日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

リーグ戦の最適会場割当問題に対するSDP緩和を用いた手法

02203000 筑波大学 *鈴鹿 順美 SUZUKA Ayami
01606760 東京農工大学 宮代 隆平 MIYASHIRO Ryuhei
01703540 筑波大学 吉瀬 章子 YOSHISE Akiko
01605000 東京大学 松井 知己 MATSUI Tomomi

1 はじめに

本稿では，スポーツスケジューリング問題における最適会場割当問題について，グラフ上の組合せ最適化問題であるMIN RES CUTとして定式化し，Goemans–Williamson[1] のSDP緩和を用いた解法に基づいたアルゴリズムを提案する．

以降では，各チームにとって，自チーム(他チーム)の本拠地をホーム(アウェイ)と呼ぶ．宮代–松井[2]は，参加チームと対戦組合せが与えられたとき，アウェイが2連続する箇所が少ない会場割当を求める問題を，MAX RES CUT 及び MAX 2SAT として定式化し，Goemans–Williamson[1] の解法を適用し，非常に精度の良い解が得られることを実証している．Easton–Nemhauser–Trick[3] は，参加チームと各チームの本拠地間の距離行列が与えられたとき，会場の割当と同時に対戦組合せも作成する問題を扱っている．この問題は証明こそされていないがNP-hardであると強く信じられている．Eastonらの実験では，8チームの場合でさえも，20台の計算機上での並列分枝限定法を適用して約4日間を要している．

2 最適会場割当問題

チームの集合を $P=\{1,2,\cdots,2n\}$，開催期の集合を $T=\{1,2,\cdots,4n-2\}$ とする．2重総当たり戦の対戦組合せ表 τ は行と列がそれぞれ P と T でインデックスされた行列で以下を満たすものである: (1) チーム $k\in P$ に対応する行は $P\setminus\{k\}$ 中の各要素を丁度2つずつ含み，(2) 行列 τ の各要素 (k,t) について，$\tau(\tau(k,t),t)=k$ である．表1は $2n=4$ の対戦組合せ表の例である．本稿では，各対戦を行う会場は，対戦する2チームのいずれかのホームで行うものとする．

表 1: 対戦組合せ表 τ 例 $(2n=4)$.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	3	2	4
2	1	4	3	4	1	3
3	4	1	2	1	4	2
4	3	2	1	2	3	1

また各チームは，他の全てのチームのホームで必ず1回ずつ，そのチームと対戦しなければならない．上記を満たすような対戦会場の割当を単に会場割当と呼ぶ．最適会場割当問題とは，会場割当の中で総移動距離を最小にするものを見つける問題である．ただし，総移動距離とは，次のように定義される各チームの移動距離の総和である: 各チームのホーム間の距離は，行と列がそれぞれ P でインデックスされた距離行列で与えられる．距離行列の (i,j) 要素である $d_{i,j}$ はチーム i のホームから j のホームまでの距離を表し，全ての対角要素 $d_{i,i}$ は0である．対戦組合せ表と会場割当が与えられたとき，チーム k の移動距離は，k のホームを出発し，対戦組合せ表と会場割当で規定される順に対戦会場を訪問し，最後に k のホームに戻ってくる経路の長さと定義する．

3 MIN RES CUTへの定式化

無向グラフ $G=(V,E)$ が与えられるとする．頂点の部分集合 $V'\subseteq V$ に対して，$\delta(V')=\{\{v_i,v_j\}|\ v_i\not\in V'\ni v_j\}$ をカットと呼ぶ．MIN RES CUT は，$G=(V,E)$，頂点 $v_r\in V$，$w:E\to\mathbb{R}$ と，集合 $E_{\rm cut}\subseteq\{X\subseteq V|\ |X|=2\}$ が与えられたとき，$v_r\not\in V'$ かつ $E_{\rm cut}\subseteq\delta(V')$ という制約の下で，カットの重みの総和 $\sum_{e\in\delta(V')\cap E}w(e)$ が最小となる V' を求める問題である．ちなみに任意の $V'\subseteq V$ について，$\delta(V')=\delta(V\setminus V')$ が成り立つことから，制約 $v_r\not\in V'$ はMIN RES CUTにおいて意味を持たないが，以降での記述を簡潔にするために導入している．

