日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

待機場所を持つ客の待ち行列への参入問題

01107945　鳥取大学工学部　*小柳　淳二　KOYANAGI Junji
01103205　鳥取大学工学部　河合　一　KAWAI　Hajime

1　はじめに

本研究では，待ち行列システムに到着した，特別な客（スマート客）が自分のみが利用できる待機場所を持つ場合，高い待ちコストを支払って待ち行列に並ぶか，安い待機コストを支払って待機場所で待つかを選択できるモデルを扱う．待機場所では常時行列を観測できるが，待機終了後に行列に並ぶときには，待機終了時点の待ち行列の最後尾に並ぶものとする．

このようなモデルは Mandelbaum and Yechiali (1983) が $M/G/1$ 待ち行列システムにおいて「スマート客」(smart customer) の最適政策として定式化したものがある．そこで扱われたモデル（以後 Model S と表す）ではスマート客は行列到着時に３つの選択肢を持つ．

A1. 行列に並ぶ．
A2. 待機場所で待機し，現在サービス中の客が退去するのを待つ．
A3. 並ばずに立ち去る．

A2 を選択した場合，サービス中の客が退去したとき再び行列長を観測し，観測後３つの選択肢のいずれかをとる．

それぞれのアクションをとった場合のコストは

(1) 行列に並んだ場合，サービス終了までの系内時間に比例したコストを仮定する，すなわち系内人数 i の時に $i+1$ 番目の客として並んだとき期待コスト $c(i+1)$ とする，
(2) 待機場所で待機した場合コスト b を支払う．
(3) 並ばずに立ち去った場合 コスト d を支払う

Model S における最適政策は次のような構造を持つことが示されている．

Model S の最適政策

閾値 s_1, s_2 があり，系内人数 i が

(1) $0 \leq i < s_1$ であれば，行列に並ぶ．
(2) $s_1 \leq i < s_2$ であれば，待機場所で待つ．
(3) $s_2 \leq i$ であれば，立ち去る．

本研究では，離散時間待ち行列モデルにおける上記のような問題を考え，待機場所での待機時間として２種類のいずれかを選択できる場合を取り扱う．

2　モデル

まず，立ち去るというアクションがない場合を考える．サーバーが一つの離散時間待ち行列システムを考え，客は単位時間当たり，p の確率で到着し，サービス中の客は q の確率で退去するものとする．この待ち行列システムに特別な客（スマート客）が一人だけ到着するものとし，その客は待ち行列で並んで待つか，待ち行列外の待機場所で１単位時間か，２単位時間過ごして再び待ち行列に戻るかを選択できる．

例えば，行列に並ぶとタバコが吸えない場合，タバコを吸いたい人は行列に並ぶ前に喫煙場所でタバコを吸って待つことができる．行列に並ぶよりタバコを吸っていたほうが待ち行列に並ぶよりイライラせずにすむが，吸っている間に来た他の客に先を越されてしまうリスクがあるような状況である．

コストとして

(1) 待ち行列内で過ごす１単位時間あたり c のコストがかかる．
(2) １単位待機場所で過ごすと b_1，２単位待機場所で過ごす（中断はできない）と b_2 のコストがかかる．

また，それぞれのアクションが意味を持つために

- $b_1 < c$ (待機場所で待つより待ち行列で待つほうがコスト大きい),
- $b_2 < 2b_1$ (２期間待機１回より，１期間待機を２回のほうがコスト大きい)

とする．

3 定式化

$i = 0$ では行列に入るのが最適であるので，以後 $i \geq 1$ の場合を扱う．

次の関数を定義する．

$V(i)$ ：系内人数が i の時点からの最適コスト

$B_k(i)$ ：系内人数が i の時点から k 期間待機を選択した以降の最適コスト ($k = 1, 2$)

$W_k(i)$ ：系内人数が i の時，k 期間待機時間が残っている状態からの最適コスト ($k = 0, 1, 2$)

定義より

$$
\begin{aligned}
V(i) &= \min\{c(i+1)/q, B_1(i), B_2(i)\} \\
B_k(i) &= b_k + W_k(i) \\
W_k(i) &= p(1-q)W_{k-1}(i+1) \\
&\quad +\{pq + (1-p)(1-q)\}W_{k-1}(i) \\
&\quad +(1-p)qW_{k-1}(i-1) \\
W_0(i) &= V(i)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

最適政策が，系内人数が増加するにつれて，

並ぶ→[１期間待機]→２期間待機

のように単調に変化する（[] 内が最適になる領域は存在しないこともある.）性質があることを以下のように証明する

まず，並ぶのが最適になる領域について以下の補題が成立する．

補題 1 系内人数 l_0 で行列に並ぶのが最適であれば，系内人数 i ($i \leq l_0$) でも行列に並ぶのが最適である．□

また，立ち去るというアクションがない場合 $2b_1 > b_2$ を用いて１待機期間が最適となる領域については次の補題が証明できる．

補題 2

(1) 系内人数 l_1 で１期間待機が最適であれば，系内人数 $l_1 + 1$ では２期間待機か最適である．

(2) ある系内人数において２期間待機が最適となると，それより多い人数では２期間待機が最適となる．

すなわち,「並ぶ」,「１期間待機」,「２期間待機」の３つのアクションしかない場合，人数の増加につれて

(1) ある人数以下では「並ぶ」が最適，

(2) 「１期間待機」が最適なのは（存在するとすれば）ある特定の人数の場合だけ．

(3) いったん２期間待機が最適となれば，それ以上の人数では２期間待機が最適となる．

立ち去るアクションをいれた場合

「並ぶ」,「１期間待機」,「２期間待機」に加えて「立ち去る」をコスト d でとれる場合，$2b_1 > b_2$ より強い条件

$$\left(2 - \frac{p(1-q)}{pq+1-q}\right) b_1 > b_2$$

の条件があれば，最適政策として次の構造を持つ．

定理 1 最適アクションは，人数が増大するにつれて,「並ぶ」から「１期間待機」,「２期間待機」,「立ち去る」と変化する．ただし「１期間待機」と「２期間待機」が最適となる人数は存在しない場合が考えられる．また「１期間待機」が最適となる人数が存在する場合，ある特定の人数の場合のみとなる

参考文献

[1] A. Mandelbaum and U. Yechiali, Optimal entering rules for a customer with wait option at an $M/G/1$ queue, *Management Science*, **29-2**, 174–187 (1983)