日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

最大利益根付木問題のアルゴリズムII
―最大重み経路法―

01102100　法政大学　*古林　隆　KOBAYASHI Takashi
01502860　法政大学　福馬　敏子　FUKUMA Toshiko

1. はじめに

ケーブルテレビのように，センターと利用者をケーブルなどでつなぐことによりサービスを提供する場合に発生する問題に**最大利益根付木問題**がある．古林等[1]は，この問題の近似最適解を求めるアルゴリズムとして，各点に木を付随させて，それらを連結していくことを繰り返していく方法(**付随木連結法**と呼ぶことにする)を提案しているが，計算量の点からあまり望ましいものではない．そこで，最大重み経路を求めることを繰り返して近似最適解を得ることによって，計算量を減少させるアルゴリズム－**最大重み経路法**を提案する．

2. 最大利益根付木問題

点の集合をN, 無向枝の集合をAとする無向連結グラフ$G=(N,A)$が与えられている．点1をセンターとし，点iの収入を$p_i(p_1=0)$，点iと点jを結ぶ枝$\{i,j\}$のコストを$c_{ij}(c_{ij}=c_{ji}>0)$とする．

このとき，点1を根とする木$G_T=(N_T,A_T)$の中で，利益

$$z=\sum_{i\in N_T}p_i-\sum_{\{i,j\}\in A_T}c_{ij}$$

を最大にするものを求めるのが最大利益根付木問題である．

3. アルゴリズム

アルゴリズムは，5段階(手順)に分かれている．最大重み経路(それに含まれる枝の重みの和を最大にする経路)を求めることを核とするが，予め最大重み経路が存在するように，すなわち，正の重みの閉路が存在しないようにしておく必要がある．手順1，2は，そのためのものである．手順3，4で，N_Tが定まるが，それまでに得られたA_Tは，最小のコストでN_Tを張っているとは限らないので，手順5で，N_Tを張る最小木を求めることにする．

手順1．$p_i\geqq c_{ij}$かつ$p_j\geqq c_{ij}$である点iと点jが存在すれば，それらを併合し，点iとの間にも点jとの間にも枝が存在する点に対しては，コストが大きい方の枝を除く．

併合後のグラフを$G_W=(N_W,A_W)$とし，点i ($i\in N_W$) に併合されている点の集合 (iを含む) をS_iとする．($S_1=\{1\}$である．)

手順2．枝$\{i,j\}(i<j)$の両方向の重みを決定する．
iからjへの向きの重みを$w_{ij}=p_j-c_{ij}$,
jからiへの向きの重みを$w_{ji}=p_i-c_{ij}$
とする．

ただし，$i=1$または$w_{ij}>0$であれば，$w_{ji}=-\infty$とし，$w_{ji}>0$であれば，$w_{ij}=-\infty$とする．

手順3．$N_{W1}=\{1\}$とする．
$N_{W0}=N_W-N_{W1}$が空になるまで，以下の(3.1)から(3.4)を繰り返す．

(3.1) N_{W1}の大きさが2以上のときは，N_{W1}の2点間を結ぶ枝に対しては，重みはすべて0とする．

N_{W1} (のいずれかの点) から各点j ($j\in N_{W0}$) への最大重み経路を求め，その重みをv_jとする．

(3.2) v_jを最大にするj (の一つ) を$jmax$，点$jmax$への経路をR_{jmax}，R_{jmax}に含まれていて，N_{W1}に含まれない点の集合をN_{WR}とする．

(3.3) N_{W1}にN_{WR}を加える．

(3.4) $i\in N_{WR}$，$j\in N_{W0}-N_{WR}$，$w_{ij}=-\infty$である枝$\{i,j\}$が存在すれば，$w_{ij}=p_j-c_{ij}(<0)$とする．

最大重み経路R_{jmax}をすべてつなぐことによってN_Wを張る木が得られる．

手順4．手順3で求めたN_Wを張る木から利益を減少させる枝を“切り落とす”．

その重みと(根の方から見て)それより先の枝の重みの和が負である枝を除く．

点1とつながっている点の集合をN_{WT}とし，

$$N_T=\bigcup_{i\in N_{WT}}S_i$$

とする．

手順5．元のグラフGで枝$\{i,j\}$の長さをc_{ij}として，N_Tを張る最小木を求めて，それを$G_T=(N_T,A_T)$とする．

[正の重みの閉路が存在しないことの証明]

任意の閉路を L とし，L に含まれる点の集合を N_L，向きも付けた枝の集合を A_L，重みを $w(L)$ とする．

$p_i > c_{ij}$ である $(i,j) \in A_L$ が存在すれば，$w_{ij} = -\infty$ より，$w(L) = -\infty$.

