日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

最小極大流問題に対する D.C. 最適化法

01701730 筑波大学 山本 芳嗣 YAMAMOTO Yoshitsugu
02203070 筑波大学 *善家 大輔 ZENKE Daisuke

1. はじめに

最大流問題を解く際, "一旦流した流量は減らせない" という仮定を置くと, 最大流が得られず極大流しか得られないことがある. 従って, 極大流の中で最小の流量値は, ネットワークをどれほど非効率的に使用できるかという指標のひとつとして考えられる. そのような流量値を求める問題を最小極大流問題 (minimum maximal flow problem) という. 本研究では, 最小極大流問題に対して D.C. 最適化法 [2] のひとつである外部近似法を適用する. 適用に際し,

- ギャップ関数の拡張
- パラメータ ε の設定による最適性条件の導出

を行う.

1.1. 最小極大流問題 (mmF)

ネットワーク $(V, s, t, E, \boldsymbol{c})$ が与えられている. ここで, V は始点 s と終点 t を含む $m+2$ 個の頂点の集合, E は n 本の枝の集合, $\boldsymbol{c}$ の第 h 要素 c_h は枝 $h \in E$ に対する容量である. このネットワーク接続行列から得られる行列 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ を用いて, **実行可能流の集合** $X = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{0} \leqq \boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{c} \,\}$ を定義すると, 最大流問題は

$$\left|\begin{array}{ll} \max\limits_{\boldsymbol{x}} & \phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{d}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x} \in X, \end{array}\right.$$

と定式化される. ここで, $\phi(\boldsymbol{x})$ は実行可能流 $\boldsymbol{x} \in X$ に対する**流量値**である. 本研究では, 与えられるネットワークに対して以下の仮定を置く.

仮定 1.1 各枝 $h \in E$ の容量 c_h は正の整数である.

仮定 1.2 ネットワークは t-s-path をもたない.

不等式 $\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$ を満たす実行可能流 $\boldsymbol{y} \in X$ が存在しないとき, 実行可能流 $\boldsymbol{x} \in X$ を**極大流**といい, その集合を X_M とする. 極大流の集合 X_M 上で最小の流量値を求める問題:

$$(mmF) \quad \left|\begin{array}{ll} \min\limits_{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{d}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x} \in X_M, \end{array}\right.$$

を**最小極大流問題** (mmF) という. (mmF) は Shi-山本 [4] により初めて研究され, 繁野-高橋-山本 [5], Muu-Shi [3] などが解法を提案している.

1.2. ギャップ関数による (mmF) の再定式化

全ての要素が 1 の行ベクトル $\boldsymbol{e}$ を用いて, **ギャップ関数** $g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty)$ を

$$g(\boldsymbol{x}) = \max\{\, \boldsymbol{e}\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in X,\ \boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{x} \,\} - \boldsymbol{e}\boldsymbol{x}, \qquad (1)$$

と定義する. 定義により, g は区分的に線形な凹関数であり, 任意の $\boldsymbol{x} \in X$ に対して $g(\boldsymbol{x}) \geqq 0$ である. また, $\overline{\boldsymbol{x}} \in X$ かつ $g(\overline{\boldsymbol{x}}) = 0$ であることは $\overline{\boldsymbol{x}} \in X_M$ と等価である. 従って, $G = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\boldsymbol{x}) \geqq 0 \,\}$ を用いて, (mmF) は

$$(mmF) \quad \left|\begin{array}{ll} \min\limits_{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{d}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x} \in X \backslash \operatorname{int} G, \end{array}\right.$$

と再定式化される. 実行可能解の集合が二つの凸集合 X と $\operatorname{int} G$ の差となるため, これは D.C. (Difference of two Convex Sets/Functions) 最適化問題のひとつである [2].

2. ギャップ関数の拡張

(mmF) に対して外部近似法を適用する際, $\boldsymbol{v} \notin X$ に対する $g(\boldsymbol{v})$ を評価することがあるが, $\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{v}$ を満たす $\boldsymbol{y} \in X$ が存在しない場合は $g(\boldsymbol{v}) = -\infty$ となり, 全く情報が得られない. これを避けるため, g を $\mathbb{R}^n$ 全域に拡張したい. そこで, 新たに変数 $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$ と定数 $\overline{\boldsymbol{\beta}}^{\top} \in \mathbb{R}^n$ を導入し,

$$\begin{aligned} \overline{g}(\boldsymbol{x}) \ = \ & \max\{\, \boldsymbol{e}\boldsymbol{y} - \overline{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{t} \mid \boldsymbol{y} \in X,\ \boldsymbol{y} + \boldsymbol{t} \geqq \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{t} \geqq \boldsymbol{0} \,\} \\ & - \boldsymbol{e}\boldsymbol{x}, \end{aligned} \qquad (2)$$

を定義する. 双対定理と仮定 1.1 より以下が成立する.

