日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

確率ベクトルの感度分析(改訂版)

01001600 成蹊大学　上田　徹　UEDA Tohru

1. まえがき

多変量解析で用いた ε 近傍ベクトル[1]の考え方を確率ベクトルの感度解析に流用した方法を報告した[2]が、推移確率行列は非対称であるにもかかわらず対称行列の性質を使った定式化を行ってしまった。ここでは、その過ちを正し、どのような方法が考えられるかについて述べる。

2. 確率ベクトルの ε 近傍ベクトル

推移確率行列 P^t の固有値 $\lambda_i\,(>\lambda_{i+1})$ に対応しノルムが 1 の右固有ベクトルを $\mathbf{x}_i$ とすると、λ_i は

$$V(\mathbf{x}_i)=\mathbf{x}_i{}^t\frac{(P+P^t)}{2}\mathbf{x}_i-\mu(\mathbf{x}_i{}^t\mathbf{x}_i-1) \qquad (1)$$

の値となる（ただし、$\lambda_1=1$、$\mathbf{x}_1$ は定常確率ベクトルであり、固有値はすべて異なる場合だけを議論する)。すなわち、

$$V(\mathbf{x}_1)=\lambda_1,\ V(\mathbf{x}_2)=\lambda_2$$

なので、λ_1 より少し小さな値を実現するベクトル、すなわち $\mathbf{x}_1$ の ε 近傍ベクトルを、

$$V(\mathbf{x}_1)-V(\mathbf{x}_\varepsilon)=\varepsilon\lambda_1\ (=\varepsilon) \qquad (2)$$

を満たす $\mathbf{x}_\varepsilon$ と定義する。ただし、式(1)の右辺第 2 項をゼロにするために $\mathbf{x}_\varepsilon$ のノルムは 1 とする。文献[1]では式(2)を満たすベクトルのうち $\mathbf{x}_1$ からできるだけ離れたベクトルすなわち

$$L(\mathbf{x}_\varepsilon)=(\mathbf{x}_\varepsilon-\mathbf{x}_1)^t(\mathbf{x}_\varepsilon-\mathbf{x}_1) \qquad (3)$$

が最大となるベクトルを探している。しかし、

$$V(-\mathbf{x}_1)=\lambda_1,\ \{(-\mathbf{x}_1)-\mathbf{x}_1\}^t\{(-\mathbf{x}_1)-\mathbf{x}_1\}=4 \qquad (4)$$

すなわち、$\mathbf{x}_1$ とは逆向きのベクトル$(-\mathbf{x}_1)$が式(2)の ε がゼロのままで $\mathbf{x}_1$ から最も遠いベクトルを表現しており、式(2)の制約は$(-\mathbf{x}_1)$に近くても実現できるため何等かの制約を課す必要がある。

文献[1]に倣って、$\mathbf{x}_1$ と $\mathbf{x}_2$ の線形結合

$$\mathbf{y}=d_1\mathbf{x}_1+d_2\mathbf{x}_2 \qquad (5)$$

の中から探すことにする。ノルム 1 の条件は

$$\mathbf{y}^t\mathbf{y}=d_1{}^2+2d_1d_2\mathbf{x}_1{}^t\mathbf{x}_2+d_2{}^2=1 \qquad (6)$$

であり、

$$\mathbf{y}^t\frac{1}{2}(P+P^t)\mathbf{y}$$

$$=d_1{}^2\lambda_1+d_1d_2(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{x}_1{}^t\mathbf{x}_2+d_2{}^2\lambda_2 \qquad (7)$$

を考慮すると、式(2)の条件は

$$\begin{aligned}&d_1{}^2\lambda_1+d_1d_2(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{x}_1{}^t\mathbf{x}_2+d_2{}^2\lambda_2\\&=(1-\varepsilon)\lambda_1\end{aligned} \qquad (8)$$

である。また、$\mathbf{x}_2$ よりも $\mathbf{x}_1$ に近い方がよいので

$$d_1\geq|d_2| \qquad (9)$$

とする。式(6), (8)を満たす d_1, d_2 は

$$d_2{}^2=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4(1-D^2)c^2}}{1-D^2},\quad d_1=\frac{c-d_2{}^2}{d_2D}$$
$$b=2\varepsilon(1-D^2)/(1-\lambda_2)+D^2,\ D=\mathbf{x}_1{}^t\mathbf{x}_2$$
$$c=\varepsilon/(1-\lambda_2) \qquad (10)$$

である。

確率ベクトルは要素和が 1 であるが、任意の非負要素からなるベクトル $\mathbf{y}$ は各要素をその要素和 $T_\mathbf{y}$ で割ることにより要素和を 1 にできる。この要素和を 1 にする操作を確率ベクトル化ということにする。$\mathbf{x}_1$ を確率ベクトル化した $\mathbf{x}_1{}^{(P)}$ の ε 近傍ベクトルは $\mathbf{x}_1$ の ε 近傍ベクトル $\mathbf{y}$ を確率ベクトル化した $\mathbf{y}^{(P)}$ であると定義する。