すべての $(i,j) \in A_L$ に対して $p_i \leqq c_{ij}$ であれば，

$$w(L) \leqq \Sigma(p_j - c_{ij})$$
$$= \Sigma p_j - \Sigma c_{ij} = \Sigma(p_i - c_{ij}) \leqq 0.$$ （証明終）

4. 実行例

図 1 にグラフの例を示す．

手順 1 で，点 *9* は，点 *8* に併合され，さらに，点 *11* が併合されるので，

$N_W = \{1,2,3,4,5,6,7,8,10,12\}$,

$S_8 = \{8,9,11\}$

となる．

手順 3 で求められた N_W を張る木を図 2 に示す．

手順 4 で，点 *6,7,10,12* が除かれるので，

$N_{WT} = \{1,2,3,4,5,8\}$,

$N_T = \{1,2,3,4,5,8,9,11\}$

となる．

手順 5 で求められた，N_T を張る最小木を図 3 に示す．

$$z = \sum_{i \in N_T} p_i - \sum_{\{i,j\} \in A_T} c_{ij}$$
$$= 155 - 110 = 45$$

となった．

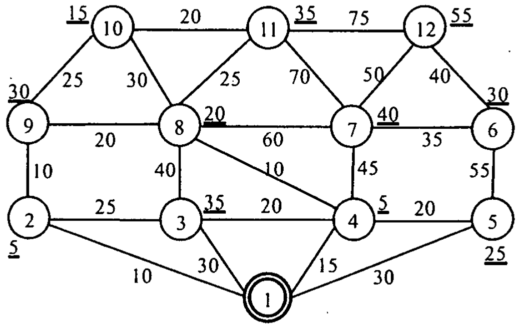
5. 数値実験の結果

点の数 n =100，枝の数 m=207 のグラフで，p には，1 から 80 までの一様乱数，c には 1 から 100 までの一様乱数を与えることにして，両方のアルゴリズムで解くことを 100 回繰り返した．付随木連結法の目的関数値を z_1，最大重み経路法のそれを z_2 として，$\Delta z = (z_1 - z_2)/z_1$ を求めたところ，負になったのが 14 回，0 になったのが 2 回，正で 5%以下が 67 回であった．なお，最大値は 13%であった．次に，点の数を 50 から 300 まで変化させて，各 100 回の平均の計算時間 t を比較した．n と t の両方の対数をとって，直線をあてはめた結果，

付随木連結法　$t_1 = 0.0323n^{2.88}$　(μsec)

最大重み経路法　$t_2 = 0.1260n^{1.80}$　(μsec),

を得た．



点に付した数値は収入，枝に付した数値はコストを示す．

図 1. グラフの例

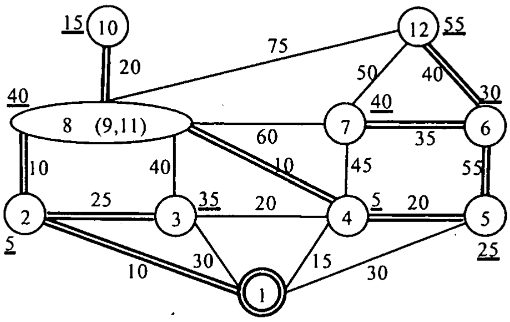


図2. N_Wを張る木

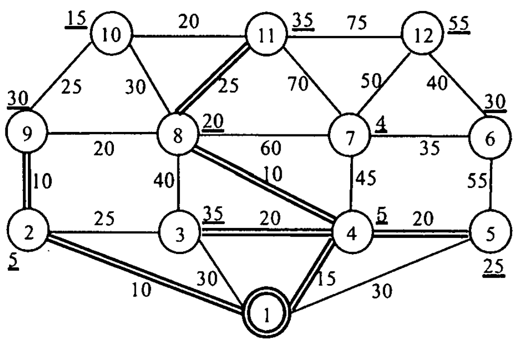


図3. N_Tを張る最小木

6. おわりに

最大重み経路法を用いることによって，目的関数の値は，多少悪くなることがあるが，計算量は，大幅に減少した．今後の課題としては，点の結合後の p の再計算などによって，最適解に近づける（目的関数の値を良くする）ことが考えられる．

参考文献

[1] 古林隆，福馬敏子他：最大利益根付き問題のアルゴリズム，2003 年秋季研究発表会アブストラクト集，pp. 166-167，日本オペレーションズ・リサーチ学会，2003.

[2] Rao,V.V. and Sridharan,R. : Minimum-Weight Rooted Not-Necessarily-Spanning Arborescence Problem, Networks 39, pp.77-87, 2002.