以下では，最適会場割当問題を MIN RES CUT として定式化する．入力された対戦組合せ表 τ の各要素を頂点 $v_{k,t}$ とし，$V=\{v_{k,t}|\ k\in P,\ t\in T\}\cup\{v_r\}$ とする．ここで，v_r は人工的に導入する頂点である．枝集合は，$E=\{\{v_{k,t-1},v_{k,t}\}|\ k\in P,t\in T\setminus\{1\}\}\cup\{\{v_r,v_{k,t}\}|\ k\in P,t\in T\}$，$E_{\rm cut}=\{\{v_{k,t},v_{\tau(k,t),t}\}|\ k\in P,t\in T\}\cup\{\{v_{k,t},v_{k,t'}\}|\ k\in P,\ t,t'\in T,\tau(k,t)=\tau(k,t'),t\neq t'\}$ と定義する．任

意の $e \in E_{\text{cut}}$ の両端点は，(a)τ によって規定された対戦を行う 2 チーム，あるいは (b) 同じ対戦相手との 1 回戦目と 2 回戦目を表しており，ホームかアウェイに振り分けるための制約 $E_{\text{cut}} \subseteq \delta(V')$ が必要となる．

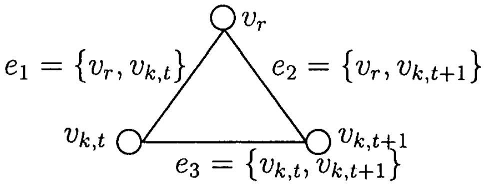

図 1: $v_r, v_{k,t}, v_{k,t+1}$ が誘導する部分グラフ.

MIN RES CUT の許容解 V' が与えられたとき，V' 中の各頂点 $v_{k,t}$ に対応する対戦は，チーム k のアウェイで行うものとすると s 会場割当が得られる．これは，制約 $E_{\text{cut}} \subseteq \delta(V')$ によって，任意の $e \in E_{\text{cut}}$ の両端点にそれぞれホームとアウェイが割り当てられるからである．一方，最適会場割当問題の許容解が与えられたとき，対戦組合せ表中でアウェイが割り当てられた要素に対応する頂点を V' とすると，MIN RES CUT の許容解となる．以上から，最適会場割当問題の許容解集合と，MIN RES CUT の許容解集合間に全単射が存在することが分かる．最後に枝の重みを定義する．図 1 に示す v_r, $v_{k,t}$, $v_{k,t+1}$ が誘導する部分グラフはチーム k の t 期と $t+1$ 期を表す．$v_r, v_{k,t} \notin V' \ni v_{k,t+1}$ のとき，k の t 期と $t+1$ 期の会場割当は "HA" であることを意味する．任意の 2 期間の会場割当は全部で 4 通りある．表 2 に，V' に含まれる部分グラフの頂点，$V \setminus V'$ に含まれる部分グラフの頂点，カット，及び移動距離を示す．ただし，$i = \tau(k,t)$, $j = \tau(k,t+1)$ である．表 2 に示すカットの重みの和と対応する移動距離の関係から，各枝 e の重みを以下の式

$$
w(e)=\begin{cases}
\frac{d_{k,\tau(k,t)}-d_{\tau(k,t-1),k}+d_{\tau(k,t-1),\tau(k,t)}}{2} \\
\qquad +\frac{-d_{k,\tau(k,t+1)}+d_{\tau(k,t),k}+d_{\tau(k,t),\tau(k,t+1)}}{2}, \\
\qquad \text{if } e=\{v_r, v_{k,t}\},\ k \in P,\ t \in \{2,\cdots,4n-3\}, \\
\frac{-d_{k,\tau(k,2)}+d_{\tau(k,1),k}+d_{\tau(k,1),\tau(k,2)}}{2}+d_{k,\tau(k,1)}, \\
\qquad \text{if } e=\{v_r, v_{k,1}\},\ k \in P, \\
\frac{d_{k,\tau(k,4n-2)}-d_{\tau(k,4n-3),k}+d_{\tau(k,4n-3),\tau(k,4n-2)}}{2} \\
\qquad +d_{\tau(k,4n-2),k}, \\
\qquad \text{if } e=\{v_r, v_{k,4n-2}\},\ k \in P, \\
\frac{d_{k,\tau(k,t+1)}+d_{\tau(k,t),k}-d_{\tau(k,t),\tau(k,t+1)}}{2}, \\
\qquad \text{if } e=\{v_{k,t}, v_{k,t+1}\},\ k \in P,\ t \in \{1,\cdots,4n-3\},
\end{cases}
$$

