日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

修正ＡＮＰ法の解の定義について

01105803　愛知学院大学　岸　善徳　KISHI Yoshinori

１．はじめに

サーティはＡＨＰにおける階層構造をネットワーク構造に拡張したＡＮＰ[3]（Analytic Network Process）を提案した。しかし、超行列のマルコフ性が原因で異常な結果が出ている[1]。そこで、岸は正規化の手法を変更して、超行列の各列の最大要素を１にする基準化を行う修正ＡＮＰ法[1][2]を提案し、修正された超行列の主固有ベクトルを解と定義した。そして、修正ＡＮＰ法によって合理的な解を得ている。

ＡＮＰ法における解は、結果的には超行列の主固有ベクトルとなっているが、サーティは超行列の主固有ベクトルをＡＮＰ法の解と定義したわけではない。従って、修正ＡＮＰ法[2]で提案した解の定義は、サーティが定義した内容とは異なっている。そこで、この報告では、サーティの本来の定義に従う修正ＡＮＰ法の解の定義を提案する。

２．ＡＮＰ法における解の定義[3]

超行列を$\bar{S}=[\bar{s}_{ij}](i,j=1,\cdots,n)$ とする。$\bar{s}_{ij}$は第ｉ要素の第ｊ要素への直接的な影響を表す。しかし、第３の要素を経由した影響も考慮する必要があるので、

$$\bar{s}_{ik}\bar{s}_{kj}\quad for\ all\ k=1,\cdots,n$$

を加える必要がある。これは、$\bar{S}^2{}_{ij}$ である。同様に、第３，第４の要素を経由した影響も考慮するので、

$$\bar{s}_{ik}\bar{s}_{kl}\bar{s}_{lj}\quad for\ all\ k,l=1,\cdots,n$$

を加える必要があり、これは、$\bar{S}^3{}_{ij}$ である。

他のあらゆる要素を経由した影響を考慮すると

$$\bar{S}^{(k)}=\frac{1}{k}(\bar{S}+\bar{S}^2+\cdots+\bar{S}^k)$$

$$C(\bar{S})=\lim_{k\to\infty}\bar{S}^{(k)}$$

とおくと、$C(\bar{S})$ が総合的な影響である。これがＡＮＰ法の解である。特に、$\bar{S}$ が既約行列であるならば、$\bar{S}$ の左主固有ベクトルを$e=[1,\cdots,1]$、$\bar{S}$ の右主固有ベクトルz を$ez=1$ となるようにとると、

$$C(\bar{S})=ze$$

なので、z を$\bar{S}$ の総合影響値（総合評価値）と定義する。なお、$C(\bar{S})$ を$\bar{S}$ の Cesaro 和と言う。

$\bar{S}$ がＡＨＰにおける階層構造から得られた超行列であるとき、階層数をｍとすると、

$$\bar{S}^k=\bar{S}^{m-1}\ k\geq m-1,\quad C(\bar{S})=\bar{S}^{m-1}$$

である。

例えば、総合目標、評価基準、代替案の３構造の場合、$\bar{S}$ 、$\bar{S}^2$ は次のようになるので、$\bar{S}^2$ の総合目標の列、代替案の行における$\bar{W}\bar{v}$ が総合評価値となる。

$$\bar{S}=\begin{bmatrix}0&0&0\\ \bar{v}&0&0\\ 0&\bar{W}&I\end{bmatrix}\quad \bar{S}^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\ 0&0&0\\ \bar{W}\bar{v}&\bar{W}&I\end{bmatrix}$$

３．修正ＡＮＰ法における解の定義

３．１　修正ＡＮＰ法の超行列

ＡＮＰ法の超行列$\bar{S}=[\bar{s}_{ij}](i,j=1,\cdots,n)$ を、次のように修正して、各列の最大要素が１となるような修正ＡＮＰ法の超行列を作る。

・各列の最大要素を求める。

$$m_j=\max_{1\leq i\leq n}\bar{s}_{ij}\quad for\ all\ j=1,\cdots,n$$

・各列の要素を列の最大要素で割る。

$$s_{ij}=\bar{s}_{ij}/m_j\quad for\ all\ i,j=1,\cdots,n$$

・これを修正ＡＮＰ法の超行列とする。

$$S=[s_{ij}](i,j=1,\cdots,n)$$

３．２　超行列S の主固有値$\lambda_{\max}$ による調整

超行列S の主固有値$\lambda_{\max}$ は通常１を越えるため、ＡＮＰ法のように Cesaro 和が求まらない。しかし、超行列S はある要素の別の要素への直接的な影響を表しているので、直接的な、および、間接的な影響度の比率が求まれば、その比率を修正ＡＮＰ法の解と考えることができる。そこで、

