日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

ジョブの順序付けを伴う学習型逐次バッチサイズ決定問題

01503164　兵庫県立大学 経営学部　　濱田年男　HAMADA Toshio

1　緒言

単一機械で n 種類のジョブ 1, 2, $\cdots$, n を処理するものとする．ジョブ i $(i=1,2,\cdots,n)$ の処理時間は既知で，p_i であるとする．ここに $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n$ であるとする．これらのジョブはバッチに分けて処理するものとし，各バッチ内のジョブ数をそのバッチのバッチサイズと呼ぶことにする．バッチサイズは 1 以上の整数である．バッチ内の最初のジョブの処理を開始する前に，準備時間が必要であるとする．準備時間は確率変数であり，その分布のパラメータは未知で，共役事前分布を持つものとする．バッチ内のジョブの完了時刻は，そのバッチ内の最後に処理されるジョブの完了時刻と同一であるとする．意思決定者は残っているジョブの中からバッチに含めるジョブを決定し，そのバッチ内のジョブの処理を行って，実際に要した準備時間を観測し，事前分布を更新して，次のバッチに含めるジョブを決定する．全てのジョブの処理を完了するまでこの過程を繰り返す．目的は n 個のジョブの完了時刻の総和の期待値を最小にすることである．

全てのジョブの処理時間が一定の場合には，バッチサイズの決定だけが問題となる (濱田 [2] を参照)．本研究ではジョブの処理時間が異なるために，バッチサイズの決定だけでなく，そのバッチにどのジョブを含めるかを同時に決定する問題である．このような問題で準備時間が既知の場合には，Albers and Brucker [1] において研究がなされているが，それは静的な問題である．これに対して本研究で論じる問題は，準備時間の観察値を得た後に，パラメータの事前分布を更新し，それに基づき次の決定を行うような動的な問題である．

2　動的計画法による定式化

本研究では濱田 [2] と同様に，準備時間がパラメータ u の密度関数

$$\varphi(x|u)=\begin{cases} ue^{-ux}, & if \quad x\geq 0,\\ 0, & if \quad x<0,\end{cases}$$

を持つ指数分布に従い，u の値は未知で，密度関数が

$$\psi(u|w,\alpha)=\begin{cases} \Gamma(\alpha)^{-1}w^{\alpha}u^{\alpha-1}e^{-wu}, & if \quad u\geq 0,\\ 0, & if \quad u<0,\end{cases}$$

のガンマ分布を事前分布として持つ場合を論じる．以下においては条件付期待値 $E\left[f(X)|\, w,\alpha\right]$ は次の式で定義されるものとする．

$$E\left[f(X)|\, w,\alpha\right]=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}f(x)\varphi(x|u)dx\psi(u|w,\alpha)du$$

すなわち

$$E\left[f(X)|\, w,\alpha\right]=\int_0^{\infty}f(x)\frac{\alpha w^{\alpha}}{(w+x)^{\alpha+1}}dx$$

となる．

現在の事前分布のパラメータが (w,α) であり，残りのジョブの集合が S のときの状態を $(S;w,\alpha)$ で表す．$V(S;w,\alpha)$ は状態が $(S;w,\alpha)$ である時に，最適政策を用いたときの最小期待総完了時刻であり，また $V^B(S;w,\alpha)$ は状態が $(S;w,\alpha)$ である時に，まず $B\subset S$ であるような集合 B に含まれるジョブを 1 つのバッチとして処理し，以後は最適政策を用いたときの最小期待総完了時刻であるとする．このとき

$$V(S;w,\alpha)=\min_{B\subset S}V^B(S;w,\alpha)$$

が成立する．ここに $V(\phi;w,\alpha)=0$ であり，$1\leq k\leq n$ に対して

$$V^B(S;w,\alpha)=|S|w(\alpha-1)^{-1}+|S|\sum_{i\in B}p_i$$
$$+E[V(S\backslash B;w+x,\alpha+1)|w,\alpha]$$

である．

まず次の補題が容易に得られる．

補題 1　S と S' は $i\neq j$ に対して $S\backslash\{i\}=S'\backslash\{j\}$ であるような 2 つの集合であるとする．このとき，(i) $p_i>p_j$ ならば $V(S;w,\alpha)>V(S';w,\alpha)$，(ii) $p_i=p_j$ ならば $V(S;w,\alpha)=V(S';w,\alpha)$，(iii) $p_i<p_j$ ならば $V(S;w,\alpha)<V(S';w,\alpha)$，が成立する．

さらに，次の補題が得られる．

補題 2　状態 $(S;w)$ に対して，もし最適なバッチが B で $|B|=k$ ならば，B は S 内の最小の k 個のジョブの集合である．

証明　背理法による．□

最初は $S=\{1,2,\cdots,n\}$ で $p_1\geq p_2\geq\cdots\geq p_n$ を満たすとき，この補題により，$|B|=k$ ならば $S\backslash B=\{1,2,\cdots,n-k\}$ であるから，$V(S;w,\alpha)$ お