で与えると，MIN RES CUT の任意の許容解 V' に対し，そのカットの重みは，V' に対応する会場割当を用いた際の総移動距離になる．

以上の手続きによって，最適会場割当問題は等価な MIN RES CUT に帰着することができる．

表 2: 会場割当とカットの関係.

	(1)HH	(2)HA	(3)AH	(4)AA
V'	$\emptyset$	$v_{k,t+1}$	$v_{k,t}$	$v_{k,t}, v_{k,t+1}$
$V \setminus V'$	$v_r, v_{k,t}, v_{k,t+1}$	$v_r, v_{k,t}$	$v_r, v_{k,t+1}$	v_r
$\delta(V')$	$\emptyset$	e_2, e_3	e_1, e_3	e_1, e_2
距離	0	$d_{k,j}$	$d_{i,k}$	$d_{i,j}$

4 SDP 緩和解法

MIN RES CUT の制約は，MAX RES CUT の制約と同じ構造を持つことから，[1] と同様の SDP 緩和手法が適用できる．ただし最小化問題であるため，得られる解の近似比率を [1] と同じ手法で理論的に保証することはできない．3 節で定式化した MIN RES CUT に SDPA6.0[4] を用いて Goemans–Williamson[1] の解法を適用した実験結果を示す．比較のため，最適会場割当問題を整数計画問題として定式化し，CPLEX8.0 を用いて解く実験も行った．実験環境は，Dell Dimension 8100 (CPU: Pentium4, 1.4GHz, RAM: 768MB, OS: Vine Linux 2.6) である．チーム数 $16, 18, \cdots, 26, 30$ に対し，それぞれ 20 題ずつ解いた．実験結果の概要を表 3 に示す．24 チームまでの問題について，最適値との比率が 115%以下の解が短時間で得られている．整数計画法では，24 チームの場合，数日間を要した問題もあり 26 チーム以上の実験は打ち切った．以上から，本稿で提案する手法の有効性が裏付けられる．

表 3: 計算機実験結果.

チーム数	上界値/最適値	緩和解法 実行時間 [秒]		整数計画法 実行時間 [秒]	
	平均	平均	標準偏差	平均	標準偏差
16	1.00088	84.0	3.6	17.8	7.2
18	1.14574	126.5	26.0	44.3	25.8
20	1.00096	258.8	22.5	194.6	319.9
22	1.00234	390.7	12.5	1397.4	952.9
24	1.00299	640.9	32.7	40710.0	91114.3
26	–	1023.4	43.5	–	–
30	–	2184.6	99.3	–	–

参考文献

[1] M. X. Goemans and D. P. Williamson: "Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming." *Journal of the ACM*, **42** (1995), pp. 1115–1145.

[2] R. Miyashiro and T. Matsui: "Semidefinite programming based approaches to the break minimization problem." *Computers & Operations Research*, to appear.

[3] K. Easton, G. Nemhauser and M. Trick: "Solving the travelling tournament problem: A combined integer programming and constraint programming approach." in: PATAT IV, *LNCS*, Springer-Verlag, Berlin, **2740** (2003), pp. 100–109.

[4] M. Yamashita, K. Fujisawa and M. Kojima: "Implementation and evaluation of SDPA 6.0 (semidefinite programming algorithm 6.0)." *Optimization Methods and Software*, **18** (2003), pp. 491–505.