ(p))^T \hat{B}p = (x_p^\circ(p))^T (C\hat{A})^T \hat{W}'(\hat{A}x^\circ(p))\hat{A}x^\circ(p) \quad (8)$$

となる。タイプが入った場合には仮に B が列に関してフルランクでも (6) のようにかけるかはわからない。しかし、すべてのタイプと経路の組に対して課金できる場合、つまり $\hat{B} = I$ の時には、

$$p = (C\hat{A})^T \hat{W}'(\hat{A}x^\circ(p))\hat{A}x^\circ(p) \quad (9)$$

となり、$\hat{W}(\cdot)$ の条件からタイプによって課金が同じということがわかる。つまり、仮に料金所においてタイプを観測できるものと仮定したが実際には観測できなくとも変わらないという事である。

参考文献

[1] Verhoef, E.T. (2002) "Second-best congestion pricing in general static transportation networks with elastic demands", *Regional Science and Urban Economics*, 32, pp. 281–310

[2] Masuda, Y. and S.J. Whang (2002) "Capacity Management in Decentralized Networks", *Management Science*, Vol. 48, No. 12, December 2002 pp. 1628–1634