$\mathbf{y} = d_1\,\mathbf{x}_1 + d_2\,\mathbf{x}_2$ のとき、その確率ベクトル化は

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}^{(P)} &= D_1\,\mathbf{x}_1 + D_2\,\mathbf{x}_2 \\
D_1 &= d_1/(d_1\sum_i x_{1i} + d_2\sum_i x_{2i}) \\
D_2 &= d_2/(d_1\sum_i x_{1i} + d_2\sum_i x_{2i})
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

により得られる。ここで、P^t の固有値 1 に対応する左固有ベクトルを $\mathbf{z}_1$ とすると、P^t が $n\times n$ の遷移確率行列の場合には、$\mathbf{z}_1 = (1,1,\ldots,1)/\sqrt{n}$ であり、$\mathbf{x}_2$ と $\mathbf{z}_1$ は直交するので

$$\sum_{j=1}^{n} x_{2i} = 0 \qquad (12)$$

となる。この場合には、式(11)は

$$(1/\sum_i x_{1i})\mathbf{x}_1 + \{d_2/(d_1\sum_i x_{1i})\}\mathbf{x}_2 \qquad (13)$$

となり、D_1 は $\mathbf{x}_1$ だけで決まる。また、実際には式(12)が成り立っているので D_2 は式(13)の第 2 項でなくても何でも構わなくなる。

3．分析例

文献[2]と同じデータを使用する。$\varepsilon = 0.01$ のとき、

$$\lambda_1 = 0.848,\ D = -0.17,\ c = 0.0658$$

$$d_2 = \pm 0.355 \text{ または} \pm 0.188$$

である。$d_2^2 = 0.355^2$ のとき、

$$d_1\,d_2 = 0.0602/0.170$$

であり、式(9)の条件から

$$d_1 = 0.997,\ d_2 = 0.355$$

である。$d_2^2 = 0.188^2$ のとき、

$$d_1\,d_2 = -0.0303/0.170$$

であり、式(9)の条件から

$$d_1 = 0.951,\ d_2 = -0.188$$

である。すなわち、2 つの解しか出てこない。$d_2>0$, $d_2<0$ に対応する ε 近傍ベクトル $\mathbf{y}$ をそれぞれ $\mathbf{y}^+$、$\mathbf{y}^-$ と表す。なお、式(9)の条件を $d_1 > 0$ と変えても同じである。

式(2),(6)と $\mathbf{y} \geq 0$ の条件で式(3)を最大にするベクトルを求めると、L の値は 2 を超えた。$(-\mathbf{x}_1)$ のとき $L=4$, ベクトル $\mathbf{0}$ のとき $L=1$ であるので、

$$L \leq 1$$

の条件を追加することが考えられる。これらの条件下で、目的を L の最大化または最小化としたときの ε 近傍ベクトルをそれぞれ ymax, ymin と表し、$\mathbf{y}^+$、$\mathbf{y}^-$ を含めて図 1 に示す。

これからは、ymax は $\mathbf{x}_1$ とまったく異なり、ymin は $\mathbf{x}_1$ とほとんど同じであり、$\mathbf{y}^+$、$\mathbf{y}^-$ の方が尤もらしいが、式(5)の制約に疑問を感じる場合には別のことを考えなくてはならない。

タイトルを改訂版としたが、残念ながらまだ説得力のあるものになっていない。

参考文献

[1]T. Ueda(1988) : “Sensitivity Analysis in Eigen Value Problems and Its Application to Conditional Ordinal Data ” , Behaviormetrika, No.23, pp.93-109

[2] 上田、佐藤：「確率ベクトルの感度解析」、OR 学会 2004 年秋季研究発表会

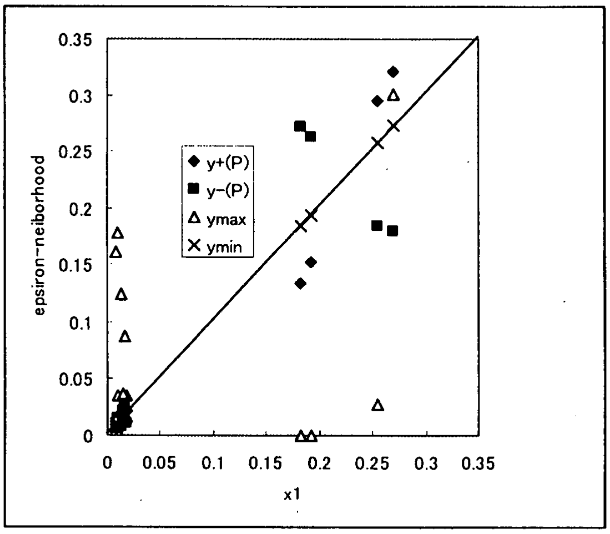

図 1 様々な ε 近傍ベクトル