定理 2.1 $\operatorname{dom} \overline{g} = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \overline{g}(\boldsymbol{x}) > -\infty \,\}$ として,

(i) $\operatorname{dom} \overline{g} = \mathbb{R}^n$.

(ii) $\overline{\boldsymbol{\beta}} \geqq n\boldsymbol{e}$ のとき, $\operatorname{dom} g$ 上で $\overline{g} = g$. □

従って, $\overline{\boldsymbol{\beta}} = n\boldsymbol{e}$ とすると上記 (mmF) の G を $\overline{G} = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \overline{g}(\boldsymbol{x}) \geqq 0 \,\}$ に置き換えることができる.

3. (mmF) に対する外部近似法

本節では, 外部近似法に基づき (mmF) の最適値を求めるアルゴリズムを提案する.

3.1. 最適性条件

外部近似法の終了条件が最適性条件となるために, (mmF) が**正規条件**, i.e., $X \backslash \mathrm{int}\,\overline{G} = \mathrm{cl}\,(X \backslash \overline{G})$ を満たさなければならない [2]. しかしこれは一般に成立しないため, パラメータ $\varepsilon > 0$ を導入し, (mmF) の $\overline{G}$ を $\overline{G}_\varepsilon = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \overline{g}(\boldsymbol{x}) \geqq \varepsilon \,\}$ に置き換えた問題:

$$(mmF_\varepsilon) \qquad \left| \begin{array}{ll} \min\limits_{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{dx} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x} \in X \backslash \mathrm{int}\,\overline{G}_\varepsilon, \end{array} \right.$$

を考える. 定理 2.1 とギャップ関数の定義より以下が成立する.

定理 3.1 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, (mmF_ε) は正規条件, *i.e.*, $X \backslash \mathrm{int}\,\overline{G}_\varepsilon = \mathrm{cl}\,(X \backslash \overline{G}_\varepsilon)$ を満たす. □

以降, 始点 s から出ている枝の本数を δ_s と表記する, i.e., $\delta_s = |\{\, i \mid d_i = +1 \,\}|$. 拡張されたギャップ関数 $\overline{g}$ の定義より以下が成立する.

補題 3.2 (mmF) の最適解を $\boldsymbol{x}^*$, (mmF_ε) の最適解を $\boldsymbol{x}^*_\varepsilon$ とすると, $|\boldsymbol{dx}^* - \boldsymbol{dx}^*_\varepsilon| \leqq \varepsilon\delta_s$. □

仮定 1.1, 定理 3.1, 補題 3.2 を用いてアルゴリズムの最適性条件となる次の定理を得る.

定理 3.3 $\varepsilon \in (0, 1/\delta_s)$ に対する (mmF_ε) の実行可能解を $\overline{\boldsymbol{x}} \in X \backslash \mathrm{int}\,\overline{G}_\varepsilon$ とし, 集合

$$S(\overline{\boldsymbol{x}}) = \{\, \boldsymbol{x} \in X \mid \boldsymbol{dx} \leqq \boldsymbol{d\overline{x}} \,\}, \tag{3}$$

を定義する. もし $S(\overline{\boldsymbol{x}}) \subseteqq \overline{G}_{\varepsilon'}$ を満たす $\varepsilon' \in (0, \varepsilon]$ が存在すれば, (mmF) の最適値は $\lceil \boldsymbol{d\overline{x}} \rceil$ に等しい. □

3.2. アルゴリズム: 外部近似法

アルゴリズムでは, 次の補題を利用している.

補題 3.4 $\varepsilon \in (0, 1)$ であれば, $\overline{g}(\boldsymbol{v}) \leqq 0$ を満たす任意の $\boldsymbol{v}$ に対して $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{v}) \cap \partial\overline{G}_\varepsilon \neq \emptyset$ である. ここで, $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{v}) = \{\, (1-\theta)\boldsymbol{0} + \theta\boldsymbol{v} \mid \theta \in (0, 1) \,\}$ とする. □

以降, 凸多面体 P の端点集合を P_V と表記し, アルゴリズムを擬似コードで記述する.