よび $V^B(S|w,\alpha)$ を $V_n(w,\alpha)$ および $V_n^k(w,\alpha)$ でそれぞれ置き換えることにより，再帰方程式は次のように書き換えられる．

$$V_n(w,\alpha) = \min_{1\le k\le n} V_n^k(w,\alpha)$$

$$V_0(w,\alpha) = 0$$

が成立する．ここに，$1\le k\le n$ に対して

$$V_n^k(w,\alpha) = nw(\alpha-1)^{-1} + n\sum_{j=n-k+1}^{n} p_i$$
$$+E[V_{n-k}(w+x,\alpha+1)|w,\alpha] \qquad (1)$$

である．

$V_n(w,\alpha)$ および $V_n^k(w,\alpha)$ に対して次の性質が成り立つ．

補題 3 $n\ge 2$，$p_1\ge p_2\ge\cdots\ge p_n$，$1\le k\le n$，$w>0$，$\alpha>1$ とする．このとき $V_n(w,\alpha)$ および $V_n^k(w,\alpha)$ は w について連続で狭義単調増加，α について連続で狭義単調減少である．

3 諸性質

$V_n^k(w,\alpha)$ は以下のような性質を満たす．

補題 4 $n\ge 2$，$p_1\ge p_2\ge\cdots\ge p_n$，$1\le k\le n-1$，$w>0$，$\alpha>1$ とする．このとき

$$V_n^k(w,\alpha) - V_{n-1}^k(w,\alpha) = w(\alpha-1)^{-1} + \sum_{j=n-k+1}^{n-1} p_i$$
$$+np_n - (n-1)p_{n-k} + E[V_{n-k}(w+x,\alpha+1)$$
$$-V_{n-k-1}(w+x,\alpha+1)|w,\alpha]$$

となる．

証明 (1) および

$$V_{n-1}^k(w,\alpha) = (n-1)w(\alpha-1)^{-1} + (n-1)\sum_{j=n-k}^{n-1} p_i$$
$$+E[V_{n-k-1}(w+x,\alpha+1)|w,\alpha]$$

より明らかである．□

補題 5 $n\ge 2$，$p_1\ge p_2\ge\cdots\ge p_n$，$1\le k\le n-1$，$w>0$，$\alpha>1$ とする．このとき

$$V_n^k(w,\alpha) - V_{n-1}^{k-1}(w,\alpha)$$
$$= w(\alpha-1)^{-1} + \sum_{j=n-k+1}^{n} p_i + (n-1)p_n \qquad (2)$$

となる．

証明 (1) および

$$V_{n-1}^{k-1}(w,\alpha) = (n-1)w(\alpha-1)^{-1}$$
$$+(n-1)\sum_{j=n-k}^{n-1} p_i + E[V_{n-k}(w+x,\alpha+1)|w,\alpha]$$

より明らかである．□

補題 6 $n\ge 2$，$p_1\ge p_2\ge\cdots\ge p_n$，$1\le k\le n-2$，$w>0$，$\alpha>1$ とする．このとき

$$V_n^k(w,\alpha) - V_n^{k+1}(w,\alpha)$$
$$= -np_{n-k} + E[V_{n-k}(w+X,\alpha+1)$$
$$-V_{n-k-1}(w+X,\alpha+1)|w,\alpha]$$

となる．

補題 7 $n\ge 2$，$p_1\ge p_2\ge\cdots\ge p_n$，$1\le k\le n-2$，$w>0$，$\alpha>1$ とする．このとき

$$V_n^k(w,\alpha) - V_n^{k+1}(w,\alpha)$$
$$= V_{n-1}^k(w,\alpha) - V_{n-1}^{k+1}(w,\alpha) - p_{n-k}$$

となる．

証明 (2) および

$$V_n^{k+1}(w,\alpha) - V_{n-1}^k(w,\alpha)$$
$$= w(\alpha-1)^{-1} + \sum_{j=n-k}^{n} p_i + (n-1)p_n$$

より明らかである．□

補題 7 から次の性質が得られる．

性質 状態 $(n-1;w,\alpha)$ においてバッチサイズ $k+1$ よりも，バッチサイズ k の方が優れているならば状態 $(n;w,\alpha)$ においても，バッチサイズ $k+1$ よりも，バッチサイズ k の方が優れている．

謝辞 本研究は日本学術振興会の科学研究費補助金 (C)(2) 15510136 の補助により行われたものである．

参考文献

[1] Albers, S. and Brucker, P. (1993) The complexity of one-machine batching problems. *Discrete Applied Mathematics* **47**, 87-107.

[2] 濱田 (2004) 学習型逐次バッチサイズ決定問題の最適政策について 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2004 年度秋季研究発表会アブストラクト集, 250-251.