$$T=S/\lambda_{\max}$$

とおくと、T は次の性質を満たす。

(1) $t_{ij}\geq 0\quad for\ all\ i,j=1,\cdots,n$

(2) T の主固有値は１である

(3) $|\alpha|\leq 1\quad for\ all\ eigenvalue\ \alpha\ of\ T$

３．３　定理１

S を修正ＡＮＰ法の超行列、$\lambda_{\max}$ をS の主固有値とする。S が既約行列ならば、$T=S/\lambda_{\max}$ とおくと、

(1) Cesaro 和$C(T)$ は存在して、階数１である。

(2) $C(T)=zw$

ここで、列ベクトルz はS の右主固有ベクトル、行ベクトルw はS の左主固有ベクトルで、$wz=1$ を満たすものである。

３．４　修正ＡＮＰ法の解

$T=S/\lambda_{\max}$ に対する Cesaro 和$C(T)$ を、修正ＡＮＰ法の解とする。また、z を超行列S の総合評価値と定

義する。

３．５　階層構造ＡＨＰの場合

S がＡＨＰにおける階層構造から得られた超行列であるとき、$\lambda_{\max}=1, T=S$ なので、階層数をｍとすると、

$$S^k = S^{m-1}\ k \geq m-1,\quad C(S)=S^{m-1}$$

である。

例えば、総合目標、評価基準、代替案の３構造の場合、S 、S^2 は次のようになるので、S^2 の総合目標の列、代替案の行における Wv が総合評価値となる。

$$S=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ v & 0 & 0\\ 0 & W & I\end{bmatrix}\quad S^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ Wv & W & I\end{bmatrix}$$

４．定理１の証明

フロベニウスの第２定理を出発点として、２つの補題の後、定理１を証明する。

定理２（フロベニウスの第２定理）

A を非負の既約行列として、λ を A の主固有値、c を A の周期とする。このとき、ちょうど c 個の A の固有値 $\alpha_1,\cdots,\alpha_c$ $|\alpha_i|=\lambda\ (i=1,\cdots,c)$ が存在する。そして、これらはすべて異なっていて、次のように与えられる。

$$\alpha_1=\lambda, \alpha_2=\lambda\varepsilon, \alpha_3=\lambda\varepsilon^2,\cdots,\alpha_c=\lambda\varepsilon^{c-1}$$

$$\varepsilon=e^{2\pi i/c}$$

補題１

α を複素数とする。$|\alpha|=1$ ならば次が成立する。

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}(\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^k)=\begin{cases}1 & for\ \alpha=1\\ 0 & for\ \alpha\neq 1\end{cases}$$

補題２

J を次のようなジョルダン細胞形とする。

$$J=\begin{bmatrix}\alpha & 1 & & 0\\ & \alpha & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \alpha\end{bmatrix}$$

このとき、$|\alpha|<1$ ならば次が成立する。

$$C(J)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}(J+J^2+\cdots+J^k)=0$$

定理１の証明

(1)　S が既約行列なので T も既約行列である。従って、定理２より、T の周期を c とすると、T の c 個の固有値が存在して、

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_c\quad |\alpha_i|=1\ (i=1,\cdots,c)$$

これらはすべて異なっていて、次のように与えられる。

$$\alpha_1=1, \alpha_2=\varepsilon, \alpha_3=\varepsilon^2,\cdots,\alpha_c=\varepsilon^{c-1}$$

$$\varepsilon=e^{2\pi i/c}$$

従って、ある正則行列 P をとると、次のようなジョルダン標準形をえる。

$$J=PTP^{-1}=\begin{bmatrix}J_1 & & & & & 0\\ & \ddots & & & & \\ & & J_c & & & \\ & & & J_{c+1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & J_s\end{bmatrix}$$

ここで、

$$J_i=[\alpha_i]\quad (1\leq i\leq c)$$

$$J_i=\begin{bmatrix}\alpha_i & 1 & & 0\\ & \alpha_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \alpha_i\end{bmatrix}\quad |\alpha_i|<1\quad (c+1\leq i\leq s)$$

である。

補題１より、$C(J_i)=0\quad for\ J_i(2\leq i\leq c)$

補題２より、$C(J_i)=0\quad for\ J_i(c+1\leq i\leq s)$

従って、$C(J)=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$ をえる。

$T^k=P^{-1}J^kP$ なので

$$C(T)=\lim_{k\to\infty}T^{(k)}=\lim_{k\to\infty}P^{-1}J^{(k)}P=P^{-1}C(J)P$$

従って、$C(T)$ が存在して、階数は１となる。

(2)　x を P^{-1} の第１列、y を P の第１行とすると、$PP^{-1}=I$ より $yx=1$。そして、

$$C(T)=xy$$

となる。

$x(yz)=C(T)z=z$ 、$(wx)y=wC(T)=w$

$yx=1$ と $zw=1$ より、$(yz)(wx)=1$ をえる。

従って、

$$zw=x(yz)(wx)y=xy=C(T)$$

をえる。

参考文献

[1] 岸　善徳: ＡＮＰにおける異常現象を解決する修正ＡＮＰ法の提案　ＯＲ学会２００４年春季全国大会

[2] 岸　善徳: 修正ＡＮＰ法による先生と学生の相互評価問題の解法　ＯＲ学会２００４年秋季全国大会

[3] T. L. Saaty: The Analytic Network Process. (RWS Publication, Pittsburgh, 1996)