/** アルゴリズム: 外部近似法 **/

⟨0⟩ (mmF_ε) の実行可能解 $\overline{\boldsymbol{x}}$ を見つける. $c_{max} := \max\{\, \boldsymbol{ex} \mid \boldsymbol{x} \in X \,\}$ として, $P^0 := \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{ex} \leqq c_{max},\ \boldsymbol{dx} \leqq \boldsymbol{d\overline{x}},\ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0} \,\}$. $k := 0$ とする.

⟨k⟩ $\varepsilon' := \min\{\, \overline{g}(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in P^k_V \,\}$ の最適解 $\boldsymbol{v}^k$ を得る.

⟨$k1$⟩ $\boldsymbol{d\overline{x}} = 0$ か $\varepsilon' > 0$, i.e., $S(\overline{\boldsymbol{x}}) \subseteqq \overline{G}_{\varepsilon'}$ ならば, (mmF) の最適値 $\lceil \boldsymbol{d\overline{x}} \rceil$ を得て終了. そうでなければ, $\boldsymbol{x}^k \in (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{v}^k) \cap \partial\overline{G}_\varepsilon$ を求める.

⟨$k2$⟩ $\boldsymbol{x}^k \in X$ であれば, $\overline{\boldsymbol{x}} := \boldsymbol{x}^k$ とし, $P^{k+1} := P^k \cap \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{dx} \leqq \boldsymbol{d\overline{x}} \,\}$ とする. そうでなければ, $l(\boldsymbol{v}^k) > 0$ かつ任意の $\boldsymbol{x} \in S(\overline{\boldsymbol{x}})$ に対して $l(\boldsymbol{x}) \leqq 0$ を満たす関数 l を求め, $P^{k+1} := P^k \cap \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid l(\boldsymbol{x}) \leqq 0 \,\}$ とする.

⟨$k3$⟩ $k := k + 1$ として ⟨k⟩ へ.

注 3.5 端点集合 P^k_V の情報から P^{k+1}_V を得る方法は福田-Prodon [1] を利用する.

注 3.6 ステップ ⟨$k2$⟩ の関数 l は, $\boldsymbol{v}^k$ が満たしていない X の制約式を用いて定義する.

注 3.7 仮定 *1.2* より, $\min\{\, \boldsymbol{dx} \mid \boldsymbol{x} \in X \,\} = 0$ となるので, 0 が (mmF) の下界値である. 従って, ステップ ⟨$k1$⟩ において, $\boldsymbol{d\overline{x}} = 0$ が終了条件のひとつとなる.

注 3.8 $\varepsilon' := \min\{\, \overline{g}(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in P^k_V \,\}$ のとき, $P^k \subseteqq \overline{G}_{\varepsilon'}$ となる. また, $\overline{\boldsymbol{x}} \in X \backslash \mathrm{int}\,\overline{G}_\varepsilon$ と P^k の作り方から, 任意の k で $S(\overline{\boldsymbol{x}}) \subseteqq P^k$ と $\varepsilon' \leqq \varepsilon$ が成立する. 従って, $\varepsilon' > 0$ であれば, ε' は定理 *3.3* の条件を全て満たす.

上記に局所探索を組み合わせれば, アルゴリズムの有限回停止を保証することができるが, 紙面の都合上割愛する.

4. 今後の課題

既存の手法との比較実験を行い, 提案したアルゴリズムの有効性を検証する.

参考文献

[1] K. Fukuda and A. Prodon. Double description method revisited. In *Combinatorics and Computer Science*, pp. 91–111, 1995.

[2] R. Horst and H. Tuy. *Global Optimization.* Springer-Verlag, Berlin, third and revised and enlarged edition, 1995.

[3] L. D. Muu and J. Shi. D.c. optimization methods for solving minimum maximal network flow problem. 講求録 1349「凸性の深み, 非凸性の魅惑」, 京都大学数理解析研究所, 2004.

[4] J. Shi and Y. Yamamoto. A global optimization method for minimum maximal flow problem. *Acta Math. Vietnam.*, 22:271–287, 1997.

[5] M. Shigeno, I. Takahashi, and Y. Yamamoto. Minimum maximal flow problem - an optimization over the efficient set -. *J. Global Optim.*, 25:425–443, 2003.